

俄罗斯数学
教材选译

数学分析习题集

（根据2010年俄文版翻译）

□ Б. П. 吉米多维奇 著
□ 李荣涷 李 植 译



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

总 策 划：张小萍
责任编辑：蒋 青
封面设计：王凌波

Б. П. 吉米多维奇的《数学分析习题集》是一部久负盛名的经典著作，自20世纪50年代引进以来，对我国半个多世纪的微积分学乃至高等数学的教与学产生了重大影响。本书译自最新的2010年俄文版，是对已在我国流行多年的1958年版中译本（李荣涑译）的全面修订和增补。与该版相比，本书除了对少量习题的修订与更替，还增加了许多新题。后继译者继承了原有译文简洁凝练的风格，对全部译文进行了适当改写和补译，以适应学科术语标准化和语言习惯变化的需要。

全书包括约5000道习题，几乎涵盖了数学分析的各个重要分支：分析引论（主要是函数与极限理论）、一元函数微分学、不定积分与定积分、级数、多元函数微分学、带参数的积分、重积分与曲线积分、曲面积分。难度较大的一些习题带有提示，书后附有计算题和简答题的答案。

本书可作为各类读者学习微积分或高等数学课程的重要参考书。

学科类别：数学

ISBN 978-7-04-025439-6



定价 29.00 元
academic.hep.com.cn



俄罗斯数学
教材选译

● 数学天元基金资助项目

数学分析习题集

Shuxue Fenxi Xitiji

(根据2010年俄文版翻译)

□ Б. П. 吉米多维奇 著
□ 李荣涑 李 植 译



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图字: 01–2008–5183 号

Б. П. Демидович,

Сборник задач и упражнений по математическому анализу,

Москва, Издательство Астрель, 2010.

Originally published in Russian in the title:

B. P. Demidovich

Collection of Problems and Exercises in Mathematical Analysis

图书在版编目 (CIP) 数据

数学分析习题集 / (俄罗斯) 吉米多维奇著; 李荣涑, 李植译. — 2 版. — 北京: 高等教育出版社, 2010.7

根据 2010 年俄文版翻译

ISBN 978-7-04-025439-6

I.数… II.①吉…②李…③李… III.数学分析-高等学校-习题 IV. O17-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 213260 号

策划编辑	赵天夫	**责任编辑**	蒋 青	**封面设计**	王凌波
版式设计	余 杨	**责任校对**	王 雨	**责任印制**	陈伟光

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	**咨询电话**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网 址**	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	涿州市星河印刷有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开 本	787×1092 1/16	**版 次**	1958 年 6 月第 1 版
			2010 年 7 月第 2 版
印 张	25.5	**印 次**	2010 年 7 月第 1 次印刷
字 数	450 000	**定 价**	29.00 元

物 料 号 25439–00

《俄罗斯数学教材选译》序

从上世纪 50 年代初起，在当时全面学习苏联的大背景下，国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密，论证严谨，有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础，培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代，国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材，但还在很大程度上保留着苏联教材的影响，同时，一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说，从解放初一直到文化大革命前夕，苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用，起了不可忽略的影响，是功不可没的.

改革开放以来，通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材，大家眼界为之一新，并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中，尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革，引进却基本中断，更没有及时地进行跟踪，能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少，事实上已造成了很大的隔膜，不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初，在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上，有数学家提出，莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材，建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持，并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论，大家一致认为：在当前着力引进俄罗斯的数学教材，有助于扩大视野，开拓思路，对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要.《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下，经数学天元基金资助，由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订，本系列中所列入的教材，以莫斯科大学的教材为主，也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材. 有大学基础课程的教材，也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书. 有些教材虽曾翻译出版，但经多次修订重版，面目已有较大变化，至今仍广泛采用、深受欢迎，反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力，对我们也是一个有益的借鉴. 这一教材系列的出版，将中俄数学教学之间中断多年的

链条重新连接起来, 对推动我国数学课程设置和教学内容的改革, 对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才, 可望发挥积极的作用, 并起着深远的影响, 无疑值得庆贺, 特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

序 言

和许多数学家一样, 我也曾两次使用这部广为流传的著作: 首先是别人教我数学分析的时候, 然后是我自己教别人数学分析的时候. 在 Б. П. 吉米多维奇的习题集筹备再版之际, 我深感欣喜, 并以特别感激的心情应其子 В. Б. 吉米多维奇之邀为本版作序.

在此, 我对这本卓越的大学数学分析习题集和它的作者、国立莫斯科大学教授 Б. П. 吉米多维奇作简要的介绍.

鲍里斯·巴甫洛维奇·吉米多维奇 (Борис Павлович Демидович, 1906—1977) 是白俄罗斯人, 他的父亲 П. П. 吉米多维奇是当地的一位教师[①], 在教书的同时也在民族学和地方民俗学领域取得了研究成果, 并因此当选为莫斯科大学自然科学、人类学和民族学爱好者皇家协会的准会员. Б. П. 吉米多维奇本人在国立白俄罗斯大学毕业后也曾当过几年教师, 后来成为国立莫斯科大学数学和力学研究所的研究生. 在研究生期间, 他在 В. В. 斯捷潘诺夫的领导下开展研究, 直接导师则是 В. В. 涅梅茨基. 在很大程度上, 正是他们决定了 Б. П. 吉米多维奇的主要研究领域——经典数学分析和常微分方程理论.

研究生毕业后, Б. П. 吉米多维奇被聘为国立莫斯科大学力学数学系数学分析教研室的助教. 在此后的四十多年时间里, 他一直是这个教研室的成员. 他在副博士[②]论文答辩后成为该教研室的副教授, 在博士论文答辩后晋升为教授. 此外, 他还在莫斯科的其他一些高等院校任教. 他直接培养的学生, 许多已经成为副博士或博士.

Б. П. 吉米多维奇的论文、专著和教科书 (共计约 60 项) 反映了他极强的专业精神和极丰富的教学经验, 这些学术作品获得了国内外的广泛认可. 其中, 具有特殊地位的正是呈献给读者的这本习题集. 它的第一版于 1952 年问世, Б. П. 吉米多维奇为此花费了 15 年以上的时间来收集材料. 该习题集一举成名, 立刻成为大学数学分析的基本教材.

[①]俄文 учитель 一词一般指中小学教师. —— 译注

[②]苏联和现在的俄罗斯等国家的副博士 (кандидат наук) 学位一般相当于我们通常所说的博士学位, 而博士学位 (доктор наук) 则是更高一级的学位, 要求学位获得者在相关领域有非同寻常的重要贡献. 在上述国家, 副博士学位拥有者才有资格成为副教授, 博士学位拥有者才有资格成为教授. —— 译注

此后, 作者又进行了一些修订, 但由于这本书的初始结构十分合理, 后续调整并不算大. 至今, 习题集的俄文版已经多次再版, 并被译为多种文字在世界的许多国家使用.

数学的发展带来了新的概念、方法、观念和语言, 它们通常会把个别的事实联系起来. 这也经常涉及那些似乎已经发展完毕的基础分支. 微积分学的发展就完全印证了这个结论, 例如对微分和微分规则的不变性的现代解释, 再如利用微分形式的语言和对微分形式的积分给出牛顿—莱布尼茨公式的现代表述. 目前, 无论在数学分析的习题集中, 还是在必修课上, 都未必总能找到这样的语言和一般形式的斯托克斯公式. 此外, 渐近方法作为一种因其有效性而非常有用的重要数学工具, 也是数学的某些领域所共有的一种方法. 渐近方法的基本内容, 就如同极限理论和泰勒公式那样, 总是希望能在数学分析的习题集中看到. 至于数学分析的较高等的分支, 则要求读者有一定的熟练程度和技巧. 要知道, 演奏者若不精通乐器是不可能演奏一部严肃音乐作品的.

经验已经表明, Б. П. 吉米多维奇的习题集能够让学生在使用经典分析工具的时候获得必要的技能. 本书是高等院校数学分析习题课的基本教材之一.

卓里奇 (В. А. Зорич)
莫斯科大学力学数学系
数学分析教研室教授

目 录

第一部分

一元函数

第一章　分析引论

§1. 实数

1. 数学归纳法. 为了证明某定理对任意的正整数 n 为真, 只需证明下面两点即可: (1) 这定理对 $n=1$ 为真, (2) 设这定理对任何的一个正整数 n 为真, 则它对下一个正整数 $n+1$ 也为真.

2. 分割. 若分有理数为 A 和 B 两类, 使其满足下列条件: (1) 两类均非空集; (2) 每一个有理数必属于一类, 且仅属于一类; (3) 属于 A 类 (下类) 的任一数小于属于 B 类 (上类) 的任何数, 则这样的一个分类法称为分割. (a) 若或是下类 A 有最大的数, 或是上类 B 有最小的数, 则分割 A/B 确定一个有理数; (b) 若 A 类无最大数, 而 B 类亦无最小数, 则分割 A/B 确定一个无理数. 有理数和无理数统称为实数[1].

3. 绝对值 (或模). 若 x 为实数, 则用下列条件所确定的非负数 $|x|$, 称为 x 的绝对值 (模)

$$|x| = \begin{cases} -x, & x<0, \\ x, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

对于任何的实数 x 和 y, 以下不等式成立:

$$|x|-|y| \leqslant |x+y| \leqslant |x|+|y|.$$

4. 上确界和下确界. 设 $X=\{x\}$ 为实数的有界集合. 若:

(1) 每一个 $x \in X$[2]满足不等式

$$x \geqslant m;$$

(2) 对于任何的 $\varepsilon>0$, 存在 $x' \in X$, 使

$$x' < m+\varepsilon,$$

则数 $m=\inf\{x\}$ 称为集合 X的下确界.

同样, 若:

(1) 每一个 $x \in X$ 满足不等式

$$x \leqslant M;$$

(2) 对于任何的 $\varepsilon>0$, 存在 $x'' \in X$, 使

---

[1] 以后若没有相反的附带说明, 数这个字我们将理解为实数.

[2] 符号 $x \in X$ 表示 x 属于集合 X.

$$x'' > M - \varepsilon,$$

则数 $M = \sup\{x\}$ 称为集合 X 的上确界.

若集合 X 下方无界, 则通常说

$$\inf\{x\} = -\infty;$$

若集合 X 上方无界, 则认为

$$\sup\{x\} = +\infty.$$

5. 绝对误差和相对误差. 设 a $(a \neq 0)$ 是被测量的精确数值, 而 x 是这个量的近似值, 则

$$\Delta = |x - a|$$

称为被测量的绝对误差, 而

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}$$

称为被测量的相对误差.

若数 x 的绝对误差不超过它的第 n 个有效数字所对应的位数的单位的一半, 则说 x 有 n 位精确的数字.

利用数学归纳法求证下列等式对任何正整数 n 皆成立:

1. $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$.

4. $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

5. 设 $a^{[n]} = a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$ 及 $a^{[0]} = 1$, 求证

$$(a+b)^{[n]} = \sum_{m=0}^{n} \mathrm{C}_n^m a^{[n-m]} b^{[m]},$$

其中 C_n^m 是由 n 个元素中选取 m 个的组合数, 由此推出牛顿二项式公式.

6. 证明伯努利不等式:

$$(1 + x_1)(1 + x_2)\cdots(1 + x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

式中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是符号相同且大于 -1 的数.

7. 证明: 若 $x > -1$, 则不等式

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx \quad (n > 1)$$

为真, 且仅当 $x = 0$ 时, 等式成立.

8. 证明不等式:

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad (n > 1).$$

提示: 利用不等式

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > 2 \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

9. 证明如下不等式:

(a) $2! \cdot 4! \cdots (2n)! > [(n+1)!]^n$ $(n > 1)$;

(b) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

10. 证明如下不等式:

(a) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}\ (n\geqslant 2)$;

(b) $n^{n+1}>(n+1)^n\ (n\geqslant 3)$;

(c) $\left|\sin\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\sin x_k\ (0\leqslant x_k\leqslant\pi, k=1,2,\cdots,n)$;

(d) $(2n)!<2^{2n}(n!)^2$.

11. 设 c 为正整数, 而不为整数的平方, 且 A/B 为确定实数 $\sqrt{c}$ 的分割, 其中 B 类包含所有满足 $b^2>c$ 的正有理数 b, 而 A 类包含所有其余的有理数. 求证: 在 A 类中无最大数, 而在 B 类中无最小数.

12. 确定数 $\sqrt[3]{2}$ 的分割 A/B 用下面的方法来建立: A 类包含所有满足 $a^3<2$ 的有理数 a; B 类包含所有其余的有理数. 证明: 在 A 类中无最大数, 而在 B 类中无最小数.

13. 作出适当的分割, 然后证明等式:

(a) $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$; (b) $\sqrt{2}\sqrt{3}=\sqrt{6}$.

14. 建立确定数 $2^{\sqrt{2}}$ 的分割.

15. 求证: 任何非空且下方有界的数集有下确界, 而且何非空且上方有界的数集有上确界.

16. 证明: 一切有理真分数 $\frac{m}{n}$ (式中 m 及 n 为正整数, 且 $0<m<n$) 的集合无最小及最大的元素. 求这个集合的上确界及下确界.

17. 求满足不等式

$$r^2<2$$

的有理数 r 所成集合的下确界和上确界.

18. 设 $\{-x\}$ 为数 $x\in\{x\}$ 的相反数的集合, 证明:

(a) $\inf\{-x\}=-\sup\{x\}$; (b) $\sup\{-x\}=-\inf\{x\}$.

19. 设 $\{x+y\}$ 为所有 $x+y$ 这些和的集合, 其中 $x\in\{x\}$ 及 $y\in\{y\}$, 证明等式:

(a) $\inf\{x+y\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}$; (b) $\sup\{x+y\}=\sup\{x\}+\sup\{y\}$.

20. 设 $\{xy\}$ 为所有 xy 乘积的集合, 其中 $x\in\{x\}$ 及 $y\in\{y\}$, 且 $x\geqslant 0$ 及 $y\geqslant 0$. 证明等式:

(a) $\inf\{xy\}=\inf\{x\}\inf\{y\}$; (b) $\sup\{xy\}=\sup\{x\}\sup\{y\}$.

21. 求证不等式:

(a) $|x-y|\geqslant\big||x|-|y|\big|$; (b) $|x+x_1+\cdots+x_n|\geqslant|x|-(|x_1|+\cdots+|x_n|)$.

解不等式:

22. $|x+1|<0.01$.

23. $|x-2|\geqslant 10$.

24. $|x|>|x+1|$.

25. $|2x-1|<|x-1|$.

26. $|x+2|+|x-2| \leqslant 12$.

27. $|x+2|-|x|>1$.

28. $\big||x+1|-|x-1|\big|<1$.

29. $|x(1-x)|<0.05$.

30. 证明恒等式:

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=x^2.$$

31. 当测量长度 10 cm 时, 绝对误差为 0.5 mm; 当测量距离 500 km 时, 绝对误差等于 200 m. 那种测量较为精确?

32. 设数 $x=2.3752$ 的相对误差为 1%, 试确定此数包含多少位精确数字?

33. 数 $x=12.125$ 包含 3 位精确数字. 试求此数的相对误差.

34. 矩形的边长等于:

$$x=2.50\ \mathrm{cm}\pm0.01\ \mathrm{cm},\quad y=4.00\ \mathrm{cm}\pm0.02\ \mathrm{cm}.$$

这个矩形的面积 S 界于什么范围内? 当其边长取平均值时, 矩形面积的绝对误差 Δ 和相对误差 δ 是多少?

35. 物体的质量 $P=12.59\ \mathrm{g}\pm0.01\ \mathrm{g}$, 其体积 $v=3.2\ \mathrm{cm}^3\pm0.2\ \mathrm{cm}^3$. 若对物体的质量和体积都取其平均值, 试求物体的密度, 并估计密度的绝对误差和相对误差.

36. 圆半径

$$r=7.2\ \mathrm{m}\pm0.1\ \mathrm{m}.$$

若取 $\pi=3.14$, 则求出的圆面积的最小相对误差是多少?

37. 已测得长方体各边长为

$$x=24.7\ \mathrm{m}\pm0.2\ \mathrm{m},\quad y=6.5\ \mathrm{m}\pm0.1\ \mathrm{m},\quad z=1.2\ \mathrm{m}\pm0.1\ \mathrm{m}.$$

此长方体的体积 V 界于什么范围内? 若测量的各结果都取其平均值, 则所求出的体积可能有的绝对误差和相对误差是多少?

38. 正方形的边长 x 满足 $2\ \mathrm{m}<x<3\ \mathrm{m}$. 应当以多小的绝对误差来测量边长, 在计算此正方形的面积时才有可能精确到 $0.001\ \mathrm{m}^2$?

39. 假设矩形每边的长皆不超过 10 m, 为了使根据测量所计算出来的面积与原面积之差不超过 $0.01\ \mathrm{cm}^2$, 问测量矩形的边 x 与 y 时, 许可的绝对误差 Δ 的值多大?

40. 设 $\delta(x)$ 及 $\delta(y)$ 为数 x 和 y 的相对误差, $\delta(xy)$ 为数 xy 的相对误差. 求证

$$\delta(xy)\leqslant\delta(x)+\delta(y)+\delta(x)\delta(y).$$

§2. 数列理论

1. 数列极限的概念. 若对于任何的 $\varepsilon>0$, 存在数 $N=N(\varepsilon)$, 使得

$$\text{当 } n>N \text{ 时},\quad |x_n-a|<\varepsilon,$$

则称数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 有极限 a (或者说, 收敛于 a), 亦即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

特别地, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, 则称 x_n 为无穷小量.

没有极限的数列, 称为发散的.

2. 极限存在的判别法.

(1) 若 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = c$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

(2) 单调而且有界的数列有极限.

(3) *柯西准则*: 数列 $\{x_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$ 的极限存在的充分必要条件是: 对于任何的 $\varepsilon > 0$, 存在数 $N = N(\varepsilon)$, 使当 $n > N$ 和 $p > 0$ 时 $|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$.

3. 关于数列极限的基本定理. 设

$$\lim_{n\to\infty} x_n \quad 和 \quad \lim_{n\to\infty} y_n$$

存在, 则有:

(1) 若 $x_n \leqslant y_n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

(4) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$.

4. 数 e. 数列

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n=1,2,\cdots)$$

具有有限的极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} = 2.718\ 281\ 828\ 4\cdots.$$

5. 无穷极限. 符号

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

表示: 对于任何的 $E > 0$, 存在数 $N = N(E)$, 使得

$$当\ n > N\ 时, \quad |x_n| > E.$$

6. 极限点. 若已知数列 x_n $(n=1,2,\cdots)$ 有子数列

$$x_{p_1}, x_{p_2}, \cdots, x_{p_n}, \cdots \quad (1 \leqslant p_1 < p_2 < \cdots)$$

满足

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n} = \xi,$$

则称数 ξ (或符号 ∞) 为已知数列 x_n $(n=1,2,\cdots)$ 的子列极限 (极限点)[①].

任何有界的数列至少有一个有限的子列极限 (*波尔查诺–魏尔斯特拉斯原理*). 若这个子列极限是唯一的, 则它即为已知数列的有限极限.

数列 x_n 的最小子列极限 (有限的或无穷的)

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n$$

称为此数列的*下极限*, 而它的最大子列极限

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n$$

称为*上极限*.

等式

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n$$

---

① 极限点也称为聚点. 一般地, 若 x 的任何邻域中至少有一个不同于 x 且属于给定集合 X 的点, 则称点 x 为集合 X 的极限点. —— 译注

为数列 x_n 的 (有限或无穷) 极限存在的充分必要条件.

41. 设

$$x_n = \frac{n}{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

证明:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1,$$

即对于任一个给定的 $\varepsilon > 0$, 求出数 $N = N(\varepsilon)$, 使得

$$\text{在 } n > N \text{ 时,} \quad |x_n - 1| < \varepsilon.$$

填下表:

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	$\cdots$
N					

42. 设

(a) $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$; (b) $x_n = \dfrac{2n}{n^3+1}$;

(c) $x_n = \dfrac{1}{n!}$; (d) $x_n = (-1)^n \cdot 0.999^n$,

对于任何的 $\varepsilon > 0$, 求出数 $N = N(\varepsilon)$, 使得

$$\text{当 } n > N \text{ 时,} \quad |x_n| < \varepsilon;$$

从而证明: x_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 为无穷小量 (就是说, 它的极限值为 0).

对应着上面四种情形, 填下表:

ε	0.1	0.01	0.001	$\cdots$
N				

43. 证明: 数列

(a) $x_n = (-1)^n n$, (b) $x_n = 2^{\sqrt{n}}$, (c) $x_n = \lg(\lg n)$ $(n \geqslant 2)$

当 $n \to \infty$ 时有无穷极限 (即成为无穷大), 即: 对任意的 $E > 0$, 求出数 $N = N(E)$, 使得

$$\text{当 } n > N \text{ 时,} \quad |x_n| > E.$$

对应着上面的每一种情形, 填下表:

E	10	100	1000	10000	$\cdots$
N					

44. 求证:

$$x_n = n^{(-1)^n} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

无界, 但当 $n \to \infty$ 时, 它并不成为无穷大.

45. 用不等式表述下列命题:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$; (c) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

设 n 遍历正整数列, 求下列各式之值:

46. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10\,000n}{n^2+1}$.

47. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

48. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$.

49. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.

50. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$ $(|a|<1, |b|<1)$.

51. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

52. $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n}-\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}n}{n}\right|$.

53. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{(n-1)^2}{n^3}\right]$.

54. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{3^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{(2n-1)^2}{n^3}\right]$.

55. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$.

56. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$.

57. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\ \cdots\ \sqrt[2^n]{2}\right)$.

证明下列等式:

58. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$.

59. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$.

60. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0$ $(a>1)$.

61. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

62. $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0$, 若 $|q|<1$.

63. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ $(a>0)$.

64. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a n}{n} = 0$ $(a>1)$.

65. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

66. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

67. 当 n 充分大时, 下列各组表达式中哪个更大?

(a) $100n+200$, $0.01n^2$; (b) 2^n, n^{1000}; (c) 1000^n, $n!$.

68. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right) = 0.$$

提示: 参阅习题 9 (b).

69. 证明: 数列

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n=1,2,\cdots)$$

是单调增的, 且上方有界, 而数列

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (n=1,2,\cdots)$$

是单调减的, 且上方有界. 由此推出这些数列有公共的极限:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\mathrm{e}.$$

提示: 先作出比 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$, $\dfrac{y_n}{y_{n-1}}$, 并利用习题 7 的不等式.

70. 证明:

$$0<\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{3}{n}\quad(n=1,2,\cdots).$$

当指数 n 是什么样的数值时, 表达式 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 与数 e 之差小于 0.001?

71. 设 p_n $(n=1,2,\cdots)$ 为趋于 $+\infty$ 的任意数列, 而 q_n $(n=1,2,\cdots)$ 为趋于 $-\infty$ 的任意数列 $(p_n,g_n\notin[-1,0])$. 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=\mathrm{e}.$$

72. 已知

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e},$$

求证:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=\mathrm{e}.$$

由此推出公式

$$\mathrm{e}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!n},\tag{*}$$

其中 $0<\theta_n<1$, 并计算数 e, 精确到 10^{-5}.

73. 证明: 数 e 为无理数.

74. 证明不等式:

$$\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n<n!<\mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

75. 证明不等式:

(a) $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$, 其中 n 为任意的正整数.

(b) $1+a<\mathrm{e}^{\alpha}$, 其中 a 为异于零的实数.

76. 求证:

$$\lim_{n\to\infty}n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)=\ln a\quad(a>0),$$

式中 $\ln a$ 是取 $\mathrm{e}=2.718\cdots$ 作底时, 数 a 的对数.

利用关于单调有界数列极限存在的定理, 证明以下各数列的收敛性:

77. $x_n=p_0+\dfrac{p_1}{10}+\cdots+\dfrac{p_n}{10^n}$ $(n=1,2,\cdots)$, 其中 p_i $(i=0,1,2,\cdots)$ 是非负整数, 并且从 p_1 起不大于 9.

78. $x_n=\dfrac{10}{1}\cdot\dfrac{11}{3}\cdots\dfrac{n+9}{2n-1}$.

79. $x_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.

80. $x_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

81. $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \cdots, x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ 重根号}}, \cdots$.

利用柯西准则, 证明以下各数列的收敛性:

82. $x_n = a_0 + a_1 q + \cdots + a_n q^n$, 其中 $|a_k| < M$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ 且 $|q| < 1$.

83. $x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}$.

84. $x_n = \frac{\cos 1!}{1\cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}$.

85. $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.

提示: 利用不等式 $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ $(n = 2, 3, \cdots)$.

86. 对于数列 x_n $(n = 1, 2, \cdots)$, 若存在数 C, 使得

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_n - x_{n-1}| < C \quad (n = 2, 3, \cdots),$$

则称数列 x_n *有有界变差*.

证明: 凡有有界变差的数列是收敛的.

举出一个收敛数列而无有界变差的例子.

87. 试述 "某数列不满足柯西准则" 的含义.

88. 利用柯西准则, 证明数列:

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

的发散性.

89. 证明: 若数列 $x_n\,(n = 1, 2, \cdots)$ 收敛, 则它的任何子数列 x_{p_n} 也收敛且有同一极限: $\lim\limits_{n\to\infty} x_{p_n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

90. 证明: 若单调数列的某一子数列收敛, 则此单调数列本身是收敛的.

91. 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.

92. 设 $x_n \to a$, 则极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

是什么?

93. 证明: 收敛的数列是有界的.

94. 证明: 收敛的数列或达到其上确界, 或达到其下确界, 或两者都达到. 举出这三类数列的例子.

95. 证明: 趋于 $+\infty$ 的数列 x_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 必定达到其下确界.

求数列 x_n $(n=1,2,\cdots)$ 的最大项, 设:

96. $x_n = \dfrac{n^2}{2^n}$.　**97.** $x_n = \dfrac{\sqrt{n}}{100+n}$.　**98.** $x_n = \dfrac{1000^n}{n!}$.

求数列 x_n $(n=1,2,\cdots)$ 的最小项, 设:

99. $x_n = n^2 - 9n - 100$.　**100.** $x_n = n + \dfrac{100}{n}$.

求数列 x_n $(n=1,2,\cdots)$ 的 $\inf x_n$, $\sup x_n$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ 及 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$, 设:

101. (a) $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$;　(b) $x_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \dfrac{3}{n}\right)$.

102. $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$.　**103.** $x_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

104. $x_n = 1 + 2\cdot(-1)^{n+1} + 3\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

105. $x_n = \dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$.　**106.** $x_n = (-1)^n n$.

107. $x_n = -n[2+(-1)^n]$.　**108.** $x_n = n^{(-1)^n}$.

109. $x_n = 1 + n\sin\dfrac{n\pi}{2}$.　**110.** $x_n = \dfrac{1}{n-10.2}$.

求 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ 及 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$, 设:

111. $x_n = \dfrac{n^2}{1+n^2}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$.　**112.** $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \cdot (-1)^n + \sin\dfrac{n\pi}{4}$.

113. $x_n = \dfrac{n}{n+1}\sin^2\dfrac{n\pi}{4}$.　**114.** $x_n = \sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}$.

115. $x_n = \cos^n\dfrac{2n\pi}{3}$.

求以下各数列的子列极限:

116. $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{7}{8}, \cdots, \dfrac{1}{2^n}, \dfrac{2^n-1}{2^n}, \cdots$.

117. $1, \dfrac{1}{2}, 1+\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, 1+\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, 1+\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \cdots, \dfrac{1}{n}, 1+\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}, \cdots, \dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n+1}, \cdots$.

118. $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{2}{4}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}, \cdots$.

119. $x_n = 3\left(1-\dfrac{1}{n}\right) + 2(-1)^n$.　**120.** $x_n = \dfrac{1}{2}[(a+b)+(-1)^n(a-b)]$.

121. 试举出以已知数

$$a_1, a_2, \cdots, a_p$$

作为子列极限的数列的例子.

122. 试举出数列的例子, 对此数列而言, 已知数列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

的所有各项皆为其子列极限. 所举数列还必有怎样的子列极限?

123. 举出数列的例子:

(a) 没有有限的子列极限;

(b) 有唯一有限的子列极限, 但不收敛;

(c) 有无穷多的子列极限;

(d) 以每一实数作为子列极限.

124. 证明: 数列 x_n 和 $y_n = x_n \sqrt[n]{n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 有相同的子列极限.

125. 证明: 从有界的数列 x_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 中, 永远可选出收敛的子数列 x_{p_n} $(n = 1, 2, \cdots)$.

126. 证明: 若数列 x_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 无界, 则存在子数列 x_{p_n}, 使得

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n} = \infty.$$

127. 设数列 x_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 收敛, 而数列 y_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 发散, 则能否断定关于数列 (a) $x_n + y_n$, (b) $x_n y_n$ 的收敛性? 举出适当的例子.

128. 设数列 x_n 和 y_n 发散 $(n = 1, 2, \cdots)$. 可否断定数列 (a) $x_n + y_n$, (b) $x_n y_n$ 也发散呢?

129. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, y_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 为任意数列. 能否断定

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0?$$

举出适当的例子.

130. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$, 是否由此可得出: 或 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, 或 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$? 考虑例子:

$$x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}, \quad y_n = \frac{1 - (-1)^n}{2} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

131. 证明[①]:

(a) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$;

(b) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$.

举出在上面关系式中严格不等式成立的例子.

132. 设 $x_n \geqslant 0$ 且 $y_n \geqslant 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 证明:

(a) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$;

(b) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$.

举出在这些关系式中严格不等式成立的例子.

133. 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 则对于任何数列 y_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 有:

(a) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$;

(b) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \quad (x_n \geqslant 0)$.

[①] 在习题 131—133 中, 假设极限之和或积皆有意义. —— 译注

134. 证明: 若对于某数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$, 无论数列 y_n $(n=1,2,\cdots)$ 如何选取, 以下两个等式中都至少有一个成立:

(a) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$;

(b) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_ny_n)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n\quad(x_n\geqslant 0)$,

则数列 x_n 收敛或发散于 $+\infty$[①].

135. 证明: 若 $x_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$ 及

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{x_n}=1,$$

则数列 x_n 是收敛的.

136. 证明: 若数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 有界, 且

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0,$$

则此数列的子列极限充满于下极限和上极限

$$l=\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n \quad 和 \quad L=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n$$

之间, 即区间 $[l,L]$ 中的任意一个数都是该数列的子列极限.

137. 设数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 满足条件

$$0\leqslant x_{m+n}\leqslant x_m+x_n\quad(m,n=1,2,\cdots),$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}$ 存在.

138. 证明: 若数列 x_n 收敛, 则算术平均值数列

$$\xi_n=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\quad(n=1,2,\cdots)$$

也收敛, 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

逆命题不成立, 举例说明.

139. 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=+\infty.$$

140. 证明: 若数列 x_n $(n=1,2,\cdots)$ 收敛且 $x_n>0$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

141. 证明: 若 $x_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n+1}{x_n}$ 存在, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

142. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\mathrm{e}.$$

143. 证明施托尔茨定理: 若

(a) $y_{n+1}>y_n$ $(n=1,2,\cdots)$;　　(b) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$;

---

① 此处的原文是: 则序列 x_n 收敛. —— 译注

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ 存在,

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

144. 求:

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{a^n}\ (a>1)$; (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lg\ n}{n}$.

145. 证明: 若 p 为正整数, 则

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}} = \dfrac{1}{p+1}$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p} - \dfrac{n}{p+1}\right) = \dfrac{1}{2}$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p+3^p+\cdots+(2n-1)^p}{n^{p+1}} = \dfrac{2^p}{p+1}$.

146. 证明: 数列

$$x_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n \quad (n=1,2,\cdots)$$

收敛.

因此有公式

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} = C+\ln n+\varepsilon_n,$$

式中 $C=0.577216\cdots$ 称为欧拉常数, 且当 $n\to\infty$ 时 $\varepsilon_n\to 0$.

147. 求

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right).$$

148. 数列 $x_n\ (n=1,2,\cdots)$ 由下列各式

$$x_1=a,\quad x_2=b,\quad x_n=\frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2} \quad (n=3,4,\cdots)$$

所确定, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

149. 设 $x_n (n=1,2,\cdots)$ 为由以下各式

$$x_0>0,\quad x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right) \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

所确定的数列. 求证

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$

150. 证明: 由下列各式

$$x_1=a,\quad y_1=b,\quad x_{n+1}=\sqrt{x_n y_n},\quad y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2},$$

确定的数列 x_n 和 $y_n\ (n=1,2,\cdots)$ 有共同的极限

$$\mu(a,b)=\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

(数 a 和 b 的算术几何平均值).

§3. 函数的概念

1. 函数的概念. 若对于集合 $X=\{x\}$ 中的每一个 x, 有一个确定的实数 $y\in Y=\{y\}$ 与之对应, 则变量 y 称为变量 x 在所给变化域 X 上的单值函数, 并记为 $y=f(x)$.

集合 X 称为函数 $f(x)$ 的*定义域或存在域*; Y 称为这个函数的*值域*. 在最简单的情形下, 集合 X 或为开区间 $]a,b[=(a,b):a<x<b$, 或为半开区间 $]a,b]=(a,b]:a<x\leqslant b$ 或 $[a,b[=[a,b):a\leqslant x<b$, 或为闭区间 (线段) $[a,b]:a\leqslant x\leqslant b$, 其中 a 和 b 为某实数或符号 $-\infty$ 或 $+\infty$ (在这种情形下, 没有等号).

若对于 X 中的每一个值 x 有若干个值 $y=f(x)$ 与之对应, 则 y 称为 x 的*多值函数*.

2. 反函数. 若把 x 理解为满足方程

$$f(x)=y$$

(式中 y 为属于函数 $f(x)$ 的值域 Y 的一个固定数值) 的任何数值, 则这个对应关系确定出在集合 Y 上的某函数

$$x=f^{-1}(y),$$

这个函数称为函数 $f(x)$ 的*反函数*. 它一般而言是多值函数. 若函数 $y=f(x)$ 是严格单调的, 即当 $x_2>x_1$ 时, $f(x_2)>f(x_1)$ (或相应地 $f(x_2)<f(x_1)$), 则反函数 $x=f^{-1}(y)$ 为单值而且严格单调的函数.

求下列函数的存在域:

151. $y=\dfrac{x^2}{1+x}$.

152. $y=\sqrt{3x-x^3}$.

153. $y=(x-2)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

154. (a) $y=\log(x^2-4)$; (b) $y=\log(x+2)+\log(x-2)$.

155. $y=\sqrt{\sin(\sqrt{x})}$.

156. $y=\sqrt{\cos x^2}$.

157. $y=\lg\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$.

158. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sin\pi x}$.

159. $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x}$.

160. $y=\arccos(2\sin x)$.

161. $y=\lg[\cos(\lg x)]$.

162. $y=(x+|x|)\sqrt{x\sin^2\pi x}$.

163. $y=\cot\pi x+\arccos(2^x)$.

164. $y=\arcsin(1-x)+\lg(\lg x)$.

165. (a) $y=(2x)!$; (b) $y=\log_2\log_3\log_4 x$;
(c) $y=\sqrt[4]{\lg\tan x}$; (d) $y=\sqrt{\sin 2x}+\sqrt{\sin 3x}$ $(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$.

求下列函数的存在域和值域:

166. $y=\sqrt{2+x-x^2}$.

167. $y=\lg(1-2\cos x)$.

168. $y=\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$.

169. $y=\arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$.

170. $y=(-1)^x$.

171. 在底 $AC=b$ 和高 $BD=h$ 的三角形 ABC 中 (图 1) 内接一个高 $NM=x$

的矩形 $KLMN$. 把矩形 $KLMN$ 的周长 P 及其面积 S 表示为 x 的函数.

作函数 $P = P(x)$ 及 $S = S(x)$ 的图像.

172. 在三角形 ABC 中, 边 $AB = 6\,\text{cm}$, $AC = 8\,\text{cm}$, 角 $BAC = x$. 把边 $BC = a$ 和面积 $ABC = S$ 表示为变量 x 的函数. 作函数 $a = a(x)$ 及 $S = S(x)$ 的图像.

173. 在等腰梯形 $ABCD$ 中 (图 2), 底 $AD = a, BC = b$ $(a > b)$, 高 $HB = h$, 引直线 $MN//BH$, MN 与顶点 A 相距 $AM = x$. 把图形 $ABNMA$ 的面积 S 表示为变量 x 的函数. 作函数 $S = S(x)$ 的图像.

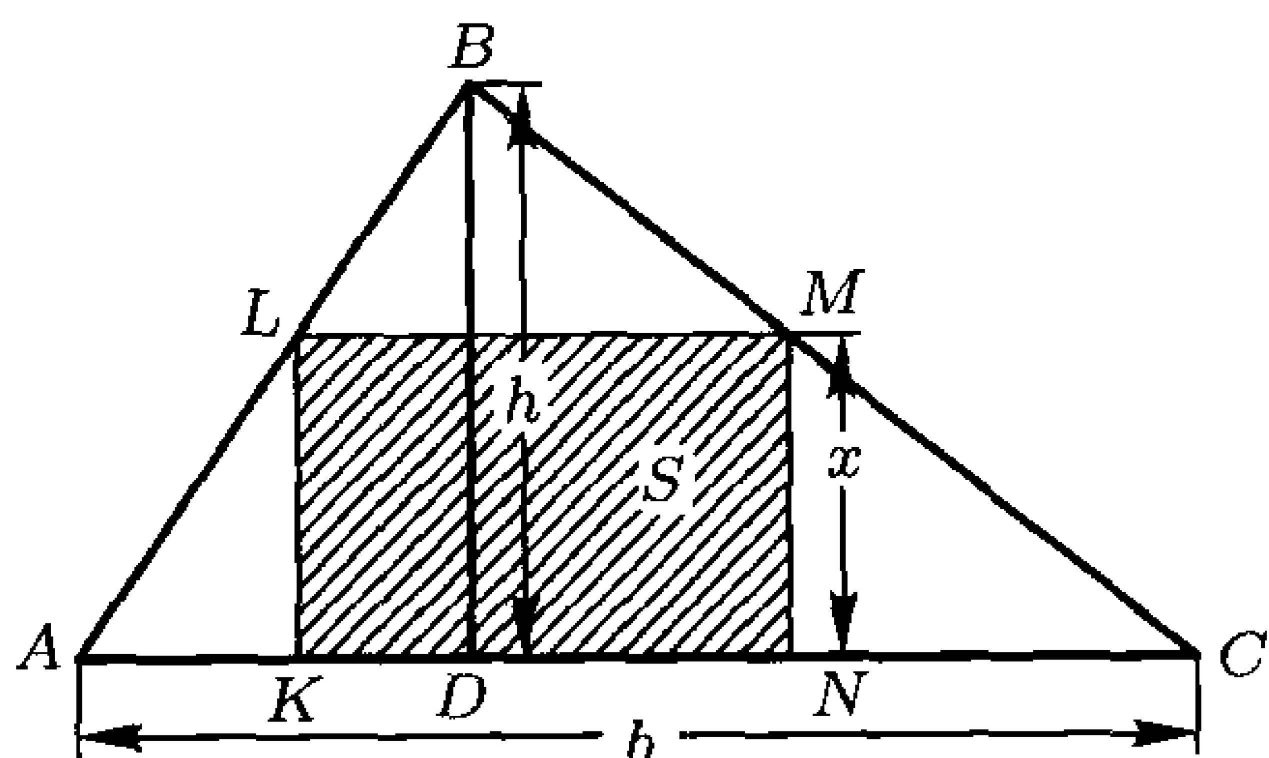


图 1

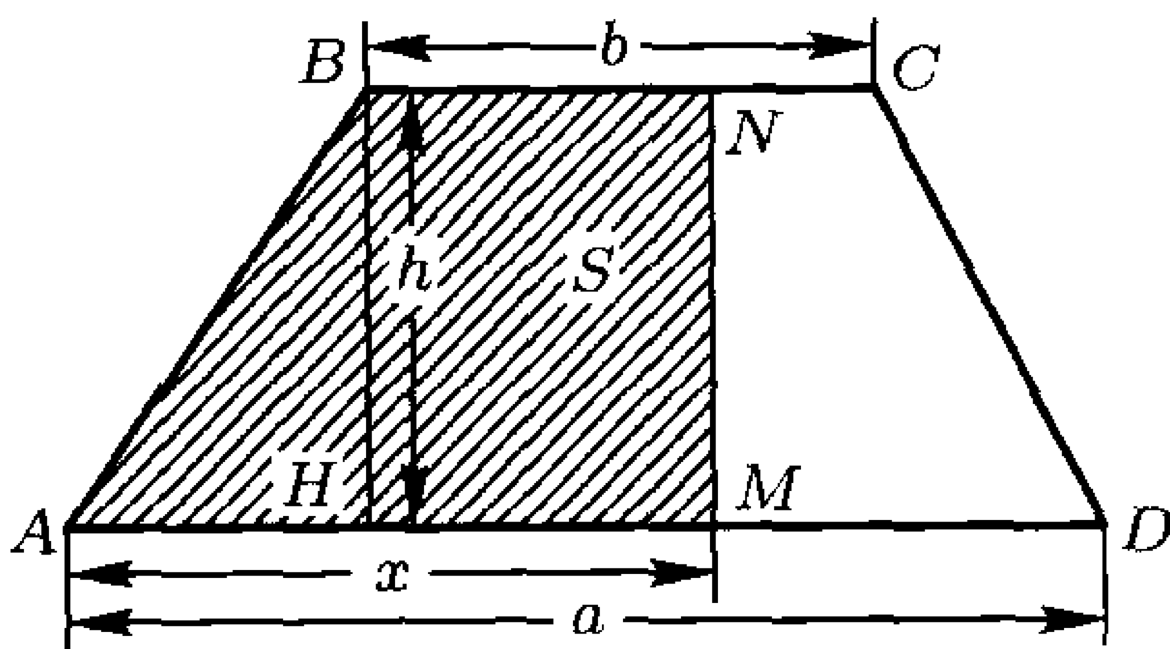


图 2

174. 有 2 g 质量均匀分布在 Ox 轴上的闭区间 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上, 另有两个质量为 1 g 的质点分别位于点 $x = 2$ 和 $x = 3$.

设 $m(x)$ 是区间 $(-\infty, x)$ 内的质量的值, 求函数 $m = m(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ 的解析表达式, 并作这个函数的图像.

175. 函数 $y = \operatorname{sgn} x$ 被定义为:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

作这个函数的图像. 证明:

$$|x| = x \operatorname{sgn} x.$$

176. 函数 $y = [x]$ (数 x 的整数部分) 用下法定义: 若 $x = n + r$, 式中 n 为整数且 $0 \leqslant r < 1$, 则

$$[x] = n.$$

作这个函数的图像.

177. 设

$$y = \pi(x) \quad (x \geqslant 0)$$

表示不超过数 x 的素数的数目, 作这个函数在 $0 \leqslant x \leqslant 20$ 时的图像.

下列函数 $y = f(x)$ 把集合 E_x 映射成怎样的集合 E_y?

178. $y = x^2, E_x = \{-1 \leqslant x \leqslant 2\}$. **179.** $y = \lg x, E_x = \{10 < x < 1000\}$.

180. $y = \frac{1}{\pi}\operatorname{arccot} x, E_x = \{-\infty < x < +\infty\}$.

181. $y = \cot\frac{\pi x}{4}, E_x = \{0 < |x| \leqslant 1\}$. **182.** $y = |x|, E_x = \{1 \leqslant |x| \leqslant 2\}$.

设变量 x 遍历区间 $0 < x < 1$, 试确定变量 y 所遍历的集合:

183. $y = a + (b - a)x$.

184. $y = \frac{1}{1 - x}$.

185. $y = \frac{x}{2x - 1}$.

186. $y = \sqrt{x - x^2}$.

187. $y = \cot \pi x$.

188. $y = x + [2x]$.

189. 设 $f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$, 求 $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$.

190. 设 $f(x) = \lg x^2$, 求 $f(-1)$, $f(-0.001)$, $f(100)$.

191. 设 $f(x) = 1 + [x]$, 求 $f(0.9)$, $f(0.99)$, $f(0.999)$, $f(1)$.

192. 设

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & -\infty < x \leqslant 0, \\ 2^x, & 0 < x < +\infty, \end{cases}$$

求 $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.

193. 设

$$f(x) = \frac{1 - x}{1 + x},$$

求 $f(0), f(-x), f(x + 1), f(x) + 1, f\left(\frac{1}{x}\right), \frac{1}{f(x)}$.

194. 设

(a) $f(x) = x - x^3$; (b) $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$;

(c) $f(x) = (x + |x|)(1 - x)$.

求满足以下各式的 x 值: (1) $f(x) = 0$; (2) $f(x) > 0$; (3) $f(x) < 0$.

195. 设

(a) $f(x) = ax + b$; (b) $f(x) = x^2$; (c) $f(x) = a^x$,

求 $\varphi(x) = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

196. 设 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 证明:

$$f(x + 3) - 3f(x + 2) + 3f(x + 1) - f(x) \equiv 0.$$

197. 若 $f(0) = -2, f(3) = 5$, 求线性函数

$$f(x) = ax + b.$$

$f(1)$ 及 $f(2)$ 等于什么 (线性插值法)?

198. 若 $f(-2) = 0, f(0) = 1, f(1) = 5$, 求二次有理函数:

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

$f(-1)$ 及 $f(0.5)$ 等于什么 (二次插值法)?

199. 设 $f(-1) = 0, f(0) = 2, f(1) = -3, f(2) = 5$. 求三次有理函数:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

200. 设 $f(0) = 15, f(2) = 30, f(4) = 90$. 求形为

$$f(x) = a + bc^x$$

的函数.

201. 证明: 对于线性函数

$$f(x) = ax + b,$$

若自变量的值 $x = x_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 组成等差数列, 则对应的函数值 $y_n = f(x_n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 也组成等差数列.

202. 证明: 对于指数函数

$$f(x) = a^x \quad (a > 0),$$

若自变量的值 $x = x_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 组成等差数列, 则对应的函数值 $y_n = f(x_n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 组成等比数列.

203. 设当 $0 < u < 1$ 时函数 $f(u)$ 有定义. 求下列函数的定义域:

(a) $f(\sin x)$; (b) $f(\ln x)$; (c) $f\left(\dfrac{[x]}{x}\right)$.

204. 设

$$f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x}) \quad (a > 0).$$

证明:

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y).$$

205. 设 $f(x) + f(y) = f(z)$. 求出 z, 若

(a) $f(x) = ax$; (b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$;

(c) $f(x) = \arctan x(|x| < 1)$; (d) $f(x) = \log \dfrac{1 + x}{1 - x}$.

求 $\varphi[\varphi(x)]$, $\psi[\psi(x)]$, $\varphi[\psi(x)]$ 及 $\psi[\varphi(x)]$, 设

206. $\varphi(x) = x^2$ 及 $\psi(x) = 2^x$. **207.** $\varphi(x) = \operatorname{sgn} x$ 及 $\psi(x) = \dfrac{1}{x}$.

208. $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ x, & x > 0. \end{cases}$ 及 $\psi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ -x^2, & x > 0. \end{cases}$

209. 设

$$f(x) = \frac{1}{1 - x},$$

求 $f[f(x)], f\{f[f(x)]\}$.

210. 设

$$f_n(x) = \underbrace{f(f(\cdots f(x))),}_{n\text{ 次}}$$

若

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}},$$

求 $f_n(x)$.

211. 设 $f(x+1)=x^2-3x+2$, 求 $f(x)$.

212. 设

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}\quad(|x|\geqslant 2),$$

求 $f(x)$.

213.1. 设

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}\quad(x>0),$$

求 $f(x)$.

213.2. 设

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right)=x^2,$$

求 $f(x)$.

证明: 下列各函数在所给区间内是单调增函数:

214. $f(x)=x^2\ (0\leqslant x<+\infty)$.

215. $f(x)=\sin x\ \left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

216. $f(x)=\tan x\ \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$.

217. $f(x)=2x+\sin x\ (-\infty<x<+\infty)$.

证明: 下列各函数在所给区间内是单调减函数:

218. $f(x)=x^2\ (-\infty<x\leqslant 0)$.

219. $f(x)=\cos x\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$.

220. $f(x)=\cot x\ (0<x<\pi)$.

221. 研究下列函数的单调性:

(a) $f(x)=ax+b$; (b) $f(x)=ax^2+bx+c$; (c) $f(x)=x^3$;

(d) $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$; (e) $f(x)=a^x\ (a>0)$.

222. 不等式能否逐项取对数?

223. 设 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 及 $f(x)$ 为单调增函数. 证明: 若

$$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x),$$

则

$$\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant\psi[\psi(x)].$$

求反函数 $x=\varphi(y)$ 和它的存在域, 若:

224. $y=2x+3\quad(-\infty<x<+\infty)$.

225. $y=x^2$; (a) $(-\infty<x\leqslant 0)$; (b) $(0\leqslant x<+\infty)$.

226. $y=\dfrac{1-x}{1+x}\quad(x\neq -1)$.

227. $y=\sqrt{1-x^2}$; (a) $(-1\leqslant x\leqslant 0)$; (b) $(0\leqslant x\leqslant 1)$.

228. $y=\sinh x$, 式中 $\sinh x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})\quad(-\infty<x<+\infty)$.

229. $y=\tanh x$, 其中 $\tanh x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\quad(-\infty<x<+\infty)$.

230. $y = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1, \\ x^2, & 1 \leqslant x \leqslant 4, \\ 2^x, & 4 < x < +\infty. \end{cases}$

231. 设函数 $f(x)$ 定义于对称区间 $(-l,l)$, 若

$$f(-x) \equiv f(x),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数; 若

$$f(-x) \equiv -f(x),$$

则称 $f(x)$ 为奇函数.

确定下列函数中哪些是偶函数, 哪些是奇函数:

(a) $f(x) = 3x - x^3$;

(b) $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$;

(c) $f(x) = a^x + a^{-x} \quad (a > 0)$;

(d) $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$;

(e) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

232. 证明: 定义于对称区间 $(-l,l)$ 的任何函数 $f(x)$ 可以表示为偶函数与奇函数之和的形式.

233. 若存在数 $T > 0$ (函数的周期——在广义的意义上!), 使定义于集合 E 的函数 $f(x)$ 满足等式

$$f(x \pm T) = f(x) \quad (x \in E),$$

则函数 $f(x)$ 称为周期函数.

说明下列函数中哪些是周期函数, 并求它们的最小周期:

(a) $f(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$;

(b) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$;

(c) $f(x) = 2\tan\frac{x}{2} - 3\tan\frac{x}{3}$;

(d) $f(x) = \sin^2 x$;

(e) $f(x) = \sin x^2$;

(f) $f(x) = \sqrt{\tan x}$;

(g) $f(x) = \tan\sqrt{x}$;

(h) $f(x) = \sin x + \sin\left(x\sqrt{2}\right)$.

234. 证明: 对于狄利克雷函数

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}, \end{cases}$$

任何有理数皆为其周期.

235.1. 证明: 定义于共同的集合且周期可公度的两个周期函数之和及其乘积也是周期函数.

235.2. 若

$$f(x+T) \equiv -f(x) \quad (T>0),$$

则函数 $f(x)$ 称为反周期函数. 证明: 此函数是以 $2T$ 为周期的函数.

236. 证明: 若函数 $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ 满足等式 $f(x+T)=kf(x)$, 式中 k 和 T 为正的常数, 则 $f(x)=a^x\varphi(x)$, 式中 a 为常数, 而 $\varphi(x)$ 为以 T 为周期的函数.

§4. 函数的图像表示法

1. 要作函数 $y=f(x)$ 的图像, 可按以下方式进行:

(1) 确定函数的存在域 $X=\{x\}$;

(2) 从 X 中选出充分密集的自变量值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 与相应函数值组成对应数值表

$$y_i = f(x_i) \quad (i=1,2,\cdots,n);$$

(3) 在坐标平面 Oxy 上绘出一系列的点 $M_i(x_i, y_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 并用线把它们连接起来, 连线时应考虑中间各点的位置对曲线形状的影响.

2. 为了得到函数的正确图像, 应当研究这个函数的一般性质.

首先必须:

(1) 解方程 $f(x)=0$, 求出函数图像与 Ox 轴的交点 (函数的零点);

(2) 确定函数为正或为负时自变量的变化域;

(3) 若有可能, 说明函数的单调 (增或减) 区间;

(4) 研究当自变量无限趋于函数存在域边界点时函数的情况.

这一节里, 要假定读者已经知道最简单的初等函数的性质, 如幂函数、指数函数、三角函数等.

利用这些性质, 不用作大量的计算工作, 立即可以画出许多函数的草图, 其他的图像有时就是这些最简单图像的组合 (和或乘积等等).

237. 作出线性齐次函数 $y=ax$ 当 $a=0, \dfrac{1}{2}, 1, 2, -1$ 时的图像.

238. 作出线性函数 $y=x+b$ 当 $b=0,1,2,-1$ 时的图像.

239. 作出线性函数的图像:

(a) $y=2x+3$; (b) $y=2-0.1x$; (c) $y=-\dfrac{x}{2}-1$.

240. 铁的线膨胀系数 $\alpha = 1.2\times10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$. 在适当的尺度下作出函数

$$l=f(T) \quad (233\,\mathrm{K} \leqslant T \leqslant 373\,\mathrm{K})$$

的图像, 其中 T 表示温度, l 表示当温度为 T 时细长铁棒的长, 已知当 $T=273\,\mathrm{K}$ 时, $l=100\,\mathrm{cm}$.

241. 二质点沿数轴运动, 第一个质点在初始时刻 $t=0$ 时位于坐标原点左方 $20\,\mathrm{m}$ 处, 其速度为 $v_1=10\,\mathrm{m/s}$; 第二个质点在 $t=0$ 时位于原点 O 右方 $30\,\mathrm{m}$ 处, 其速度为 $v_2=-20\,\mathrm{m/s}$. 作出此二点运动方程的图像并求它们相遇的时刻和位置.

242. 作出二次有理函数的图像 (抛物线):

(a) $y=ax^2$, 当 $a=1, \dfrac{1}{2}, 2, -1$;

(b) $y=(x-x_0)^2$, 当 $x_0=0,1,2,-1$;

(c) $y = x^2 + c$, 当 $c = 0, 1, 2, -1$.

243. 把二次三项式 $y = ax^2 + bx + c$ 化为 $y = y_0 + a(x - x_0)^2$ 的形式, 再作出它的图像. 研究例子:

(a) $y = 8x - 2x^2$; (b) $y = x^2 - 3x + 2$; (c) $y = -x^2 + 2x - 1$; (d) $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

244. 质点以初速度 $v_0 = 600\,\mathrm{m/s}$ 沿与水平面成角 $\alpha = 45°$ 的方向射出. 作出运动轨迹的图像并求最大上升高度及射程 (取 $g \approx 10\,\mathrm{m/s^2}$, 不计空气阻力).

作出下列高于二次的有理函数的图像:

245. $y = x^3 + 1$.

246. $y = (1 - x^2)\,(2 + x)$.

247. $y = x^2 - x^4$.

248. $y = x(a - x)^2(a + x)^3$ $(a > 0)$.

作出下列分式线性函数的图像 (双曲线):

249. $y = \frac{1}{x}$.

250. $y = \frac{1 - x}{1 + x}$.

251. 把分式线性函数

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (ad - bc \neq 0, c \neq 0)$$

化为以下形式:

$$y = y_0 + \frac{m}{x - x_0},$$

再作出它的图像.

研究例子

$$y = \frac{3x + 2}{2x - 3}.$$

252. 设气体当压强 $p_0 = 1\,\mathrm{Pa}$ 时占有体积 $V_0 = 12\,\mathrm{m^3}$. 若气体的温度保持不变, 作出气体体积 V 对压强 p 的依赖关系的图像 (玻意耳–马略特定律).

作下列分式有理函数的图像:

253. $y = x + \frac{1}{x}$.

254. $y = x^2 + \frac{1}{x}$ (牛顿三叉线).

255. $y = x + \frac{1}{x^2}$.

256. $y = \frac{1}{1 + x^2}$ (箕舌线).

257. $y = \frac{2x}{1 + x^2}$ (牛顿蛇形线).

258. $y = \frac{1}{1 - x^2}$.

259. $y = \frac{x}{1 - x^2}$.

260. $y = \frac{1}{1 + x} - \frac{2}{x} + \frac{1}{1 - x}$.

261. $y = \frac{1}{1 + x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{1 - x}$.

262. $y = \frac{(x + 1)(x - 2)}{(x - 1)(x + 2)}$.

263. 把函数

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a_1x + b_1} \quad (a_1 \neq 0)$$

化为以下形式:

$$y = kx + m + \frac{n}{x - x_0},$$

然后作出它的草图.

研究例子

$$y=\frac{x^2-4x+3}{x+1}$$

264. 一质点与引力中心相距 x, 质点所受引力的大小为 F, 并且当 $x=1\,\text{m}$ 时 $F=10\,\text{N}$. 作出引力 F 的图像 (牛顿定律).

265. 根据范德瓦耳斯定律, 当温度不变时, 真实气体的体积 V 与压强 p 以关系式

$$\left(p+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=c$$

相联系. 若 $a=2, b=0.1$ 及 $c=10$, 作出函数 $p=p(V)$ 的图像.

作下列无理函数的图像:

266. $y=\pm\sqrt{-x-2}$ (抛物线).

267. $y=\pm x\sqrt{x}$ (半三次抛物线).

268. $y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{100-x^2}$ (椭圆).

269. $y=\pm\sqrt{x^2-1}$ (双曲线).

270. $y=\pm\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

271. $y=\pm x\sqrt{100-x^2}$.

272. $y=\pm x\sqrt{\frac{x}{10-x}}$ (蔓叶线).

273. $y=\pm\sqrt{(x^2-1)(9-x^2)}$.

274. 作幂函数 $y=x^n$ 当 (a) $n=1,3,5$; (b) $n=2,4,6$ 时的图像.

275. 作幂函数 $y=x^n$ 当 (a) $n=-1,-3$; (b) $n=-2,-4$ 时的图像.

276. 作根式 $y=\sqrt[m]{x}$ 当 (a) $m=2,4$; (b) $m=3,5$ 时的图像.

277. 设:

(a) $m=2, k=1$; (b) $m=2, k=3$; (c) $m=3, k=1$;
(d) $m=3, k=2$; (e) $m=3, k=4$; (f) $m=4, k=2$;
(g) $m=4, k=3$.

作根式 $y=\sqrt[m]{x^k}$ 的图像.

278. 作指数函数 $y=a^x$ 当 $a=\frac{1}{2},1,2,\mathrm{e},10$ 时的图像.

279. 作复合指数函数 $y=\mathrm{e}^{y_1}$ 的图像, 设:

(a) $y_1=x^2$; (b) $y_1=-x^2$; (c) $y_1=\frac{1}{x}$;
(d) $y_1=\frac{1}{x^2}$; (e) $y_1=-\frac{1}{x^2}$; (f) $y_1=\frac{2x}{1-x^2}$.

280. 作对数函数 $y=\log_a x$ 当 $a=\frac{1}{2},2,\mathrm{e},10$ 时的图像.

281. 作下列函数的图像:

(a) $y=\ln(-x)$; (b) $y=-\ln(x)$.

282. 设

(a) $y_1=1+x^2$; (b) $y_1=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$;

(c) $y_1 = \frac{1-x}{1+x}$; (d) $y_1 = \frac{1}{x^2}$; (e) $y_1 = 1 + e^x$.

作出对数复合函数 $y = \ln y_1$ 的图像.

283. 作函数 $y = \log_x 2$ 的图像.

284. 作函数 $y = A\sin x$ 当 $A = 1, 10, -2$ 时的图像.

285. 作函数 $y = \sin(x - x_0)$ 在 $x_0 = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$ 时的图像.

286. 作函数 $y = \sin nx$ 的图像. 设 $n = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$.

287. 把函数 $y = a\cos x + b\sin x$ 化为以下形式 $y = A\sin(x - x_0)$, 再作它的图像. 研究例子: $y = 6\cos x + 8\sin x$.

作下列三角函数的图像:

288. $y = \cos x$.

289. $y = \tan x$.

290. $y = \cot x$.

291. $y = \sec x$.

292. $y = \csc x$.

293. $y = \sin^2 x$.

294. $y = \sin^3 x$.

295. $y = \cot^2 x$.

296. $y = \sin x \cdot \sin 3x$.

297. $y = \pm\sqrt{\cos x}$.

作下列函数的图像:

298. $y = \sin x^2$.

299. $y = \sin \frac{1}{x}$.

300. (a) $y = x\cos \frac{\pi}{x}$; (b) $y = \sin x \cdot \sin \frac{1}{x}$.

301. (a) $y = \tan \frac{\pi}{x}$; (b) $y = \sec \frac{1}{x}$.

302. $y = x\left(2 + \sin \frac{1}{x}\right)$.

303. $y = \pm\sqrt{1 - x^2}\sin \frac{\pi}{x}$.

304. $y = \frac{\sin x}{x}$.

305. $y = e^x \cos x$.

306. $y = \pm 2^{-x}\sqrt{\sin \pi x}$.

307. $y = \frac{\cos x}{1 + x^2}$.

308. $y = \ln(\cos x)$.

309. $y = \cos(\ln x)$.

310. $y = e^{\frac{1}{\sin x}}$.

作下列反三角函数的图像:

311. $y = \arcsin x$.

312. $y = \arccos x$.

313. $y = \arctan x$.

314. $y = \operatorname{arccot} x$.

315. $y = \arcsin \frac{1}{x}$.

316. $y = \arccos \frac{1}{x}$.

317. $y = \arctan \frac{1}{x}$.

318. $y = \arcsin(\sin x)$.

319. $y = \arcsin(\cos x)$.

320. $y = \arccos(\cos x)$.

321. $y=\arctan(\tan x)$.

322. $y=\arcsin(2\sin x)$.

323. 设:

(a) $y_1=1-\dfrac{x}{2}$;

(b) $y_1=\dfrac{2x}{1+x^2}$;

(c) $y_1=\dfrac{1-x}{1+x}$;

(d) $y_1=\mathrm{e}^x$.

作函数 $y=\arcsin y_1$ 的图像.

324.1. 设:

(a) $y_1=x^2$;

(b) $y_1=\dfrac{1}{x^2}$;

(c) $y_1=\ln x$;

(d) $y_1=\dfrac{1}{\sin x}$.

作函数 $y\arctan y_1$ 的图像.

324.2. 作下列函数的图像:

(a) $y=x^3-3x+2$;

(b) $y=\dfrac{x^3}{(1-x)(1+x)^2}$;

(c) $y=\dfrac{x^2}{|x|-1}$;

(d) $y=\sqrt{x(1-x^2)}$;

(e) $y=3\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$;

(f) $y=\cot\dfrac{\pi x}{1+x^2}$;

(g) $y=\dfrac{1}{1-2^{\frac{x}{1-x}}}$;

(h) $y=\lg(x^2-3x+2)$;

(i) $y=\arcsin\left(\dfrac{3}{2}-\sin x\right)$;

(j) $y=\arctan\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}\right)$;

(k) $y=\log_{\cos x}\sin x$;

(l) $y=(\sin x)^{\cot x}$.

325. 已知函数 $y=f(x)$ 的图像, 作下列各函数的图像:

(a) $y=-f(x)$;

(b) $y=f(-x)$;

(c) $y=-f(-x)$;

(d) $y=f(x-x_0)$;

(e) $y=y_0+f(x-x_0)$;

(f) $y=f(2x)$;

(g) $y=f(kx+b)\ (k\neq 0)$.

326. 设

$$f(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

作函数

$$y=\frac{1}{2}(f(x-t)+f(x+t))$$

当 $t=0,t=1$ 及 $t=2$ 时的图像.

327. 作函数的图像:

(a) $y=2+\sqrt{1-x}$;

(b) $y=1-\mathrm{e}^{-x}$;

(c) $y=\ln(1+x)$;

(d) $y=-\arcsin(1+x)$;

(e) $y = 3 + 2\cos 3x$.

328. 已知函数 $y = f(x)$ 的图像, 作下列函数的图像:

(a) $y = |f(x)|$;
(b) $y = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x))$;
(c) $y = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x))$;
(d) $y = f^2(x)$;
(e) $y = \sqrt{f(x)}$;
(f) $y = \ln f(x)$;
(g) $y = f(f(x))$;
(h) $y = \operatorname{sgn} f(x)$;
(i) $y = [f(x)]$.

329.1. 设

$$f(x) = (x-a)(b-x) \quad (a < b),$$

作下列函数的图像:

(a) $y = f(x)$;
(b) $y = f^2(x)$;
(c) $y = \frac{1}{f(x)}$;
(d) $y = \sqrt{f(x)}$;
(e) $y = \mathrm{e}^{f(x)}$;
(f) $y = \lg f(x)$;
(g) $y = \operatorname{arccot} f(x)$.

329.2. 若 (1) $f(x) = x^2$; (2) $f(x) = x^3$, 作如下函数的图像:

(a) $y = \arcsin(\sin f(x))$;
(b) $y = \arcsin(\cos f(x))$;
(c) $y = \arccos(\sin f(x))$;
(d) $y = \arccos(\cos f(x))$;
(e) $y = \arctan(\tan f(x))$.

330. 已知函数 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 的图像, 作下列函数的图像:

(a) $y = f(x) + g(x)$; (b) $y = f(x)g(x)$; (c) $y = f(g(x))$.

利用图像的加法, 作下列函数的图像:

331. $y = 1 + x + \mathrm{e}^x$.

332. $y = (x+1)^{-2} + (x-1)^{-2}$.

333. $y = x + \sin x$.

334. $y = x + \arctan x$.

335. $y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x$.

336. $y = \sin x - \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x$.

337. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

338. $y = |1-x| + |1+x|$.

339. $y = |1-x| - |1+x|$.

340. 作双曲函数的图像:

(a) $y = \cosh x$, 式中 $\cosh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$;

(b) $y = \sinh x$, 式中 $\sinh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$;

(c) $y = \tanh x$, 式中 $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$.

利用图像的乘法, 作下列函数的图像:

341. $y = x\sin x$.

342. $y = x\cos x$.

343. $y = x^2 \sin^2 x$.

344. $y = \dfrac{\sin x}{1 + x^2}$.

345. $y = \mathrm{e}^{-x^2} \cos 2x$.

346. $y = x \operatorname{sgn}(\sin x)$.

347. $y = [x] |\sin \pi x|$.

348. $y = \cos x \cdot \operatorname{sgn}(\sin \mathrm{x})$.

349. 设

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

作函数 $y = f(x) f(a - x)$ 当 (a) $a = 0$; (b) $a = 1$; (c) $a = 2$ 时的图像.

350. 作函数 $y = x + \sqrt{x} \operatorname{sgn}(\sin \pi x)$ 的图像.

作函数 $y = \dfrac{1}{f(x)}$ 的图像, 设:

351. $f(x) = x^2(1 - x^2)$.

352. $f(x) = x(1 - x)^2$.

353. $f(x) = \sin^2 x$.

354. $f(x) = \ln x$.

355. $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x$.

356. 设

$$f(u) = \begin{cases} -1, & -\infty < u < -1, \\ u, & -1 \leqslant u \leqslant 1, \\ 1, & 1 < u < +\infty. \end{cases}$$

作复合函数 $y = f(u)$ 的图像, 其中 $u = 2 \sin x$.

357. 设

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(x + |x|) \quad 和 \quad \psi(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ x^2, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

作下列函数的图像:

(a) $y = \varphi(\varphi(x))$;

(b) $y = \varphi(\psi(x))$;

(c) $y = \psi(\varphi(x))$;

(d) $y = \psi(\psi(x))$.

358. 设

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \quad 及 \quad \psi(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & |x| \leqslant 2, \\ 2, & |x| > 2. \end{cases}$$

作函数

(a) $y = \varphi(\varphi(x))$;

(b) $y = \varphi(\psi(x))$;

(c) $y = \psi(\varphi(x))$;

(d) $y = \psi(\psi(x))$.

的图像.

359. 把定义于正数区域 $x > 0$ 的函数 $f(x)$ 延拓到负数区域 $x < 0$, 使所得的函数为: (1) 偶函数; (2) 奇函数, 并分别作出所得函数的图像:

(a) $f(x) = 1 - x$;

(b) $f(x) = 2x - x^2$;

(c) $f(x) = \sqrt{x}$;

(d) $f(x) = \sin x$;

(e) $f(x) = \mathrm{e}^x$;

(f) $f(x) = \ln x$.

360. 确定下列函数的图像在竖直方向上的对称轴:

(a) $y = ax^2 + bx + c$;　　(b) $y = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(1-x)^2}$;

(c) $y = \sqrt{a+x} + \sqrt{b-x}\ (0 < a < b)$;　　(d) $y = a + b\cos x$.

361. 确定下列函数的图像的对称中心:

(a) $y = ax + b$;　　(b) $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$;

(c) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$;　　(d) $y = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-3}$;

(e) $y = 1 + \sqrt[3]{x-2}$.

362. 作周期函数的图像:

(a) $y = |\sin x|$;　　(b) $y = \operatorname{sgn}\cos x$;

(c) $y = f(x)$, 其中 $f(x) = A\dfrac{x}{l}\left(2 - \dfrac{x}{l}\right)$, 假设 $0 \leqslant x \leqslant 2l$ 和 $f(x+2l) \equiv f(x)$;

(d) $y = [x] - 2\left[\dfrac{x}{2}\right]$;

(e) $y = (x)$,

此处 (x) 为从数 x 到最近的整数的距离.

363. 证明: 若函数 $y = f(x)\ (-\infty < x < +\infty)$ 的图像关于竖直方向上的两条直线 $x = a$ 和 $x = b\ (b > a)$ 对称, 则函数 $f(x)$ 为周期函数.

364. 证明: 若函数 $y = f(x)\ (-\infty < x < +\infty)$ 的图像关于两点 $A(a, y_0)$ 和 $B(b, y_1)\ (b > a)$ 对称, 则函数 $f(x)$ 是线性函数与周期函数的和. 特别是, 若 $y_0 = y_1$, 则函数 $f(x)$ 是周期函数.

365. 证明: 若函数 $y = f(x)\ (-\infty < x < +\infty)$ 的图像关于点 $A(a, y_0)$ 和直线 $x = b\ (b \neq a)$ 对称, 则函数 $f(x)$ 为周期函数.

366. 设 $f(x+1) = 2f(x)$, 且当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时 $f(x) = x(1-x)$, 作函数 $y = f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ 的图像.

367. 设 $f(x+\pi) = f(x) + \sin x$, 且当 $0 \leqslant x \leqslant \pi$ 时 $f(x) = 0$. 作函数 $y = f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ 的图像.

368. 作函数 $y = y(x)$ 的图像, 设:

(a) $x = y - y^3$;　　(b) $x = \dfrac{1-y}{1+y^2}$;

(c) $x = y - \ln y$;　　(d) $x^2 = \sin y$.

369. 作出下列用参数形式表示的函数的图像:

(a) $x = 1 - t, y = 1 - t^2$;　　(b) $x = t + \dfrac{1}{t}, y = t + \dfrac{1}{t^2}$;

(c) $x = 10\cos t, y = \sin t$ (椭圆);　　(d) $x = \cosh t, y = \sinh t$ (双曲线);

(e) $x = 5\cos^2 t, y = 3\sin^2 t$;

(f) $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t)$ (摆线);

(g) $x = \sqrt[t+1]{t}, y = \sqrt[t]{t+1}\ (t > 0)$.

370.1. 作下列隐函数的图像:

(a) $x^2 - xy + y^2 = 1$ (椭圆);

(b) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ (笛卡儿叶形线);

(c) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ (抛物线);

(d) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$ (星形线);

(e) $\sin x = \sin y$;

(f) $\cos(\pi x^2) = \cos(\pi y)$;

(g) $x^y = y^x\ (x > 0, y > 0)$;

(h) $x - |x| = y - |y|$.

370.2. 作下列隐函数的图像:

(a) $\min(x, y) = 1$;

(b) $\max(x, y) = 1$;

(c) $\max(|x|, |y|) = 1$;

(d) $\min(x^2, y) = 1$.

371.1. 在极坐标系 (r, φ) 中作出下列函数 $r = r(\varphi)$ 的图像:

(a) $r = \varphi$ (阿基米德螺线);

(b) $r = \dfrac{\pi}{\varphi}$ (双曲螺线);

(c) $r = \dfrac{\varphi}{\varphi + 1}\ (0 \leqslant \varphi < +\infty)$;

(d) $r = 2^{\frac{\varphi}{2\pi}}$ (对数螺线);

(e) $r = 2(1 + \cos\varphi)$ (心脏线);

(f) $r = 10\sin 3\varphi$ (三瓣玫瑰线);

(g) $r^2 = 36\cos 2\varphi$ (伯努利双纽线);

(h) $\varphi = \dfrac{r}{r - 1}\ (r > 1)$;

(i) $\varphi = 2\pi\sin r$.

371.2. 在极坐标系 (r, φ) 中作出下列函数的图像:

(a) $\varphi = 4r - r^2$;　(b) $\varphi = \dfrac{12r}{1 + r^2}$;　(c) $r^2 + \varphi^2 = 100$.

371.3. 在极坐标系 (r, φ) 中作出以参数方程表示的函数的图像 ($t \geqslant 0$ 为参数):

(a) $\begin{cases} \varphi = t\cos^2 t, \\ r = t\sin^2 t; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \varphi = 1 - 2^{-t}\sin\dfrac{\pi t}{2}, \\ r = 1 - 2^{-t}\cos\dfrac{\pi t}{2}. \end{cases}$

372. 利用函数 $y = x^3 - 3x + 1$ 的图像近似地求解方程 $x^3 - 3x + 1 = 0$.

用图解法解下列方程:

373. $x^3 - 4x - 1 = 0$.

374. $x^4 - 4x + 1 = 0$.

375. $x = 2^{-x}$.

376. $\lg x = 0.1x$.

377. $10^x = x^2$.

378. $\tan x = x(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

用图解法解下列方程组:

379. $\begin{cases} x + y^2 = 1, \\ 16x^2 + y = 4. \end{cases}$

380. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ y = 10(x^2 - x - 2). \end{cases}$

§5. 函数的极限

1. 函数的有界性. 设存在某两数 m 和 M, 使得

$$\text{当 } x \in (a, b) \text{ 时,}\quad m < f(x) < M,$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上为有界的. 数 $m_0 = \inf\limits_{x\in(a,b)}\{f(x)\} = \max m$ 称为函数 $f(x)$ 在区间(a,b) 上的*下确界*, 而数 $M_0 = \sup\limits_{x\in(a,b)}\{f(x)\} = \min M$ 称为函数$f(x)$ 在区间(a,b) 上的*上确界*. 差 $M_0 - m_0$ 称为函数在区间 (a,b) 上的*振幅*.

2. 函数在某一点的极限. 设函数 $f(x)$ 定义在集合 $X=\{x\}$ 上, 且该集合以 a 为极限点. 记号

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \tag{1}$$

表示, 对于任一个数 $\varepsilon>0$, 都存在数 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得对于满足条件 $0<|x-a|<\delta$ 并使 $f(x)$ 有意义的一切 x, 下列不等式成立:

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

函数的极限 (1) 存在的充分必要条件是: 对于每一个数列 $x_n\to a$ $(n=1,2,\cdots)$, 下面的等式都成立

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

有两个著名的极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$; (2) $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

柯西准则. 函数 $f(x)$ 在 a 点的极限存在的充分必要条件为: 对于每一个 $\varepsilon>0$, 都存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得只要

$$0<|x'-a|<\delta \quad 且 \quad 0<|x''-a|<\delta,$$

就有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$$

其中 x' 和 x'' 属于函数 $f(x)$ 的定义域.

3. 单侧极限. 若对于任何 $\varepsilon>0$ 都存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得

$$当\ 0<a-x<\delta(\varepsilon)\ 时, \quad 有\ |A'-f(x)|<\varepsilon,$$

则称数 A' 为函数 $f(x)$ 在 a 点的*左极限*:

$$A'=\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a-0).$$

类似地, 若

$$当\ 0<x-a<\delta(\varepsilon)\ 时, \quad 有\ |A''-f(x)|<\varepsilon,$$

则称数 A'' 为函数$f(x)$ 在 a 点的*右极限*:

$$A''=\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a+0).$$

函数 $f(x)$ 在 a 点的极限存在的充分必要条件为: $f(a-0)=f(a+0)$.

4. 无穷极限. 约定记号

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$$

表示对于任何的 $E>0$, 只要

$$0<|x-a|<\delta(E), \quad 则有\ |f(x)|>E.$$

5. 子列极限. 若对于某数列 $x_n\to a$ 有等式

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=B,$$

则称数 (或符号 ∞) B 为函数 $f(x)$ 在 a 点的*子列极限* (有限的或无穷的).

这些子列极限中最小的和最大的用

$$\varliminf_{x\to a} f(x) \quad 和 \quad \varlimsup_{x\to a} f(x)$$

来表示, 分别称为函数 $f(x)$ 在 a 点的*下极限*和*上极限*.

等式

$$\underline{\lim_{x\to a}} f(x) = \overline{\lim_{x\to a}} f(x)$$

为函数 $f(x)$ 在 a 点有极限 (有限的或无穷的) 的充分必要条件.

381. 证明: 函数

$$f(x)=\begin{cases} n, & x=\dfrac{m}{n}\ (m\ 和\ n\ 为互素的整数,\ 且\ n>0),\\ 0, & x\ 为无理数,\end{cases}$$

在每一点 x 为有限的, 但并非有界的 (即在这点的任何邻域中是无界的).

382. 若函数 $f(x)$ 在: (a) 开区间, (b) 闭区间内的每一点有定义且局部有界, 则此函数在该开区间或闭区间内是否为有界的? 举出适当的例子.

383. 证明: 函数

$$f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}$$

在区间 $-\infty<x<+\infty$ 中是有界的.

384. 证明: 函数

$$f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$$

在点 $x=0$ 的任何邻域内是无界的, 但在 $x\to 0$ 时不成为无穷大.

385. 研究函数 $f(x)=\ln x\cdot\sin^2\dfrac{\pi}{x}$ 在区间 $0<x<\varepsilon$ 内的有界性.

386. 证明: 函数

$$f(x)=\frac{x}{1+x}$$

在区域 $0\leqslant x<+\infty$ 内有下确界 $m=0$ 和上确界 $M=1$.

387. 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义且单调上升, 则在此闭区间内函数的下确界和上确界等于什么?

求下列函数的下确界和上确界:

388. $f(x)=x^2$ 在 $[-2,5]$ 内.

389. $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内.

390. $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 内.

391. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内.

392. $f(x)=\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 内.

393. $f(x)=\sin x+\cos x$ 在 $[0,2\pi]$ 内.

394. $f(x)=2^x$ 在 $(-1,2)$内.

395. $f(x)=[x]$: (a) 在 $(0,2)$ 内, (b) 在 $[0,2]$ 内.

396. $f(x)=x-[x]$ 在 $[0,1]$ 内.

397. 求函数 $f(x)=x^2$ 在下列区间内的振幅:

(a) $(1,3)$; (b) $(1.9,2.1)$; (c) $(1.99,2.01)$; (d) $(1.999,2.001)$.

398. 求函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x}$ 在下列区间内的振幅:

(a) $(-1,1)$; (b) $(-0.1,0.1)$; (c) $(-0.01,0.01)$; (d) $(-0.001,0.001)$.

399. 设 $m[f]$ 和 $M[f]$ 分别为函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内的下确界和上确界.

证明: 若 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 为定义于 (a, b) 的函数, 则

$$m[f_1 + f_2] \geqslant m[f_1] + m[f_2],$$

$$M[f_1 + f_2] \leqslant M[f_1] + M[f_2].$$

举出函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的例子, 使上述两个关系式为: (a) 等式, (b) 不等式.

400. 设函数 $f(x)$ 定义于区域 $[a, +\infty)$, 并且在每一个闭区间 $[a, b]$ 上是有界的. 令

$$m(x) = \inf_{a \leqslant \xi \leqslant x} f(\xi), \quad M(x) = \sup_{a \leqslant \xi \leqslant x} f(\xi).$$

作函数 $y = m(x)$ 和 $y = M(x)$ 的图像, 设

(a) $f(x) = \sin x$; (b) $f(x) = \cos x$.

401. 利用 “ε–δ” 语言, 证明:

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4.$$

填下表:

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	$\cdots$
δ					

402. 以 “ε–δ” 语言, 证明:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty.$$

填下表:

E	10	100	1000	10000	$\cdots$
δ					

403. 利用不等式表示下列各式:

(a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$; (b) $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b$; (c) $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b$.

举出适当的例子.

利用不等式表示下列结论, 并举出适当的例子:

404. (a) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$; (b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$; (c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$.

405. (a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$; (b) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$; (c) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$;

(d) $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$; (e) $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = -\infty$; (f) $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = +\infty$;

(g) $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$; (h) $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = -\infty$; (i) $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = +\infty$.

406. (a) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$; (b) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$; (c) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$;

(d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$; (e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; (f) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$;

(g) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$; (h) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; (i) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

407. 命 $y = f(x)$. 利用不等式表示下列结论:

(a) 当 $x \to a$ 时, $y \to b - 0$; (b) 当 $x \to a - 0$ 时, $y \to b - 0$;

(c) 当 $x \to a+0$ 时, $y \to b-0$; (d) 当 $x \to a$ 时, $y \to b+0$;
(e) 当 $x \to a-0$ 时, $y \to b+0$; (f) 当 $x \to a+0$ 时, $y \to b+0$;
(g) 当 $x \to \infty$ 时, $y \to b-0$; (h) 当 $x \to -\infty$ 时, $y \to b-0$;
(i) 当 $x \to +\infty$ 时, $y \to b-0$; (j) 当 $x \to \infty$ 时, $y \to b+0$;
(k) 当 $x \to -\infty$ 时, $y \to b+0$; (l) 当 $x \to +\infty$ 时, $y \to b+0$.

举出适当的例子.

408. 设

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

式中 a_i $(i=0,1,\cdots,n; n \geqslant 1, a_0 \neq 0)$ 为实数.

证明:

$$\lim_{x\to\infty} |P(x)| = +\infty.$$

409. 设

$$R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m},$$

式中 $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$,

证明:

$$\lim_{x\to\infty} |R(x)| = \begin{cases} \infty, & n > m, \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n = m, \\ 0, & n < m. \end{cases}$$

410. 设 $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 式中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 为 x 的多项式, 且 $P(a) = Q(a) = 0$. 表达式

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

可能取何值?

求下列各式之值:

411. (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

412. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$.

413. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$.

414. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$ (m 与 n 为正整数).

415. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$.

416. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

417. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}$.

418. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$.

419. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.

420. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$.

421. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$.

422. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$.

423. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$.

424. (a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$; (b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$.

425. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ (m 和 n 为正整数).

426. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$ (n 为正整数).

427. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$ (n 为正整数).

428. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$ (m 和 n 为正整数).

429. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\left(x+\dfrac{a}{n}\right)+\left(x+\dfrac{2a}{n}\right)+\cdots+\left(x+\dfrac{(n-1)a}{n}\right)\right]$.

430. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\left(x+\dfrac{a}{n}\right)^2+\left(x+\dfrac{2a}{n}\right)^2+\cdots+\left(x+\dfrac{(n-1)a}{n}\right)^2\right]$.

提示: 参阅题 2.

431. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+\cdots+(2n)^2}$.

432. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^3}-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

提示: 参阅题 3.

433. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^3+4^3+7^3+\cdots+(3n-2)^3}{[1+4+7+\cdots+(3n-2)]^2}$.

434. 把由抛物线 $y=b\left(\dfrac{x}{a}\right)^2$, Ox 轴及直线 $x=a$ 所围成的曲边三角形 OAM (图 3) 的面积, 当作以 $\dfrac{a}{n}$ 为底的各内接矩形面积之和当 $n\to\infty$ 的极限值, 求此面积.

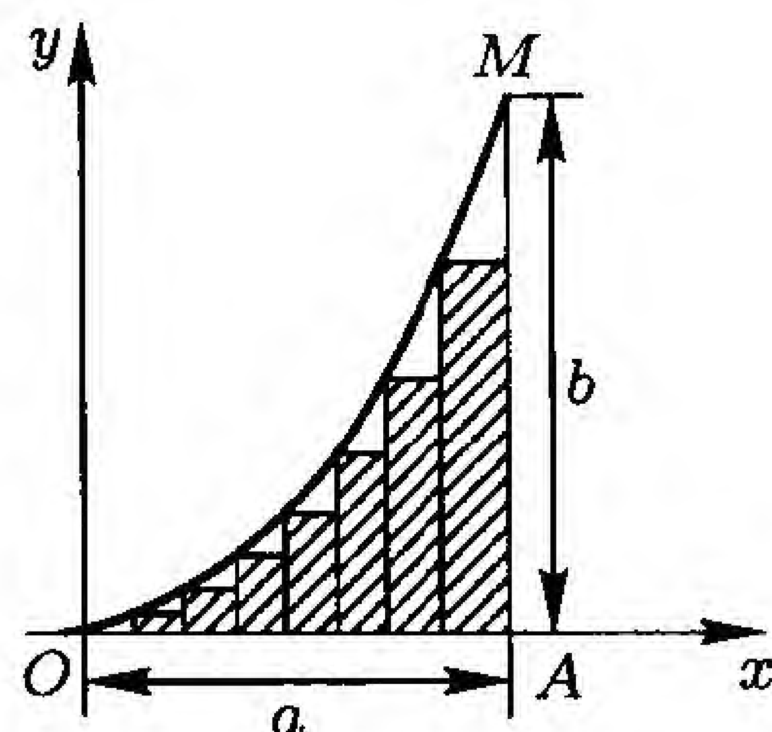


图 3

求极限:

435. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

436. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$.

437. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

438. $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

439. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

440. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

441. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

442. $\lim\limits_{x\to16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

443. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

444. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ (n 为整数).

445. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}$.

446. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$.

447. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$.

448. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

449. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$.

450. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\dfrac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}}$.

451. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$.

452. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$ (m 及 n 为整数).

453. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$ (m 及 n 为整数).

454. 设 $P(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 又 m 为整数, 求证:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+p(x)}-1}{x}=\frac{a_1}{m}.$$

求下列的极限:

455.1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ (m 及 n 为整数).

455.2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$.

456. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$.

457. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right]$.

458. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$.

459. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)$.

460. $\lim\limits_{x\to+0}\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}-\sqrt{\dfrac{1}{x}-\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}\right)$.

461. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)$.

462. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$.

463. $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{3}}\left[(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}\right]$.

464. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$.

465. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[n]{(x+a_1)\cdots(x+a_n)}-x\right]$.

466. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n}{x^n}$ (n 为正整数).

467. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n-\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^n}{x}$ (n 为正整数).

468. 设二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的系数 a 趋于零, 系数 b 与 c 为常数, 且 $b\neq 0$, 试研究此二次方程之二根 x_1 及 x_2 的性质.

469. 从条件

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$$

求常数 a 和 b.

470. 从条件

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1\right)=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-a_2x-b_2\right)=0$$

求常数 a_i 和 b_i $(i=1,2)$.

求下列极限:

471. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$.

472. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

473. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ (m 及 n 为整数).

474. (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$; (c) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 3x$.

475. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$.

476. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$.

477. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$.

478. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$.

479. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan 2x\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$.

480. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$.

481. 证明等式:

(a) $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$; (b) $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$;

(c) $\lim\limits_{x\to a}\tan x=\tan a\left(a\neq\dfrac{2n-1}{2}\pi; n=0,\pm1,\pm2,\cdots\right)$.

求下列极限:

482. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

483. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$.

484. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\tan x-\tan a}{x-a}$.

485. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cot x-\cot a}{x-a}$.

486. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sec x-\sec a}{x-a}$.

487. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\csc x-\csc a}{x-a}$.

488. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}$.

489. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(a+2x)-2\cos(a+x)+\cos a}{x^2}$.

490. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(a+2x)-2\tan(a+x)+\tan a}{x^2}$.

491. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cot(a+2x)-2\cot(a+x)+\cot a}{x^2}$.

492. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a}{x}$.

493. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$.

494. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$.

495. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$.

496. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\tan^3 x-3\tan x}{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}$.

497. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(a+x)\tan(a-x)-\tan^2 a}{x^2}$.

498. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\cot^3 x}{2-\cot x-\cot^3 x}$.

499. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

500. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

501. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

502. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$.

503. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos(\sqrt{x})}$.

504. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$.

505. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$.

506. (a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$; (b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$; (c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$.

507. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$.

508. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$.

509. $\lim\limits_{n\to \infty}\left(\sin^n\dfrac{2n\pi}{3n+1}\right)$.

510. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}+0}\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\tan 2x}$.

511. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$.

512. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$.

513. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

514. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$.

515. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}$.

516. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^{x}$ $(a_1>0, a_2>0)$.

517. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\cot^2 x}$.

518. $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\cot\pi x}$.

519. (a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$; (b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$.

520. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$.

521. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

522. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$.

523. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$.

524. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\cot x}$.

525. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

526. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$

527. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+x}{n-1}\right)^{n}$.

528. $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\dfrac{x}{\sqrt{n}}$.

529. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

530. $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(x+1)-\ln x]$.

531. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}\ (a>0)$.

532. $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x]$.

533. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$.

534. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\lg\dfrac{100+x^2}{1+100x^2}\right)$.

535. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$.

536. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$.

537. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\log(x+h)+\log(x-h)-2\log x}{h^2}\ (x>0)$.

538. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+ax\right)}{\sin bx}$.

539. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$.

540. (a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln\dfrac{nx+\sqrt{1-n^2x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}}\right)$; (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(nx+\sqrt{1-n^2x^2})}{\ln(x+\sqrt{1-x^2})}$.

541. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}\ (a>0)$.

542. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}\ (a>0)$.

543. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}\ (a>0)$.

544. $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$.

545. (a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; (b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right)^{\cot^3 x}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(\pi x^\alpha)}{\sin(\pi x^\beta)}$; (d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin^2(\pi\cdot 2^x)}{\ln(\cos(\pi\cdot 2^x))}$.

546. $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$.

547. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$.

548. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta}$ $(a>0)$.

549. $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{a^x - a^b}{x-b}$ $(a>0)$.

550. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}$ $(a>0)$.

551. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$.

552. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x}-1)$ $(x>0)$.

553. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x})$ $(x>0)$.

554. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n$ $(a>0, b>0)$.

555. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$ $(a>0, b>0)$.

556. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0, b>0, c>0)$.

557. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0, b>0, c>0)$

558. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0, b>0)$.

559. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}$ $(a>0, b>0)$.

560. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}$ $(a>0)$.

561. (a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$; (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$.

562. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$.

563. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\log_x 2$.

564. 证明:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=0 \quad (a>1, n>0).$$

565. 证明:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\varepsilon}=0 \quad (a>1, \varepsilon>0).$$

求下列极限:

566. (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+\mathrm{e}^x)}{\ln(x^4+\mathrm{e}^{2x})}$; (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+\mathrm{e}^x)}{\ln(x^4+\mathrm{e}^{2x})}$.

567. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x\mathrm{e}^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$.

568. $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x]$.

569. $\lim\limits_{x\to+0}\left[\ln(x\ln a)\cdot\ln\left(\dfrac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\right)\right]$ $(a>1)$.

570. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\ln^{-2}\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

571. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$. **572.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(xe^{x})-\cos(xe^{-x})}{x^3}$.

573. $\lim\limits_{x\to0}\left(2e^{\frac{x}{x+1}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$. **574.** $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\sec\frac{\pi x}{2}}$.

575. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^{\alpha+\beta}x}{\sqrt{(1-\sin^{\alpha}x)\,(1-\sin^{\beta}x)}}$ $(\alpha>0,\beta>0)$.

576. (a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sinh x}{x}$; (b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cosh x-1}{x^2}$; (c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tanh x}{x}$ (参考习题 340).

577. (a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sinh^2 x}{\ln(\cosh 3x)}$ (参考习题 340); (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sinh\sqrt{x^2+x}-\sinh\sqrt{x^2-x}}{\cosh x}$.

578. (a) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sinh x-\sinh a}{x-a}$; (b) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cosh x-\cosh a}{x-a}$; (c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cosh x}{\ln\cos x}$.

579. (a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln\cosh x)$; (b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\tanh x}$.

580. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\cosh\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)^{n^2}$. **581.** $\lim\limits_{x\to\infty}\arcsin\dfrac{1-x}{1+x}$.

582. $\lim\limits_{x\to+\infty}\arccos\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$. **583.** $\lim\limits_{x\to2}\arctan\dfrac{x-4}{(x-2)^2}$.

584. $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. **585.** $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\arctan(x+h)-\arctan x}{h}$.

586. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{\arctan(1+x)-\arctan(1-x)}$.

587. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\arctan\dfrac{1}{n(x^2+1)+x}\cdot\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2n}\right)\right]$.

588. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\dfrac{\pi}{4}-\arctan\dfrac{x}{x+1}\right)$. **589.** $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

590. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right]^{\csc\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right)}$.

591. (a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^{100}}e^{-\frac{1}{x^2}}$; (b) $\lim\limits_{x\to+0}x\ln x$.

592. (a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$; (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$.

593. (a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)$;

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)$.

594. 设

$$f(x)=\ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{x+\sqrt{x^2+b^2}},$$

求

$$h = \lim_{x\to+\infty} f(x) - \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

595. (a) $\lim\limits_{x\to1-0} \arctan\dfrac{1}{1-x}$;　(b) $\lim\limits_{x\to1+0} \arctan\dfrac{1}{1-x}$.

596. (a) $\lim\limits_{x\to-0} \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$;　(b) $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$.

597. (a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x}$;　(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x}$.

598. 证明:

(a) 当 $x\to-\infty$ 时, $\dfrac{2x}{1+x}\to 2+0$;

(b) 当 $x\to+\infty$ 时, $\dfrac{2x}{1+x}\to 2-0$.

599. 证明:

(a) 当 $x\to-0$ 时, $2^x\to 1-0$;

(b) 当 $x\to+0$ 时, $2^x\to 1+0$.

600. 设 $f(x)=x+[x^2]$, 求 $f(1)$, $f(1-0)$, $f(1+0)$.

601. 设 $f(x)=\operatorname{sgn}(\sin\pi x)$, 求 $f(n)$, $f(n-0)$, $f(n+0)$ $(n=0,\pm1,\cdots)$.

求:

602. $\lim\limits_{x\to0} x\sqrt{\cos\dfrac{1}{x}}$.　**603.** $\lim\limits_{x\to0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

604. $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.　**605.** $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$.

606. $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n\text{ 次}} x$.

607. 设 $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A$ 及 $\lim\limits_{x\to A}\psi(x)=B$, 则由此是否可推出

$$\lim_{x\to a}\psi(\varphi(x))=B?$$

研究例子:

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}\ (p,q\text{ 是互素的整数}),\\ 0, & x\text{ 为无理数},\end{cases}\qquad \psi(x)=\begin{cases}1, & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

并且 $x\to0$.

608. 证明柯西定理: 若函数 $f(x)$ 定义于区间 $(a,+\infty)$, 且在每一个有限的区间 (a,b) 内是有界的, 则

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]$;

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$ $(f(x)\geqslant C>0)$,

假定等式右端的极限都存在.

609. 证明: 若 (1) 函数 $f(x)$ 定义于区域 $x>a$; (2) $f(x)$ 在每一个有限的区域 $a<x<b$ 内是有界的; (3) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=\pm\infty$, 则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\pm\infty.$$

610. 证明: 若 (1) 函数 $f(x)$ 定义于区域 $x > a$; (2) $f(x)$ 在每一个有限的区域 $a < x < b$ 内是有界的; (3) 存在着有限的或无穷的极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}=l,$$

则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}}=\frac{l}{n+1}.$$

611. 证明:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n=\mathrm{e}^x$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}\right)=\mathrm{e}^x$.

612. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi\mathrm{e}n!)=2\pi.$$

提示: 利用 72 题的公式 (*).

作下列函数的图像:

613. (a) $y=1-x^{100}$; (b) $y=\lim\limits_{n\to\infty}(1-x^{2n})$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

614. (a) $y=\dfrac{x^{100}}{1+x^{100}}$ $(x\geqslant 0)$; (b) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}$ $(x\geqslant 0)$.

615. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$ $(x\neq 0)$.

616. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^2}}$.

617. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}$ $(x\geqslant 0)$.

618. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}$ $(x\geqslant 0)$.

619. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n}+x^{2n}}}$ $(x\geqslant 0)$.

620. (a) $y=\sin^{1000}x$; (b) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^{2n}x$.

621. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(2^n+x^n)}{n}$ $(x\geqslant 0)$.

622. $y=\lim\limits_{n\to\infty}(x-1)\arctan x^n$.

623. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\mathrm{e}^{n(x+1)}}$.

624. (a) $y=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+\mathrm{e}^{tx}}{1+\mathrm{e}^{tx}}$; (b) $y=\lim\limits_{t\to x}\dfrac{1}{t-x}\ln\dfrac{t}{x}$ $(x>0)$.

625. (a) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x\tan^{2n}\dfrac{\pi x}{4}+\sqrt{x}}{\tan^{2n}\dfrac{\pi x}{4}+1}$ $(x\geqslant 0)$;

(b) $y=\lim\limits_{n\to\infty}x\ \mathrm{sgn}\,|\sin^2(n!\pi x)|$;

(c) 作曲线 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x|^n+|y|^n}=1$.

626. 若有

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=0,$$

则直线 $y=kx+b$ 称为曲线 $y=f(x)$ 的 (斜) 渐近线. 利用此方程推出渐近线存在的充分必要条件.

627. 求下列曲线的渐近线并作其图像:

(a) $y=\dfrac{x^3}{x^2+x-2}$; (b) $y=\sqrt{x^2+x}$; (c) $y=\sqrt[3]{x^2-x^3}$;

(d) $y=\dfrac{xe^x}{e^x-1}$; (e) $y=\ln(1+e^x)$; (f) $y=x+\arccos\dfrac{1}{x}$.

求下列极限:

628. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\dfrac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\cdots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}\right]$.

629. $\lim\limits_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2n})]$, 若 $|x|<1$.

630. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}\right)$.

631. 设

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1,$$

其中 $\psi(x)>0$, 再设 $n\to\infty$ 时 $\alpha_{mn}\rightrightarrows 0$ $(m=1,2,\cdots,n)$, 换言之, 对于任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 $N(\varepsilon)$, 当 $m=1,2,\cdots,n$ 且 $n>N(\varepsilon)$ 时 $0<|\alpha_{mn}|<\varepsilon$.

证明:

$$\lim_{n\to\infty}[\varphi(\alpha_{1n})+\varphi(\alpha_{2n})+\cdots+\varphi(\alpha_{nn})]=\lim_{n\to\infty}[\psi(\alpha_{1n})+\psi(\alpha_{2n})+\cdots+\psi(\alpha_{nn})], \quad (1)$$

此处假定等式 (1) 右端的极限存在.

利用上述定理, 求:

632. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{k}{n^2}}-1\right)$.

633. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sin\dfrac{ka}{n^2}\right)$.

634. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(a^{\frac{k}{n^2}}-1\right)$ $(a>0)$.

635. $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)$.

636. $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{ka}{n\sqrt{n}}$.

637.1. 数列 x_n 由以下的等式所给定:

$$x_1=\sqrt{a},\quad x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}},\quad x_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}},\quad\cdots\quad(a>0).$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

637.2. 数列 x_n 按下述方式给定:

$$x_1=0,\quad x_2=1,\quad x_n=\frac{1}{2}(x_{n-1}+x_{n-2})\quad(n=3,4,\cdots).$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

637.3. 数列 y_n 借助于数列 x_n, 由下述关系式定义:

$$y_0 = x_0, \quad y_n = x_n - \alpha x_{n-1} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

其中 $|\alpha| < 1$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

637.4. 数列 x_n 按下述方式给定:

$$x_0 = 1, \quad x_n = \frac{1}{1 + x_{n-1}} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

提示: 考虑 x_n 与方程 $x = \dfrac{1}{1+x}$ 的根之差.

638. 函数序列

$$y_n = y_n(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

用以下的方法来确定:

$$\text{(a)}\ y_1 = \frac{x}{2}, y_n = \frac{x}{2} - \frac{y_{n-1}^2}{2}\ (n = 2, 3, \cdots);$$

$$\text{(b)}\ y_1 = \frac{x}{2}, y_n = \frac{x}{2} + \frac{y_{n-1}^2}{2}\ (n = 2, 3, \cdots).$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

639.1. 设 $x > 0$ 且 $y_n = y_{n-1}(2 - xy_{n-1})$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 证明: 若 $y_i > 0$ $(i = 0, 1)$, 则序列 y_n 收敛且

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{x}.$$

提示: 研究差 $\dfrac{1}{x} - y_n$.

639.2. 为了求 $y = \sqrt{x}$, 其中 $x > 0$, 应用如下的步骤: $y_0 > 0$ 是任意的,

$$y_n = \frac{1}{2}\left(y_{n-1} + \frac{x}{y_{n-1}}\right) \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

证明:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \sqrt{x}.$$

提示: 利用公式

$$\frac{y_n - \sqrt{x}}{y_n + \sqrt{x}} = \left(\frac{y_{n-1} - \sqrt{x}}{y_{n-1} + \sqrt{x}}\right)^2 \quad (n \geqslant 1).$$

640. 为了求开普勒方程

$$x - \varepsilon \sin x = m \quad (0 < \varepsilon < 1) \tag{1}$$

的近似解, 假设

$$x_0 = m, \quad x_1 = m + \varepsilon \sin x_0, \quad \cdots, \quad x_n = m + \varepsilon \sin x_{n-1}, \quad \cdots$$

(*逐步逼近法*).

证明: 存在 $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, 且数 ξ 为方程 (1) 的唯一的根.

641. 若 $\omega_h(f)$ 为函数 $f(x)$ 在区间 $|x - \xi| \leqslant h$ $(h > 0)$ 上的振幅, 则数

$$\omega_0(f) = \lim_{h\to 0} \omega_h(f)$$

称为函数 $f(x)$ 在 ξ 点的振幅.

若 $f(x)=0$, 而在 $x\neq 0$ 时 $f(x)$ 为下列函数, 求 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的振幅:

(a) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$; (b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\cos^2\dfrac{1}{x}$;

(c) $f(x)=x\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right)$; (d) $f(x)=\dfrac{1}{\pi}\arctan\dfrac{1}{x}$;

(e) $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x}$; (f) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$;

(g) $f(x)=(1+|x|)^{\frac{1}{x}}$.

642. 命

$$f(x)=\sin\frac{1}{x},$$

证明: 对于满足条件 $-1\leqslant\alpha\leqslant 1$ 的任何数 α, 可以选出数列 $x_n\to 0\ (n=1,2,\cdots)$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\alpha.$$

643. 设

(a) $f(x)=\sin^2\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{\pi}\arctan\dfrac{1}{x}$; (b) $f(x)=(2-x^2)\cos\dfrac{1}{x}$;

(c) $f(x)=\left(1+\cos^2\dfrac{1}{x}\right)^{\sec^2\frac{1}{x}}$.

求

$$l=\varliminf_{x\to 0} f(x) \quad 和 \quad L=\varlimsup_{x\to 0} f(x).$$

644. 设

(a) $f(x)=\sin x$; (b) $f(x)=x^2\cos^2 x$;

(c) $f(x)=2^{\sin x^2}$; (d) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2\sin^2 x}\ (x\geqslant 0)$.

求

$$l=\varliminf_{x\to\infty} f(x) \quad 和 \quad L=\varlimsup_{x\to\infty} f(x).$$

§6. 符号 O

1. 记号

$$\varphi(x)=O(\psi(x)) \quad 当\ x\in X$$

表示: 存在常数 A, 使得

$$|\varphi(x)|\leqslant A|\psi(x)| \quad 当\ x\in X. \tag{1}$$

若在点 $a\ (x\neq a)$ 的某个邻域 U_a 内不等式 (1) 成立, 类似地可写出

$$\varphi(x)=O(\psi(x)) \quad 当\ x\to a. \tag{2}$$

特别地, 若当 $x\in U_a\ (x\neq a)$ 时 $\psi(x)\neq 0$, 则只要存在有限的 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}\neq 0$, 关系式 (2) 就显然成立. 在这种情形下使用记号

$$\varphi(x) = O^*(\psi(x)).$$

若

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^p} = k \neq 0 \quad (p > 0),$$

则称 $\varphi(x)$ 为关于无穷小量 x 的 p 阶无穷小量. 类似地, 若

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x^p} = k \neq 0 \quad (p > 0),$$

则称 $\psi(x)$ 为关于无穷大量 x 的 p 阶无穷大量.

2. 记号

$$\varphi(x) = o(\psi(x)) \quad \text{当 } x \to a$$

表示

$$\varphi(x) = \alpha(x)\psi(x) \quad (x \in U_a, x \neq a), \tag{3}$$

其中当 $x \to a$ 时 $\alpha(x) \to 0$. 若当 $x \in U_a, x \neq a$ 时 $\psi(x) \neq 0$, 则等式 (3) 等价于

$$\lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0.$$

3. 若

$$\varphi(x) - \psi(x) = o(\psi(x)) \quad \text{当 } x \to a, \tag{4}$$

则称函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 当 $x \to a$ 时是等价的 $(\varphi(x) \sim \psi(x))$. 若当 $x \in U_a, x \neq a$ 时 $\psi(x) \neq 0$, 则由 (4) 有

$$\lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1.$$

当 $x \to 0$ 时, 成立如下的等价关系:

$$\sin x \sim x; \quad \tan x \sim x; \quad a^x - 1 \sim x\ln a \quad (a > 0);$$

$$\ln(1+x) \sim x; \quad \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}.$$

一般而言, $\varphi(x) + o(\varphi(x)) \sim \varphi(x)$.

在计算当 $x \to a$ 时两个无穷小 (或无穷大) 函数之比的极限时, 可用等价的函数来替换所给函数.

645. 把圆心角 $AOB = x$ (图 4) 当作 1 阶无穷小量, 求下列各无穷小量的阶:

(a) 弦 AB;

(b) 拱高 CD;

(c) 扇形 AOB 的面积;

(d) 三角形 ABC 的面积;

(e) 梯形 ABB_1A_1 的面积;

(f) 弓形 ABC 的面积.

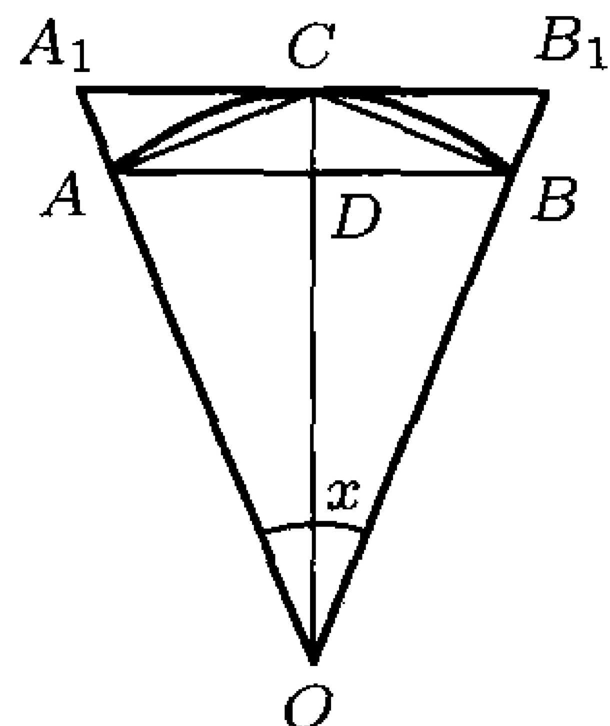


图 4

646. 设 $o(f(x))$ 是当 $x \to a$ 时比函数 $f(x)$ 低阶增长的任意函数, 并且 $O(f(x))$ 是当 $x \to a$ 时与函数 $f(x)$ 同阶增长的任意函数, 其中 $f(x) > 0$.

证明:

(a) $o(o(f(x))) = o(f(x))$;　　(b) $O(o(f(x))) = o(f(x))$;

(c) $o(O(f(x))) = o(f(x))$; (d) $O(O(f(x))) = O(f(x))$;

(e) $O(f(x)) + o(f(x)) = O(f(x))$.

647. 设 $x \to 0$ 和 $n > 0$. 证明:

(a) $CO(x^n) = O(x^n)$ ($C \neq 0$ 为常数); (b) $O(x^n)+O(x^m) = O(x^n)$ $(n < m)$;

(c) $O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m})$.

648. 设 $x \to +\infty, n > 0$. 证明:

(a) $CO(x^n) = O(x^n)$ (C 为常数);

(b) $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$ $(n > m)$;

(c) $O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m})$.

649. 证明符号 $\sim$ 具有如下性质:

(1) 自反性: $\varphi(x) \sim \varphi(x)$;

(2) 对称性: 若 $\varphi(x) \sim \psi(x)$, 则 $\psi(x) \sim \varphi(x)$;

(3) 传递性: 若 $\varphi(x) \sim \psi(x)$ 及 $\psi(x) \sim \chi(x)$, 则 $\varphi(x) \sim \chi(x)$.

650. 设 $x \to 0$, 证明下列等式:

(a) $2x - x^2 = O(x)$; (b) $x \sin\sqrt{x} = O(x^{\frac{3}{2}})$;

(c) $x \sin\dfrac{1}{x} = O(|x|)$; (d) $\ln x = o\left(\dfrac{1}{x^\varepsilon}\right)$ $(\varepsilon > 0)$;

(e) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt[8]{x}$; (f) $\arctan\dfrac{1}{x} = O(1)$;

(g) $(1 + x)^n = 1 + nx + o(x)$.

651. 设 $x \to +\infty$. 证明下列等式:

(a) $2x^3 - 3x^2 + 1 = O(x^3)$; (b) $\dfrac{x+1}{x^2+1} = O\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

(c) $x + x^2 \sin x = O(x^2)$; (d) $\dfrac{\arctan x}{1 + x^2} = O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$;

(e) $\ln x = o(x^\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$; (f) $x^p \mathrm{e}^{-x} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$;

(g) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt{x}$; (h) $x^2 + x\ln^{100} x \sim x^2$.

652.1. 证明: 当 x 充分大时, 下面的不等式成立:

(a) $x^2 + 10x + 100 < 0.001x^3$; (b) $\ln^{1000} x < \sqrt{x}$;

(c) $x^{10}\mathrm{e}^x < \mathrm{e}^{2x}$.

652.2. 证明渐近公式: 当 $x \to +\infty$ 时,

$$\sqrt{x^2 + px + q} = x + \frac{p}{2} + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

653. 设 $x \to 0$. 分出下列函数的形如 Cx^n (C 为常数) 的主部, 并求其对于无穷小变量 x 的阶:

(a) $f(x) = 2x - 3x^3 + x^5$; (b) $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$;

(c) $f(x) = \sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}$; (d) $f(x) = \tan x - \sin x$.

654. 设 $x \to 0$. 证明: 无穷小量

(a) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$; (b) $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$

无论对任何的 n, 也不能与无穷小量 $x^n(x > 0)$ 相比较. 即, 对于任何的 n, 等式

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n} = k$$

都不成立, 式中 k 为异于零的有限量.

655. 设 $x \to 1$. 分出下列函数的形如 $C(x-1)^n$ 的主部, 并求其对于无穷小量 $x-1$ 的阶:

(a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$; (b) $f(x) = \sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$;

(c) $f(x) = \ln x$; (d) $f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}$;

(e) $f(x) = x^x - 1$.

656. 设 $x \to +\infty$. 分出下列函数的形如 Cx^n 的主部, 并求其对于无穷大量 x 的阶:

(a) $f(x) = x^2 + 100x + 10\,000$; (b) $f(x) = \dfrac{2x^5}{x^3 - 3x + 1}$;

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt{x}$; (d) $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}$.

657. 设 $x \to +\infty$. 分出下列函数的形如 $C\left(\dfrac{1}{x}\right)^n$ 的主部, 并求其对于无穷小量 $\dfrac{1}{x}$ 的阶:

(a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^4+1}$; (b) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$;

(c) $f(x) = \sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}$; (d) $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$.

658. 设 $x \to 1$. 分出下列函数的形如 $C\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^n$ 的主部, 并求其对于无穷大量 $\dfrac{1}{x-1}$ 的阶:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$; (b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$;

(c) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$; (d) $f(x) = \dfrac{1}{\sin \pi x}$;

(e) $f(x) = \dfrac{\ln x}{(1-x)^2}$.

659. 设 $x \to +\infty$, $f_n(x) = x^n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$. 证明:

(1) 每一个函数 $f_n(x)$ 都比其前面的一个函数 $f_{n-1}(x)$ 增加得快;

(2) 函数 e^x 比函数 $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 中的每一个都增加得快.

660. 设 $x \to +\infty$, $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$. 证明:

(1) 每一个函数 $f_n(x)$ 都比其前面的一个函数 $f_{n-1}(x)$ 增加得慢;

(2) 函数 $f(x) = \ln x$ 比函数 $f_n(x)(n = 1, 2, \cdots)$ 中的每一个都增加得慢.

661. 证明: 对于任意的函数序列

$$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots \quad (x_0 < x < +\infty),$$

可举出一函数 $f(x)$, 当 $x \to +\infty$ 时它比函数 $f_n(x)(n = 1, 2, \cdots)$ 中的每一个都增加得快.

§7. 函数的连续性

1. 函数的连续性. 设

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \tag{1}$$

即, 函数 $f(x)$ 对 $x = x_0$ 有定义, 并且对于每一个 $\varepsilon > 0$, 都存在 $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, 使当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 对于 $f(x)$ 的有意义一切值, 不等式

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

都成立. 此时, 称函数 $f(x)$ 当 $x = x_0$ 时 (或在点 x_0) 是*连续的*.

若函数 $f(x)$ 在所给集合 $X = \{x\}$ (开区间, 闭区间等等) 上的每一点都是连续的, 则称函数 $f(x)$ *在集合 X 上是连续的*.

若某值 x_0 属于函数 $f(x)$ 的定义域 $X = \{x\}$ 或为此集合的极限点, 而当 $x = x_0$ 时, 等式 (1) 不成立 (即, 或者 (a) 数 $f(x_0)$ 不存在, 换言之, 函数在点 $x = x_0$ 没有定义; 或者 (b) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在, 或者 (c) 公式 (1) 的两端虽有意义, 但它们不相等), 则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的*间断点*.

间断点 x_0 分为两类: (1) *第一类间断点* —— 在这些点存在有限的单侧极限:

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x\to x_0 - 0} f(x) \quad 和 \quad f(x_0 + 0) = \lim_{x\to x_0 + 0} f(x).$$

(2) *第二类间断点* —— 其余的一切间断点. 差

$$f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$$

称为函数在点 x_0 的*突跃*.

若等式

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$$

成立, 则间断点 x_0 称为*可去的*. 若极限 $f(x_0 - 0)$ 或 $f(x_0 + 0)$ 中至少有一个等于符号 ∞, 则称 x_0 为*无穷型间断点*.

若等式

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) \quad (或\ f(x_0 + 0) = f(x_0))$$

成立, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 *左* (*或右*) *连续*. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的充分必要条件为下面三个数相等:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

2. 初等函数的连续性. 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x = x_0$ 连续, 则函数

$$\text{(a)}\ f(x) \pm g(x); \quad \text{(b)}\ f(x)g(x); \quad \text{(c)}\ \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x_0) \neq 0)$$

也在 $x = x_0$ 连续.

特殊情形: (a) 有理函数

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

对任何的 x 值都是连续的; (b) 分式有理函数

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m}$$

对所有不使其分母为零的 x 值, 都是连续的.

一般地说, 基本初等函数: $x^n, \sin x, \cos x, \tan x, a^x, \log_a x, \arcsin x, \arccos x, \arctan x, \cdots$ 在一切使其有意义的点都连续.

更为一般的结果如下: 若函数 $f(x)$ 当 $x=x_0$ 时连续, 函数 $g(y)$ 当 $y=f(x_0)$ 时连续, 则函数 $g(f(x))$ 当 $x=x_0$ 时连续.

3. 关于连续函数的基本定理. 若函数 $f(x)$ 在有限的闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则: (1) 函数 $f(x)$ 在此闭区间内是有界的; (2) 达到其下确界 m 和上确界 M (魏尔斯特拉斯定理); (3) 在每一个区间 $(\alpha,\beta)\subset[a,b]$ 中, 函数取到所有介于 $f(\alpha)$ 和 $f(\beta)$ 间的值 (柯西定理). 例如, 若 $f(\alpha)f(\beta)<0$, 则可找到一个数值 γ $(\alpha<\gamma<\beta)$, 使得 $f(\gamma)=0$.

662. 已给连续函数 $y=f(x)$ 的图像, 对于给定点 a 与给定数 $\varepsilon>0$, 用几何方法表示出这样的数 $\delta>0$, 使当 $|x-a|<\delta$ 时, $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

663. 需要制造一块边长 $x_0=10\,\text{cm}$ 的正方形金属板, 其面积 $y=x^2$ 与设计值 $y_0=100\,\text{cm}^2$ 之差不可超过: (a) $\pm1\,\text{cm}^2$; (b) $\pm0.1\,\text{cm}^2$; (c) $\pm0.01\,\text{cm}^2$; (d) $\pm\varepsilon\,\text{cm}^2$, 问其边长 x 可以在什么范围内变化?

664. 立方体的边介于 2 m 和 3 m 之间, 在测量此立方体边长 x 时容许怎样的绝对误差 Δ, 方可使计算立方体体积时的绝对误差不超过: (a) $\varepsilon=0.1\,\text{m}^3$; (b) $\varepsilon=0.01\,\text{m}^3$; (c) $\varepsilon=0.001\,\text{m}^3$?

665. 问在 $x_0=100$ 的尽可能多大的邻域内, 函数 $y=\sqrt{x}$ 的图像的纵坐标与 $y_0=10$ 之差小于 $\varepsilon=10^{-n}$ $(n\geqslant0)$? 求当 $n=0,1,2,3$ 时这个邻域的大小.

666. 利用 "ε-δ" 语言, 证明: 函数 $f(x)=x^2$ 当 $x=5$ 时连续. 填下表:

ε	1	0.1	0.01	0.001	$\cdots$
δ					

667. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $\varepsilon=0.001$. 对于数值 $x_0=0.1;0.01;0.001;\cdots$ 求出最大的正数 $\delta=\delta(\varepsilon,x_0)$, 使得可从不等式 $|x-x_0|<\delta$ 推出不等式 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

可否对于已知的 $\varepsilon=0.001$ 选出这样的 $\delta>0$, 使它对区间 $(0,1)$ 中的一切 x_0 值都适用? 换言之, 可否找到这样的 $\delta>0$, 使得只要 $|x-x_0|<\delta$, 就有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, 而不论 $x_0\in(0,1)$ 为何值?

668. 用 "ε-δ" 语言以肯定的方式表述以下论断: 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有定义, 而在这一点不连续.

669. 设对于某些数 $\varepsilon>0$ 可找到对应的数 $\delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0$, 使得只要 $|x-x_0|<\delta$, 则 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

若 (a) 诸数 ε 组成一有限的集合; (b) 数 ε 组成分数 $\varepsilon=\dfrac{1}{2^n}$ $(n=1,2,\cdots)$ 的无穷集合, 则可否断定函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续?

670. 设已知函数

$$f(x)=x+0.001[x].$$

证明: 对于每一个 $\varepsilon>0.001$, 可以选出 $\delta=\delta(\varepsilon,x)>0$, 使得只要 $|x'-x|<\delta$, 则

$|f(x') - f(x)| < \varepsilon$. 然而, 当 $0 < \varepsilon \leqslant 0.001$ 时, 对于所有 x 值都无法选出这样的 δ.

这个函数的连续性在哪些点遭到破坏?

671. 设对于每一个充分小的数 $\delta > 0$, 都存在 $\varepsilon = \varepsilon(\delta, x_0) > 0$, 使得只要 $|x - x_0| < \delta$ 则不等式 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ 成立. 由此是否可知函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续? 这些不等式描述了函数 $f(x)$ 的什么性质?

672. 设对于每一个数 $\varepsilon > 0$, 都存在数 $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, 使得若 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 则 $|x - x_0| < \delta$. 由此是否可知函数$f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续? 这些不等式描述了函数的什么性质?

673. 设对于每一个数 $\delta > 0$, 都存在数 $\varepsilon = \varepsilon(\delta, x_0) > 0$, 使得若 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 则 $|x - x_0| < \delta$. 由此是否可知函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续? 这些不等式描述了函数的什么性质?

研究例子:

$$f(x) = \begin{cases} \arctan x, & x \text{ 为有理数}, \\ \pi - \arctan x, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

674. 利用 "ε–δ" 语言证明下列函数的连续性: (a) $ax + b$; (b) x^2; (c) x^3; (d) $\sqrt{x}$; (e) $\sqrt[3]{x}$; (f) $\sin x$; (g) $\cos x$; (h) $\arctan x$.

研究下列函数的连续性并绘出其图像:

675. $f(x) = |x|$.

676. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2, \\ A, & x = 2. \end{cases}$

677. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+x)^2}, & x \neq -1, \\ \text{任意值}, & x = -1. \end{cases}$

678. (a) $f_1(x) = \begin{cases} \left|\dfrac{\sin x}{x}\right|, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$　(b) $f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

679. $f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ \text{任意值}, & x = 0. \end{cases}$

680. $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

681. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

682. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}, & x \neq 1, \\ \text{任意值}, & x = 1. \end{cases}$

683. $f(x) = \begin{cases} x \ln x^2, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$

684. $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

685. $f(x) = [x]$.

686. $f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}\,]$.

求出下列函数的间断点并研究这些点的性质:

687. $y = \dfrac{x}{(1+x)^2}$.

688. $y = \dfrac{1+x}{1+x^3}$.

689. $y = \dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}$.

690. $y = \dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}}$.

691. $y = \dfrac{x}{\sin x}$.

692. $y = \sqrt{\dfrac{1-\cos \pi x}{4-x^2}}$.

693. $y = \cos^2 \dfrac{1}{x}$.

694. $y = \operatorname{sgn}\left(\sin \dfrac{\pi}{x}\right)$.

695. $y = \dfrac{\cos \dfrac{\pi}{x}}{\cos \dfrac{\pi}{x}}$.

696. $y = \arctan \dfrac{1}{x}$.

697. $y = \sqrt{x} \arctan \dfrac{1}{x}$.

698. $y = \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}$.

699. $y = \dfrac{1}{\ln x}$.

700. $y = \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}$.

研究下列函数的连续性并绘出其大略图像:

701. $y = \operatorname{sgn}(\sin x)$.

702. $y = x - [x]$.

703. $y = x[x]$.

704. $y = [x] \sin \pi x$.

705. $y = x^2 - [x^2]$.

706. $y = \left[\dfrac{1}{x}\right]$.

707. $y = x\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

708. $y = \operatorname{sgn}\left(\cos \dfrac{1}{x}\right)$.

709. $y = \left[\dfrac{1}{x^2}\right] \operatorname{sgn}\left(\sin \dfrac{\pi}{x}\right)$.

710. $y = \cot \dfrac{\pi}{x}$.

711. $y = \sec^2 \dfrac{1}{x}$.

712. $y = (-1)^{[x^2]}$.

713. $y = \arctan\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}\right)$.

714. $y = \dfrac{1}{x^2 \sin^2 x}$.

715. $y = \dfrac{1}{\sin(x^2)}$.

716. $y = \ln \dfrac{x^2}{(x+1)(x-3)}$.

717. $y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.

718. $y = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$.

719. $y = \tanh \dfrac{2x}{1-x^2}$.

研究下列函数的连续性并作出其图像:

720. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+x^n} \quad (x \geqslant 0)$.

721. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}$.

722. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^{2n}}$.

723. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \cos^{2n} x$.

724. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}$.

725. $y = \lim\limits_{n\to\infty} [x \arctan(n \cot x)]$.

726. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}}$.

727. $y = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln(1 + e^{xt})}{\ln(1 + e^t)}$.

728. $y = \lim\limits_{t\to+\infty} (1 + x)\tanh tx$.

729. 函数

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2 - x, & 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

是否连续?

730. 设

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ a + x, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

怎样选择数 a, 可使函数 $f(x)$ 连续?

731. 研究下列函数的连续性并说明间断点的性质:

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2 - x, & 1 < x \leqslant 2; \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leqslant 1, \\ 1, & |x| > 1; \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2}, & |x| \leqslant 1, \\ |x - 1|, & |x| > 1; \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \cot^2 \pi x, & x \text{ 非整数}, \\ 0, & x \text{ 为整数}; \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$

732. 函数 $d = d(x)$ 是数轴 Ox 上的点 x 与由线段 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 及 $2 \leqslant x \leqslant 3$ 所构成点集间的最短距离. 求函数 d 的解析表达式, 作出其图像并研究其连续性.

733. 图像 E 由高为 1 底为 1 的等腰三角形及底为 1 高为 2 及 3 的二矩形构成 (图 5). 函数 $S = S(y)$ $(0 \leqslant y < +\infty)$ 是图像 E 介于平行线 $Y = 0$ 及 $Y = y$ 之间的那一部分面积, 而函数 $b = b(y)$ $(0 \leqslant y < +\infty)$ 是用平行线 $Y = y$ 去截图像所得截痕之长. 求函数 S 及 b 的解析表达式, 作出它们的图像并研究其连续性.

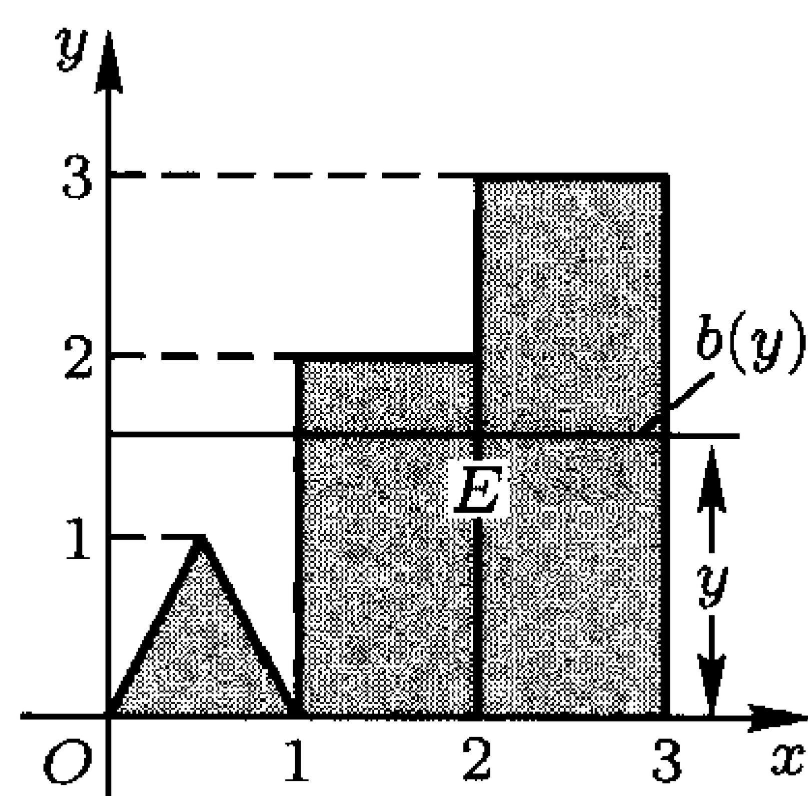


图 5

734. 证明: 狄利克雷函数

$$\chi(x) = \lim_{m\to\infty} \left\{ \lim_{n\to\infty} \cos^n(\pi m! x) \right\}$$

对于每个 x 值都是不连续的.

735. 设有函数

$$f(x) = x\chi(x),$$

式中 $\chi(x)$ 为狄利克雷函数 (参阅上题), 研究函数 $f(x)$ 的连续性并作出它的草图.

736. 证明: 黎曼函数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & x = \dfrac{m}{n}, \text{其中 } m \text{ 和 } n \text{ 为互素的数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}, \end{cases}$$

当 x 取任一个有理值时是不连续的, 而当 x 取任一个无理值时是连续的. 作出这个函数的草图.

737. 研究函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{nx}{n+1}, & x \text{ 为既约的有理分数 } \dfrac{m}{n}\ (n\geqslant 1),\\ |x|, & x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

的连续性并作出此函数的草图.

738. 函数 $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ 当自变量 x 取一切非零值时都有定义. 为了使此函数在 $x=0$ 时连续, 应当以什么数值作为函数在点 $x=0$ 的值?

739. 证明: 无论怎样选取数 $f(1)$, 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 在 $x=1$ 时都是不连续的.

740. 下列函数 $f(x)$ 当 $x=0$ 时没有意义. 定义 $f(0)$ 的值, 使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续:

(a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$;

(b) $f(x)=\dfrac{\tan 2x}{x}$;

(c) $f(x)=\sin x\sin\dfrac{1}{x}$;

(d) $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$;

(e) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$;

(f) $f(x)=x^x\ (x>0)$;

(g) $f(x)=x\ln^2 x$.

741. 设: (a) 函数 $f(x)$ 当 $x=x_0$ 时是连续的, 而函数 $g(x)$ 当 $x=x_0$ 时是不连续的; (b) 当 $x=x_0$ 时函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者都是不连续的, 则此二函数的和 $f(x)+g(x)$ 在已知点 x_0 是否必为不连续的? 举出适当的例子.

742. 设: (a) 函数 $f(x)$ 于 x_0 连续, 而函数 $g(x)$ 于 x_0 不连续; (b) 当 $x=x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者都不连续, 则此二函数的乘积 $f(x)g(x)$ 在已知点 x_0 是否必不连续? 举出适当的例子.

743. 可否断定不连续函数的平方仍为不连续函数?

举出处处不连续但其平方连续的函数的例子.

744. 研究函数 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$ 的连续性:

(a) $f(x)=\operatorname{sgn}x$ 及 $g(x)=1+x^2$;

(b) $f(x)=\operatorname{sgn}x$ 及 $g(x)=x(1-x^2)$;

(c) $f(x)=\operatorname{sgn}x$ 及 $g(x)=1+x-[x]$.

745. 设

$$f(u)=\begin{cases}u, & 0<u\leqslant 1,\\ 2-u, & 1<u<2,\end{cases}$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}x, & x \text{ 为有理数},\\ 2-x, & x \text{ 为无理数},\end{cases}$$

其中 $0<x<1$.

研究复合函数 $y=f(u)$ 的连续性, 其中 $u=\varphi(x)$.

746. 证明: 若 $f(x)$ 是连续函数, 则下列函数也是连续的:

$$F(x) = |f(x)|.$$

747. 证明: 若函数 $f(x)$ 是连续的, 则函数

$$f_c(x) = \begin{cases} -c, & f(x) < -c, \\ f(x), & |f(x)| \leqslant c, \\ c, & f(x) > c \end{cases}$$

(式中 c 为任意的正数) 也是连续函数.

748. 证明: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则函数

$$m(x) = \inf_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\} \quad 和 \quad M(x) = \sup_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\}$$

在 $[a,b]$ 上也是连续的.

749. 证明: 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是连续的, 则函数

$$\varphi(x) = \min[f(x), g(x)] \quad 和 \quad \psi(x) = \max[f(x), g(x)]$$

也是连续的.

750. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义并有界. 证明: 函数

$$m(x) = \inf_{a\leqslant\xi<x}\{f(\xi)\} \quad 和 \quad M(x) = \sup_{a\leqslant\xi<x}\{f(\xi)\}$$

在闭区间 $[a,b]$ 上是左连续的.

751. 证明: 若函数 $f(x)$ 在区间 $a \leqslant x < +\infty$ 上连续, 且有有限的

$$\lim_{x\to+\infty} f(x),$$

则此函数在已知区间上是有界的.

752. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0, +\infty)$ 上连续并有界. 证明: 对于任何数 T, 可求得数列 $x_n \to +\infty$, 使

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n + T) - f(x_n)] = 0.$$

753. 设 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 为定义于 $-\infty < x < +\infty$ 的连续周期函数, 且

$$\lim_{x\to+\infty}[\varphi(x) - \psi(x)] = 0.$$

证明: $\varphi(x) \equiv \psi(x)$.

754. 证明: 单调有界函数的一切间断点皆为第一类间断点.

755. 证明: 若函数 $f(x)$ 具有下列性质: (1) 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义且单调; (2) 取介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间所有的数作为其函数值, 则此函数在 $[a,b]$ 上连续.

756. 证明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x-a}, & x \neq a, \\ 0, & x = a \end{cases}$$

在任意闭区间 $[a,b]$ 上取介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的一切中间值, 但在 $[a,b]$ 上并不连续.

757. 证明: 若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续, 且 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为此区间中的任意值, 则在它们之间可找到一个数值 ξ, 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)].$$

758. 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上连续, 且

$$l = \varliminf_{x\to a} f(x), \quad L = \varlimsup_{x\to a} f(x).$$

证明: 对于满足 $l \leqslant \lambda \leqslant L$ 的任意的数 λ, 存在数列 $x_n \to a\ (n=1,2,\cdots)$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lambda.$$

§8. 反函数. 用参数形式表示的函数

1. 反函数的存在性和连续性. 若函数 $y=f(x)$ 具有下列性质: (1) 在区间 (a,b) 上有定义并连续; (2) 在此区间上是严格单调的, 则存在单值的反函数 $x=f^{-1}(y)$, 此函数在区间 (A,B) 上有定义并连续, 而且是严格单调的, 其中

$$A = \lim_{x\to a+0} f(x) \quad 和 \quad B = \lim_{x\to b-0} f(x).$$

连续函数 $y=f(x)$ 的多值反函数的一个单值连续分支, 可被理解为在其有定义的最大区域上满足方程 $f[g(y)]=y$ 的任何一个单值连续函数 $x=g(y)$.

2. 以参数形式表示的函数的连续性. 若函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在区间 (α,β) 上有定义并且连续, 且函数 $\varphi(t)$ 在此区间上是严格单调的, 则方程组

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t)$$

在区间 (a,b) 上把 y 定义成 x 的单值连续函数:

$$y=\psi(\varphi^{-1}(x)),$$

其中 $a=\lim\limits_{t\to\alpha+0}\varphi(t)$ 及 $b=\lim\limits_{t\to\beta-0}\varphi(t)$.

759. 求分式线性函数

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad-bc\neq 0)$$

的反函数. 在怎样的情形下, 反函数与已知函数相同?

760. 设 $y=x+[x]$, 求反函数 $x=x(y)$.

761. 证明: 存在唯一的连续函数 $y=y(x)\ (-\infty<x<+\infty)$ 满足*开普勒方程*

$$y-\varepsilon\sin y = x \quad (0\leqslant\varepsilon<1).$$

762. 证明: 对于每一个实数 $k\ (-\infty<k<+\infty)$ 方程

$$\cot x = kx$$

在区间 $0<x<\pi$ 中有唯一连续的根 $x=x(k)$.

763. 非单调的函数 $y=f(x)\ (-\infty<x<+\infty)$ 可否有单值的反函数? 研究例子:

$$y=\begin{cases} x, & x\ 为有理数, \\ -x, & x\ 为无理数. \end{cases}$$

764. 在什么情况下, 函数 $y=f(x)$ 和反函数 $x=f^{-1}(y)$ 是同一个函数?

765. 证明: 不连续函数

$$y=(1+x^2)\operatorname{sgn} x$$

的反函数是连续函数.

766. 证明: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义并且是严格单调的, 且

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a) \quad (a \leqslant x_n \leqslant b),$$

则

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

求下列函数的反函数的连续单值分支:

767. $y = x^2$.

768. $y = 2x - x^2$.

769. $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

770. $y = \sin x$.

771. $y = \cos x$.

772. $y = \tan x$.

773. 证明: 连续函数 $y = 1 + \sin x$ 在区间 $0 < x < 2\pi$ 内的值域是闭区间.

774. 证明: 等式

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

775. 证明: 等式

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x \quad (x \neq 0).$$

776. 证明反正切加法定理:

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi,$$

式中 $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$ 为取 $0, 1, -1$ 这三个值的函数.

当给定 x 的值时, 对于怎样的 y 值, 函数 ε 可能不连续? 在 Oxy 平面上作出函数 ε 连续的相应区域, 并求此函数在所得区域内的值.

777. 证明反正弦加法定理:

$$\arcsin x + \arcsin y = (-1)^{\varepsilon} \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) + \varepsilon\pi \quad \left(|x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\right),$$

式中

$$\varepsilon = \begin{cases} 0, & xy \leqslant 0 \text{ 或 } x^2 + y^2 \leqslant 1, \\ \operatorname{sgn} x, & xy > 0 \text{ 和 } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

778. 证明反余弦相加的定理:

$$\arccos x + \arccos y = (-1)^{\varepsilon} \arccos \left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) + 2\pi\varepsilon \quad \left(|x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\right),$$

式中

$$\varepsilon = \begin{cases} 0, & x + y \geqslant 0, \\ 1, & x + y < 0. \end{cases}$$

779. 作函数的图像:

(a) $y = \arcsin x - \arcsin \sqrt{1-x^2}$;

(b) $y = \arcsin \left(2x\sqrt{1-x^2}\right) - 2\arcsin x$.

780. 函数 $y = y(x)$ 由下面的方程给出:

$$x = \arctan t, \quad y = \operatorname{arccot} t \quad (-\infty < t < +\infty),$$

求此函数. 此函数的定义域是什么?

781. 设

$$x = \cosh t, \quad y = \sinh t \quad (-\infty < t < +\infty).$$

在参量 t 的哪些变化域中可以把变量 y 看作变量 x 的单值函数? 求 y 在不同变化域上的表达式.

782. 设 y 对 x 的函数关系由方程组

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)\quad(\alpha<t<\beta)$$

给出, 问 $y=y(x)$ 是单值函数的充分必要条件是什么?

研究例子:

$$x=\sin^2 t,\quad y=\cos^2 t.$$

783. 在怎样的条件下, 两个方程组

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)\quad(a<t<b)$$

和

$$x=\varphi(\chi(\tau)),\quad y=\psi(\chi(\tau))\quad(\alpha<\tau<\beta)$$

定义出同一个函数 $y=y(x)$?

784. 设函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义并且连续, 且

$$A=\inf_{a<x<b}\varphi(x),\quad B=\sup_{a<x<b}\varphi(x).$$

在何种情况下存在单值函数 $f(x)$, 它在区间 (A,B) 上有定义, 并且当 $a<x<b$ 时 $\psi(x)=f[\varphi(x)]$?

§9. 函数的一致连续性

1. 一致连续性的定义. 设函数 $f(x)$ 定义在集合 $X=\{x\}$ 上 (X 是开区间、闭区间等等), 若对于每一个 $\varepsilon>0$ 都存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得对于任何数值 $x',x''\in X$, 由不等式

$$|x'-x''|<\delta$$

可得不等式

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上为一致连续的.

2. 康托尔定理. 在有限的闭区间 $[a,b]$ 上有定义的连续函数 $f(x)$ 在此闭区间上一致连续.

785. 某工厂车间制造正方形平板, 其边长 x 在 1 cm 至 10 cm 之间取值. 当边长的允许误差 δ 为何值时, 不论制造多大的平板 (边长在上述范围内), 其面积 y 与设计值之差都小于 ε? 考虑下列情形:

(a) $\varepsilon=1\,\text{cm}^2$; (b) $\varepsilon=0.01\,\text{cm}^2$; (c) $\varepsilon=0.0001\,\text{cm}^2$.

786. 圆柱形套筒的宽为 ε, 长为 δ. 将套筒套在曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 上并使它沿此曲线滑动, 但套筒的轴须保持平行于 Ox 轴. δ 应取何值, 才可以使此筒顺利地经过此曲线上由不等式 $-10\leqslant x\leqslant 10$ 所限定的部分? 考虑下列情形: (a) $\varepsilon=1$; (b) $\varepsilon=0.1$; (c) $\varepsilon=0.001$; (d) ε 为任意小数.

787. 以 "ε-δ" 语言用肯定的方式表达下述论断: 函数 $f(x)$ 在某集合 (开区间, 闭区间, 等等) 上连续, 但在此集合上并不一致连续.

788. 证明: 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上是连续的, 但在此区间上并非一致连续的.

789. 证明: 函数 $f(x)=\sin\dfrac{\pi}{x}$ 在区间 (0,1) 上是连续的并且有界, 但在此区间上并非一致连续的.

790. 证明: 函数 $f(x)=\sin x^2$ 在无穷区间 $-\infty<x<+\infty$ 上连续并且有界, 但在此区间上并非一致连续的.

791. 证明: 若函数 $f(x)$ 在区域 $a\leqslant x<+\infty$ 上有定义并且连续, 而且有限的

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

存在, 则 $f(x)$ 在此区域上是一致连续的.

792. 证明: 无界函数 $f(x)=x+\sin x$ 于全轴 $-\infty<x<+\infty$ 上一致连续.

793. 函数 $f(x)=x^2$ 在下列区间中是否为一致连续的: (a) $(-l,l)$, 这里 l 为任意大的正数; (b) 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上?

研究下列函数在给定区域上的一致连续性:

794. $f(x)=\dfrac{x}{4-x^2}\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$.

795. $f(x)=\ln x\ (0<x<1)$.

796. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}\ (0<x<\pi)$.

797. $f(x)=\mathrm{e}^x\cos\dfrac{1}{x}\ (0<x<1)$.

798. $f(x)=\arctan x\ (-\infty<x<+\infty)$.

799. $f(x)=\sqrt{x}\ (1\leqslant x<+\infty)$.

800. $f(x)=x\sin x\ (0\leqslant x<+\infty)$.

801.1. 证明: 函数 $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x}$ 在每个区间

$$J_1=(-1<x<0)\quad 及\quad J_2=(0<x<1)$$

上是一致连续的, 但在它们的和

$$J_1+J_2=\{0<|x|<1\}$$

上并非一致连续的.

801.2. 证明: 若函数 $f(x)$ 在每一个闭区间 $[a,c]$ 与 $[c,b]$ 上是一致连续的, 则这个函数在合起来的闭区间 $[a,b]$ 上也是一致连续的.

802. 对于 $\varepsilon>0$, 求使下列函数 $f(x)$ 在所给区间上满足一致连续条件的 $\delta=\delta(\varepsilon)$ (任意的!):

(a) $f(x)=5x-3\quad(-\infty<x<+\infty)$;

(b) $f(x)=x^2-2x-1\quad(-2\leqslant x\leqslant 5)$;

(c) $f(x)=\dfrac{1}{x}\ (0.1\leqslant x\leqslant 1)$;

(d) $f(x)=\sqrt{x}\quad(0\leqslant x<+\infty)$;

(e) $f(x)=2\sin x-\cos x\quad(-\infty<x<+\infty)$;

(f) $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}\quad(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

803. 将闭区间 $[1,10]$ 等分为多少段, 就足以让函数 $f(x)=x^2$ 在每一段上的振幅

小于 0.0001?

804. 证明: 有限个在区间 (a, b) 上一致连续的函数的和与积在此区间上仍是一致连续的.

805. 证明: 若单调有界的函数 $f(x)$ 在有限或无穷的区间 (a, b) 上是连续的, 则此函数在区间 (a, b) 上是一致连续的.

806.1. 证明: 若函数 $f(x)$ 在有限区间 (a, b) 上一致连续, 则存在极限

$$A = \lim_{x \to a+0} f(x) \quad 及 \quad B = \lim_{x \to b-0} f(x).$$

这个定理对无穷区间 (a, b) 是否成立?

806.2. 证明: 在有限区间 (a, b) 上有定义且连续的函数 $f(x)$, 可用连续的方法延拓到闭区间 $[a, b]$ 上, 其充分必要条件是函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上是一致连续的.

807. 函数

$$\omega_f(\delta) = \sup |f(x_1) - f(x_2)|$$

(式中 x_1 和 x_2 为 (a, b) 中受条件 $|x_1 - x_2| \leqslant \delta$ 限制的任意两点) 称为函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上的连续模.

证明: 函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上一致连续的充分必要条件是

$$\lim_{\delta \to +0} \omega_f(\delta) = 0.$$

808. 设

(a) $f(x) = x^3 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$;

(b) $f(x) = \sqrt{x} \quad (0 \leqslant x \leqslant a)$ 及 $(a < x < +\infty)$;

(c) $f(x) = \sin x + \cos x \quad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

对 $f(x)$ 的连续模 $\omega_f(\delta)$ (参阅前题) 作如下形式的估计:

$$\omega_f(\delta) \leqslant C\delta^\alpha,$$

式中 C 和 α 为常数.

§10. 函数方程

809. 证明: 对于所有实数 x 和 y 都满足方程

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \tag{1}$$

的唯一的连续函数 $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ 是线性齐次函数

$$f(x) = ax,$$

式中 $a = f(1)$ 是任意的常数.

810. 证明: 满足方程 (1) 的单调函数 $f(x)$ 是线性齐次的.

811. 证明: 满足方程 (1) 且在任意小区间 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 上有界的函数 $f(x)$, 是线性齐次函数.

812. 证明: 对于所有 x 和 y 都满足方程

$$f(x + y) = f(x)f(y) \tag{2}$$

的唯一不恒等于零的连续函数 $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ 是指数函数:

$$f(x) = a^x,$$

式中 $a = f(1)$ 为正的常数.

813. 证明: 在区间 $(0, \varepsilon)$ 中有界并满足方程 (2) 的不恒等于零的函数 $f(x)$ 是指数函数.

814. 证明: 对于所有正数 x 和 y 都满足方程

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

的唯一不恒等于零的连续函数 $f(x)$ $(0 < x < +\infty)$ 是对数函数:

$$f(x) = \log_a x,$$

式中 a 为正的常数.

815. 证明: 对于所有正数 x 和 y 都满足方程

$$f(xy) = f(x)f(y), \tag{3}$$

的唯一不恒等于零的连续函数 $f(x)$ $(0 < x < +\infty)$ 是幂函数:

$$f(x) = x^a,$$

式中 a 为常数.

816. 求对于所有实数 x 和 y 都满足方程 (3) 的所有的连续函数 $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$.

817. 证明: 不连续函数 $f(x) = \operatorname{sgn} x$ 满足方程 (3).

818. 求对于所有实数 x 和 y 都满足方程

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

的所有的连续函数 $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$.

819. 求对于所有实数 x 和 y 都满足方程组

$$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y), \quad g(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x),$$

以及规范条件

$$f(0) = 1 \quad 和 \quad g(0) = 0$$

的所有的有界连续函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$.

提示: 研究函数 $F(x) = f^2(x) + g^2(x)$.

820. 设

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x), \quad \Delta^2 f(x) = \Delta\{\Delta f(x)\}$$

分别为函数 $f(x)$ 的一阶、二阶有限差分.

证明: 若函数 $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ 是连续的且

$$\Delta^2 f(x) \equiv 0,$$

则此函数是线性函数, 即

$$f(x) = ax + b,$$

式中 a 和 b 为常数.

第二章　一元函数微分学

§1. 显函数的导数

1. 导数的定义. 若 x 及 $x_1 = x + \Delta x$ 为自变量的值, 则差

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

称为函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[x, x_1]$ 上的增量. 表达式

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{1}$$

若有意义, 则称为导数, 而函数 $f(x)$ 本身在此情形下称为可微函数.

导数 $f'(x)$ 在几何上是函数 $y = f(x)$ 的图像在 x 点切线的斜率 $(\tan\alpha = f'(x))$ (图 6).

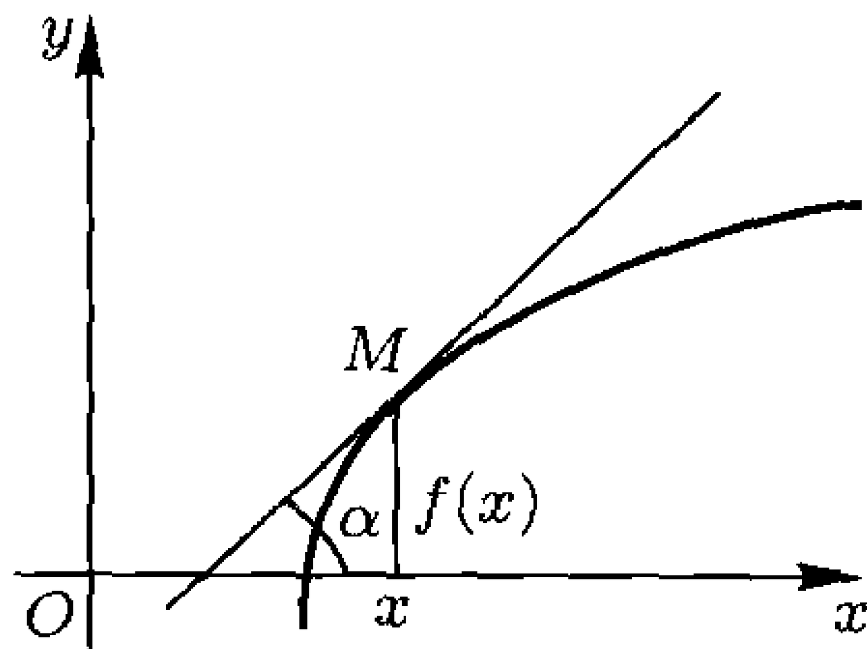


图 6

2. 求导数的基本法则. 若 c 为常数且函数 $u = u(x), v = v(x), w = w(x)$ 都有导数, 则

(1) $c' = 0$;　　(2) $(cu)' = cu'$;

(3) $(u + v - w)' = u' + v' - w'$;

(4) $(uv)' = u'v + uv'$;

(5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$;

(6) $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ (n 为常数);

(7) 若函数 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 都有导数, 则

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

3. 基本公式. 若 x 为自变量, 则

Ⅰ. $(x^n)' = nx^{n-1}$ (n 为常数).　　Ⅱ. $(\sin x)' = \cos x$.

Ⅲ. $(\cos x)' = -\sin x$.　　Ⅳ. $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Ⅴ. $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.　　Ⅵ. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Ⅶ. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.　　Ⅷ. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

Ⅸ. $(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.　　Ⅹ. $(a^x)' = a^x \ln a \ (a>0)$, $(e^x)' = e^x$.

Ⅺ. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a} \ (a>0)$, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Ⅻ. $(\sinh x)' = \cosh x$.　　ⅩⅢ. $(\cosh x)' = \sinh x$.

ⅩⅣ. $(\tanh x)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$.　　ⅩⅤ. $(\coth x)' = -\dfrac{1}{\sinh^2 x}$.

4. 单侧导数. 表达式

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x\to -0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, \quad f'_+(x) = \lim_{\Delta x\to +0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

分别称为函数 $f(x)$ 在 x 点的*左导数*和*右导数*.

导数 $f'(x)$ 存在的充分必要条件是

$$f'_-(x) = f'_+(x).$$

5. 无穷导数. 若函数 $f(x)$ 在点 x 连续, 且

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \infty,$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x 有*无穷导数*. 在此种情形下, 函数 $y=f(x)$ 的图像在 x 点的切线与Ox 轴垂直.

821. 若 x 由 1 变到 1000, 求自变量 x 的增量 Δx 和函数 $y=\lg x$ 的相应增量 Δy.

822. 若 x 由 0.01 变到 0.001, 求自变量 x 的增量 Δx 和函数 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 的相应增量 Δy.

823. 设:

(a) $y=ax+b$;　　(b) $y=ax^2+bx+c$;　　(c) $y=a^x$.

若变量 x 的增量为 Δx, 求增量Δy.

824. 证明:

(a) $\Delta[f(x)+g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x)$;

(b) $\Delta[f(x)g(x)] = g(x+\Delta x)\Delta f(x) + f(x)\Delta g(x)$.

825. 过曲线 $y=x^2$ 上的二点 $A(2,4)$ 和 $A'(2+\Delta x, 4+\Delta y)$ 引割线 AA', 求此割线的斜率, 设: (a) $\Delta x=1$; (b) $\Delta x=0.1$; (c) $\Delta x=0.01$; (d) Δx 为任意小量.

在该曲线上 A 点的切线的斜率等于什么?

826. 利用函数 $y=x^3$ 把 Ox 轴上的线段 $1\leqslant x\leqslant 1+h$ 映射到 Oy 轴上, 求其平均伸长系数. 设: (a) $h=0.1$; (b) $h=0.01$; (c) $h=0.001$, 计算此系数的值.

在 $x=1$, 此映射的伸长系数等于什么?

827. 动点沿 Ox 轴运动的规律由下式给出:

$$x = 10t + 5t^2,$$

式中 t 为以 s (秒) 计的时间, x 为以 m (米) 计的距离. 求在 $20\leqslant t\leqslant 20+\Delta t$ 时间内运动的平均速度. 设: (a) $\Delta t=1$; (b) $\Delta t=0.1$; (c) $\Delta t=0.01$, 计算此速度的值.

当 $t=20$ 时运动速度等于什么?

828. 根据导数的定义, 直接求下列函数的导数:

(a) x^2;　(b) x^3;　(c) $\dfrac{1}{x}$;　(d) $\sqrt{x}$;　(e) $\sqrt[3]{x}$;　(f) $\tan x$;

(g) $\cot x$; (h) $\arcsin x$; (i) $\arccos x$; (j) $\arctan x$.

829. 设 $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$, 求 $f'(1)$, $f'(2)$ 和 $f'(3)$.

830. 设 $f(x) = x^2 \sin(x-2)$, 求 $f'(2)$.

831. 设 $f(x) = x + (x-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$, 求 $f'(1)$.

832. 设函数 $f(x)$ 在 a 点可微, 求

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

833. 证明: 若函数 $f(x)$ 可微, n 为正整数, 则

$$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right] = f'(x). \tag{1}$$

反之, 若对于函数 $f(x)$ 有极限 (1) 存在, 则可否断定此函数有导数? 研究狄利克雷函数的例子 (参阅习题 734).

利用导数表, 求下列函数的导数:

834. $y = 2 + x - x^2$. 问 $y'(0)$, $y'\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $y'(1)$, $y'(-10)$ 等于什么?

835. $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x$. 当 x 为何值时:

(a) $y'(x) = 0$; (b) $y'(x) = -2$; (c) $y'(x) = 10$?

836. $y = a^5 + 5a^3x^2 - x^5$.

837. $y = \dfrac{ax+b}{a+b}$.

838. $y = (x-a)(x-b)$.

839. $y = (x+1)(x+2)^2(x+3)^3$.

840. $y = (x\sin\alpha + \cos\alpha)(x\cos\alpha - \sin\alpha)$.

841. $y = (1+nx^m)(1+mx^n)$.

842. (a) $y = (1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^3$; (b) $y = (5+2x)^{10}(3-4x)^{20}$.

843. $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x^3}$.

844. 证明: 公式 $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)' = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$.

求下列函数的导数:

845. $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$.

846. $y = \dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$.

847. $y = \dfrac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$.

848. $y = \dfrac{(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x)^2}$.

849. $y = \dfrac{(1-x)^p}{(1+x)^q}$.

850. $y = \dfrac{x^p(1-x)^q}{1+x}$.

851. $y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$.

852. $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

853. $y=\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

854. $y=x\sqrt{1+x^2}$.

855. $y=(1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}$.

856. $y=\sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}$.

857. $y=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

858. $y=\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$.

859. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})}$.

860. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

861. $y=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$.

862. $y=\cos 2x-2\sin x$.

863. $y=(2-x^2)\cos x+2x\sin x$.

864. $y=\sin(\cos^2 x)\cdot\cos(\sin^2 x)$.

865. $y=\sin^n x\cos nx$.

866. $y=\sin[\sin(\sin x)]$.

867. $y=\dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$.

868. $y=\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}$.

869. $y=\dfrac{1}{\cos^n x}$.

870. $y=\dfrac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$.

871. $y=\tan\dfrac{x}{2}-\cot\dfrac{x}{2}$.

872. $y=\tan x-\dfrac{1}{3}\tan^3 x+\dfrac{1}{5}\tan^5 x$.

873. $y=4\sqrt[3]{\cot^2 x}+\sqrt[3]{\cot^8 x}$.

874. $y=\sec^2\dfrac{x}{a}+\csc^2\dfrac{x}{a}$.

875. $y=\sin[\cos^2(\tan^3 x)]$.

876. $y=\mathrm{e}^{-x^2}$.

877. $y=2^{\tan\frac{1}{x}}$.

878. $y=\mathrm{e}^x(x^2-2x+2)$.

879. $y=\left[\dfrac{1-x^2}{2}\sin x-\dfrac{(1+x)^2}{2}\cos x\right]\mathrm{e}^{-x}$.

880. $y=\mathrm{e}^x\left(1+\cot\dfrac{x}{2}\right)$.

881. $y=\dfrac{\ln 3\cdot\sin x+\cos x}{3^x}$.

882. $y=\mathrm{e}^{ax}\dfrac{a\sin bx-b\cos bx}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

883. $y=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}+\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}}$.

884. $y=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\left(\dfrac{x}{a}\right)^b\ (a>0,b>0)$.

885. $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}(a>0)$.

886. $y=\lg^3 x^2$.

887. $y=\ln(\ln(\ln x))$.

888. $y=\ln(\ln^2(\ln^3 x))$.

889. $y=\dfrac{1}{2}\ln(1+x)-\dfrac{1}{4}\ln(1+x^2)-\dfrac{1}{2(1+x)}$.

890. $y=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

891. $y=\dfrac{1}{4(1+x^4)}+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^4}{1+x^4}$.

892. $y=\dfrac{1}{2\sqrt{6}}\ln\dfrac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

893. $y=\dfrac{1}{1-k}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{\sqrt{k}}{1-k}\ln\dfrac{1+x\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}}\ (0<k<1)$.

894. $y = \sqrt{x+1} - \ln\left(1 + \sqrt{x+1}\right)$.

895. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

896. $y = x \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2}$.

897. $y = x \ln^2\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - 2\sqrt{1+x^2}\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + 2x$.

898. $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \dfrac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right)$.

899. $y = \dfrac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \dfrac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}}$ $(a > 0, b > 0)$.

900. $y = \dfrac{2+3x^2}{x^4}\sqrt{1-x^2} + 3\ln\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$.

901. $y = \ln\tan\dfrac{x}{2}$.

902. $y = \ln\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

903. $y = \dfrac{1}{2}\cot^2 x + \ln\sin x$.

904. $y = \ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$.

905. $y = -\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x} + \ln\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{\sin x}}$.

906. $y = \ln\dfrac{b + a\cos x + \sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a + b\cos x}$ $(0 \leqslant |a| < |b|)$.

907. $y = \dfrac{1}{x}(\ln^3 x + 3\ln^2 x + 6\ln x + 6)$.

908. $y = \dfrac{1}{4x^4}\ln\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{16x^4}$.

909. $y = \dfrac{3}{2}\left(1 - \sqrt[3]{1+x^2}\right)^2 + 3\ln\left(1 + \sqrt[3]{1+x^2}\right)$.

910. $y = \ln\left[\dfrac{1}{x} + \ln\left(\dfrac{1}{x} + \ln\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

911. $y = x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]$.

912. $y = \ln\tan\dfrac{x}{2} - \cos x \cdot \ln\tan x$.

913. $y = \arcsin\dfrac{x}{2}$.

914. $y = \arccos\dfrac{1-x}{\sqrt{2}}$.

915. $y = \arctan\dfrac{x^2}{a}$.

916. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arccot}\dfrac{\sqrt{2}}{x}$.

917. $y = \sqrt{x} - \arctan\sqrt{x}$.

918. $y = x + \sqrt{1-x^2} \cdot \arccos x$.

919. $y = x\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}} + \arctan\sqrt{x} - \sqrt{x}$.

920. $y = \arccos\dfrac{1}{x}$.

921. $y = \arcsin(\sin x)$.

922. $y = \arccos(\cos^2 x)$.

923. $y = \arcsin(\sin x - \cos x)$.

924. $y = \arccos\sqrt{1-x^2}$.

925. $y = \arctan\dfrac{1+x}{1-x}$.

926. $y = \operatorname{arccot}\left(\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)$.

927. $y = \dfrac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\tan\dfrac{x}{2}\right)\ (a > b \geqslant 0).$

928. $y = \arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}.$

929. $y = \dfrac{1}{\arccos^2(x^2)}.$

930. $y = \arctan x + \dfrac{1}{3}\arctan(x^3).$

931. $y = \ln(1+\sin^2 x) - 2\sin x \cdot \arctan(\sin x).$

932. $y = \ln\left(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right).$

933. $y = \ln\dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}} + \dfrac{a}{b}\arctan\dfrac{x}{b}.$

934. $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}\ (a > 0).$

935. $y = \dfrac{1}{6}\ln\dfrac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}.$

936. $y = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\dfrac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\dfrac{x\sqrt{2}}{x^2-1}.$

937. $y = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x.$

938. $y = \dfrac{\arccos x}{x} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}.$

939. $y = \arctan\sqrt{x^2-1} - \dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}.$

940. $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x}.$

941. $y = \dfrac{1}{12}\ln\dfrac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\dfrac{\sqrt{3}}{2x^2-1}.$

942. $y = \dfrac{x^6}{1+x^{12}} - \operatorname{arccot} x^6.$

943. $y = \ln\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}} + \sqrt{3}\arctan\dfrac{1+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}}.$

944. $y = \arctan\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}.$

945. $y = \operatorname{arccot}\dfrac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}\ (a > 0).$

946. $y = \dfrac{3-x}{2}\sqrt{1-2x-x^2} + 2\arcsin\dfrac{1+x}{\sqrt{2}}.$

947. $y = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x} - \dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}.$

948. $y = \arctan(\tan^2 x).$

949. $y = \sqrt{1-x^2}\cdot\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} + \arcsin x.$

950. $y = x\arctan x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x)^2 - \dfrac{1}{2}(\arctan x)^2.$

951. $y = \ln(\mathrm{e}^x + \sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}).$

952. $y = \arctan(x + \sqrt{1+x^2}).$

953. $y = \arcsin\left(\dfrac{\sin a \sin x}{1-\cos a\cos x}\right).$

954. $y = \dfrac{1}{4\sqrt{3}} \ln \dfrac{\sqrt{x^2+2} - x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+2} + x\sqrt{3}} + \dfrac{1}{2} \arctan \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x}.$

955. $y = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}} - \dfrac{1}{4\sqrt{2}} \ln \dfrac{\sqrt{1+x^4} - x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4} + x\sqrt{2}}.$

956. $y = \dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x^2} - \dfrac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arccot} \dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}.$

957. $y = \arccos(\sin x^2 - \cos x^2).$

958. $y = \arcsin(\sin x^2) + \arccos(\cos x^2).$

959. $y = \mathrm{e}^{m \arcsin x}[\cos(m \arcsin x) + \sin(m \arcsin x)].$

960. (a) $y = \arctan \mathrm{e}^x - \ln \sqrt{\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}}$; (b) $y = \sqrt{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{1+x^4}}}$;

(c) $y = \operatorname{arccot} \dfrac{1}{\sqrt{\cot \dfrac{1}{x^2}}}$; (d) $y = \ln^2(\sec 2^{\sqrt[3]{x}}).$

961. $y = x + x^x + x^{x^x}$ $(x > 0).$

962. $y = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x}$ $(a > 0, x > 0).$

963. $y = \sqrt[x]{x}$ $(x > 0).$

964. $y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}.$

965.1. $y = \dfrac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}.$

965.2. $y = \left[\dfrac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}\right]^{\arctan^2 x}.$

966. $y = \log_x \mathrm{e}.$

967. $y = \ln(\cosh x) + \dfrac{1}{2\cosh^2 x}.$

968. $y = \dfrac{\cosh x}{\sinh^2 x} - \ln\left(\coth \dfrac{x}{2}\right).$

969. $y = \arctan(\tanh x).$

970. $y = \arccos\left(\dfrac{1}{\cosh x}\right).$

971. $y = \dfrac{b}{a}x + \dfrac{2\sqrt{a^2-b^2}}{a} \arctan\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}} \tanh \dfrac{x}{2}\right)$ $(0 \leqslant |b| < a).$

972. 引入中间变量 $u = \cos^2 x$, 求函数

$$y = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^4 x})$$

的导数.

利用 972 题所示的方法, 求下列函数的导数:

973. $y = (\arccos x)^2 \left[\ln^2(\arccos x) - \ln(\arccos x) + \dfrac{1}{2}\right].$

974. $y = \dfrac{1}{2} \arctan(\sqrt[4]{1+x^4}) + \dfrac{1}{4} \ln \dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}+1}{\sqrt[4]{1+x^4}-1}.$

975. $y = \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2} \arcsin(\mathrm{e}^{-x^2})}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x^2}}} + \dfrac{1}{2} \ln(1 - \mathrm{e}^{-2x^2}).$

976. $y = \dfrac{a^x}{1+a^{2x}} - \dfrac{1-a^{2x}}{1+a^{2x}} \operatorname{arccot} a^{-x}.$

977. 求下列函数的导数并作出函数及其导数的图像:

(a) $y=|x|$; (b) $y=x|x|$; (c) $y=\ln|x|$.

978. 求下列函数的导数:

(a) $y=|(x-1)^2(x+1)^3|$; (b) $y=|\sin^3 x|$;

(c) $y=\arccos\dfrac{1}{|x|}$; (d) $y=[x]\sin^2\pi x$.

求下列函数的导数并作出函数及其导数的图像:

979. $y=\begin{cases}1-x, & -\infty<x<1,\\ (1-x)(2-x), & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ -(2-x), & 2<x<+\infty.\end{cases}$

980. $y=\begin{cases}(x-a)^2(x-b)^2, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & \text{在线段 } [a,b] \text{ 之外}.\end{cases}$

981. $y=\begin{cases}x, & x<0,\\ \ln(1+x), & x\geqslant 0.\end{cases}$

982. $y=\begin{cases}\arctan x, & |x|\leqslant 1,\\ \dfrac{\pi}{4}\operatorname{sgn}x+\dfrac{x-1}{2}, & |x|>1.\end{cases}$ **983.** $y=\begin{cases}x^2\mathrm{e}^{-x^2}, & |x|\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{\mathrm{e}}, & |x|>1.\end{cases}$

984. 所给函数 $y=f(x)$ 的对数的导数称为此函数的对数导数:

$$\frac{y'}{y}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln f(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}\quad (f(x)>0).$$

求下列函数 y 的对数导数:

(a) $y=x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; (b) $y=\dfrac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}$;

(c) $y=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n}$; (d) $y=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^n$.

985. 设 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 为 x 的可微函数. 求下列函数 y 的导数:

(a) $y=\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$; (b) $y=\arctan\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$;

(c) $y=\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}$ $(\varphi(x)\neq 0,\ \psi(x)>0)$;

(d) $y=\log_{\varphi(x)}\psi(x)$ $(\varphi(x)>0,\ \psi(x)>0)$.

986.1. 求 y', 设

(a) $y=f(x^2)$; (b) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$;

(c) $y=f(\mathrm{e}^x)\cdot\mathrm{e}^{f(x)}$; (d) $y=f\{f[f(x)]\}$,

其中 $f(u)$ 为可微函数.

986.2. 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-1000)$, 求 $f'(0)$.

987. 证明: n 阶行列式微分法:

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \cdots & f_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}' = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

988. 设

$$F(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix},$$

求 $F'(x)$.

989. 设

$$F(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix},$$

求 $F'(x)$.

990. 已知函数的图像, 近似地作出其导数的图像.

991. 证明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

有不连续的导数.

992. 在什么条件下, 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(a) 在 $x=0$ 处是连续的; (b) 在 $x=0$ 处可微; (c) 在 $x=0$ 处有连续的导数?

993. 在什么条件下, 函数

$$f(x) = \begin{cases} |x|^n \sin \dfrac{1}{|x|^m}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases} \qquad (m > 0)$$

(a) 于坐标原点的邻域上有有界的导数; (b) 在此邻域上有无穷导数?

994. 设

$$f(x) = (x-a)\varphi(x),$$

其中函数 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处是连续的, 求 $f'(a)$.

995. 设

$$f(x) = |x-a|\varphi(x),$$

其中 $\varphi(x)$ 为连续函数且 $\varphi(a) \neq 0$, 证明: 此函数在 a 点没有导数.

单侧导数 $f'_-(a)$ 及 $f'_+(a)$ 等于什么?

996. 举出在已知点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 没有导数的连续函数的例子.

997. 证明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在点 $x = 0$ 的任何邻域上都有不可微点, 但在该点是可微的. 作出此函数的略图.

998. 证明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

仅在 $x = 0$ 时有导数.

999. 研究下列函数的可微性:

(a) $y = |(x-1)(x-2)^2(x-3)^3|$; (b) $y = |\cos x|$;

(c) $y = |\pi^2 - x^2|\sin^2 x$; (d) $y = \arcsin(\cos x)$;

(e) $y = \begin{cases} \dfrac{x-1}{4}(x+1)^2, & |x| \leqslant 1, \\ |x| - 1, & |x| > 1. \end{cases}$

求函数 $f(x)$ 的左导数 $f'_-(x)$ 和右导数 $f'_+(x)$, 设:

1000. $f(x) = |x|$.

1001. $f(x) = [x]\sin\pi x$.

1002. $f(x) = \begin{cases} x\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

1003. $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$.

1004. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

1005. $f(x) = \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-x^2}}$.

1006. $f(x) = |\ln|x||$ $(x \neq 0)$.

1007. $f(x) = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

1008. $f(x) = \begin{cases} (x-2)\arctan\dfrac{1}{x-2}, & x \neq 2, \\ 0, & x = 2. \end{cases}$

1009.1. 证明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在点 $x = 0$ 连续, 但在此点既无左导数, 又无右导数.

1009.2. 设 x_0 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点. 表达式

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to -0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - 0)}{h},$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to +0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + 0)}{h}$$

称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的广义单侧导数 (左导数和右导数).

求函数 $f(x)$ 在间断点 x_0 的 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$:

(a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x^3}}{x}$; (b) $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$; (c) $f(x)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$.

1010. 设

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant x_0,\\ ax+b, & x>x_0.\end{cases}$$

为了使函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续而且可微, 应当如何选取系数 a 和 b?

1011. 设

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\leqslant x_0,\\ ax+b, & x>x_0,\end{cases}$$

其中函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处为左可微的. 应当如何选取系数 a 和 b, 使函数 $F(x)$ 在点 x_0 处连续而且可微?

1012. 适当地选定参数 A 和 c, 用立方抛物线

$$y=A(x-a)(x-b)(x-c)$$

在闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上把两条射线:

$$y=k_1(x-a)\quad(-\infty<x<a)\quad 及\quad y=k_2(x-b)\quad(b<x<+\infty)$$

光滑地连接起来.

1013. 用抛物线 $y=a+bx^2$ $(|x|\leqslant c)$ (其中 a 与 b 为未知的参数) 去补充曲线 $y=\dfrac{m^2}{|x|}$ $(|x|>c)$, 以便得到一条光滑曲线.

1014. 若 (a) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有导数, 而函数 $g(x)$ 在此点没有导数; (b) 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者在点 x_0 都没有导数, 可否断定它们的和

$$F(x)=f(x)+g(x)$$

在点 $x=x_0$ 没有导数?

1015. 若 (a) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有导数, 而函数 $g(x)$ 在此点没有导数; (b) 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者在点 x_0 都没有导数, 可否断定它们的积

$$F(x)=f(x)g(x)$$

在点 $x=x_0$ 没有导数?

研究两个例子:

(a) $f(x)=x,\ g(x)=|x|,\ x_0=0$; (b) $f(x)=|x|,\ g(x)=|x|,\ x_0=0$.

1016. 若 (a) 函数 $f(x)$ 于点 $x=g(x_0)$ 有导数, 而函数 $g(x)$ 于点 $x=x_0$ 没有导数; (b) 函数 $f(x)$ 于点 $x=g(x_0)$ 没有导数, 而函数 $g(x)$ 于点 $x=x_0$ 有导数; (c) 函数 $f(x)$ 于点 $x=g(x_0)$ 没有导数, 函数 $g(x)$ 于点 $x=x_0$ 没有导数, 则函数

$$F(x)=f(g(x))$$

于已知点 $x=x_0$ 的可微性怎样?

研究三个例子:

(a) $f(x)=x^2,\ g(x)=|x|,\ x_0=0$; (b) $f(x)=|x|,\ g(x)=x^2,\ x_0=0$;

(c) $f(x)=2x+|x|,\ g(x)=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{3}|x|,\ x_0=0.$

1017. 函数

$$y=x+\sqrt[3]{\sin x}$$

的图像在哪些点处有竖直切线? 作出此图像.

1018. 函数 $f(x)$ 在其间断点可否有: (a) 有限的导数; (b) 无穷的导数? 研究例子:

$$f(x)=\operatorname{sgn} x.$$

1019. 若函数 $f(x)$ 在有限的区间 (a,b) 上可微, 且

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty,$$

则是否必有

$$(1)\ \lim_{x\to a} f'(x)=\infty; \qquad (2)\ \overline{\lim_{x\to a}}|f'(x)|=+\infty?$$

研究例子: $f(x)=\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to 0$ 时.

1020. 若函数 $f(x)$ 在有限的区间 (a,b) 上可微, 且

$$\lim_{x\to a} f'(x)=\infty,$$

则是否必有

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty?$$

研究例子: $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 当 $x\to 0$ 时.

1021. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0,+\infty)$ 上可微, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在. 由此能否推出 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在? 研究例子:

$$f(x)=\frac{\sin(x^2)}{x}.$$

1022. 设有界函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0,+\infty)$ 上可微, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在. 由此可否推出有限的或无穷的 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在? 研究例子:

$$f(x)=\cos(\ln x).$$

1023. 对函数之间的不等式可否逐项微分?

1024. 导出求和公式:

$$\text{(a)}\ \ P_n=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1},$$
$$Q_n=1^2+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1};$$

提示: 研究 $(x+x^2+\cdots+x^n)'$.

$$\text{(b)}\ \ S_n=\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx,$$
$$T_n=\cos x+2\cos 2x+\cdots+n\cos nx.$$

1025. 导出求和公式:

$$S_n=\cosh x+2\cosh 2x+\cdots+n\cosh nx.$$

提示: $S_n=(\sinh x+\sinh 2x+\cdots+\sinh nx)'$.

1026. 利用恒等式

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}$$

推出求和公式:

$$S_n=\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\tan\frac{x}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}.$$

1027. 证明: 可微偶函数的导数为奇函数, 而可微奇函数的导数为偶函数.

给出这个事实的几何解释.

1028. 证明: 可微周期函数的导数仍为具有相同周期的周期函数.

1029. 若圆半径以 2 cm/s 的速度匀速增加, 则当圆半径 $R=10\,\text{cm}$ 时, 圆面积增加的速度如何?

1030. 若矩形的一边以 1 m/s 的速度缩短, 另一边以 2 m/s 的速度伸长, 则当这两条边达到 $x=20\,\text{m}$ 和 $y=15\,\text{m}$ 时, 矩形的面积和对角线变化的速度如何?

1031. 二轮船 A 和 B 从同一码头同时出发, A 船往北, B 船往东. 若 A 船的速度为 30 km/h, B 船的速度为 40 km/h, 问二船间的距离增加的速度如何?

1032. 设

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 2x-2, & 2<x<+\infty,\end{cases}$$

又设 $S(x)$ 表示由曲线 $y=f(x)$, 轴 Ox 及通过点 x $(x\geqslant 0)$ 且垂直于 Ox 的直线三者围成的面积. 写出函数 $S(x)$ 的解析表达式, 求出导数 $S'(x)$, 并作出函数 $y=S'(x)$ 的图像.

1033. 函数 $S(x)$ 是由圆弧 $y=\sqrt{a^2-x^2}$、轴 Ox 及分别通过点 O 和 x $(|x|\leqslant a)$ 且垂直于轴 Ox 的两条直线四者围成的面积. 写出函数 $S(x)$ 的解析表达式, 求出导数 $S'(x)$, 并作此导数 $y=S'(x)$ 的图像.

§2. 反函数的导数. 用参数形式给出的函数的导数. 隐函数的导数

1. 反函数的导数. 导数 $f'(x)\neq 0$ 的可微函数 $y=f(x)(a<x<b)$ 具有单值连续的反函数 $x=f^{-1}(y)$, 此反函数也可微, 并且成立公式

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}.$$

2. 用参数形式给出的函数的导数. 若方程组

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}\quad(a<t<b),$$

其中 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 为可微函数, 且 $\varphi'(t)\neq 0$, 在某区域内确定 y 为 x 的单值连续函数:

$$y=\psi(\varphi^{-1}(x)),$$

则此函数的导数可用公式

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$$

求出.

3. 隐函数的导数. 若可微函数 $y = y(x)$ 满足方程

$$F(x,y)=0,$$

则此隐函数之导数 $y' = y'(x)$ 可从以下方程求得:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[F(x,y)]=0,$$

其中 $F(x,y)$ 是变量 x 的复合函数.

(关于隐函数微分法的更详细的叙述可参阅第六章 §3.)

1034. 证明: 由方程 $y^3+3y=x$ 确定的单值函数 $y=y(x)$ 存在, 并求它的导数 y'_x.

1035. 证明: 由方程 $y-\varepsilon\sin y = x$ $(0\leqslant\varepsilon<1)$ 确定的单值函数 $y=y(x)$ 存在, 并求它的导数 y'_x.

1036. 设:

(a) $y = x+\ln x$ $(x>0)$;　　(b) $y=x+\mathrm{e}^x$;

(c) $y=\sinh x$;　　(d) $y=\tanh x$.

求反函数 $x=x(y)$ 的存在域, 并求它们的导数.

1037. 设:

(a) $y=2x^2-x^4$;　　(b) $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$;　　(c) $y=2\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}$.

选出反函数 $x=x(y)$ 的单值连续的各支, 求它们的导数并作其图像.

1038. 作出函数 $y=y(x)$ 的略图, 并求其导数 $y'_x(x)$. 设: $x=-1+2t-t^2, y=2-3t+t^3$. 当 $x=0$ 及 $x=-1$ 时, $y'_x(x)$ 等于什么? 在何点 $M(x,y)$ 的导数 $y'_x(x)=0$?

求导数 y'_x (参数是正数), 设:

1039. $x=\sqrt[3]{1-\sqrt{t}}, y=\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}$.　　**1040.** $x=\sin^2 t, y=\cos^2 t$.

1041. $x=a\cos t, y=b\sin t$.　　**1042.** $x=a\cosh t, y=b\sinh t$.

1043. $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$.　　**1044.** $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$.

1045. $x=\mathrm{e}^{2t}\cos^2 t, y=\mathrm{e}^{2t}\sin^2 t$.

1046. $x=\arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}, y=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

1047. 证明: 由方程组

$$\begin{cases} x=2t+|t|,\\ y=5t^2+4t|t| \end{cases}$$

所确定的函数 $y=y(x)$ 当 $t=0$ 时可微, 但它的导数在此点不能用普通的公式求得.

求下列隐函数的导数 y'_x:

1048. $x^2+2xy-y^2=2x$.

当 $x=2$ 与 $y=4$ 时及当 $x=2$ 与 $y=0$ 时, y' 等于什么?

1049. $y^2=2px$ (抛物线).　　**1050.** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (椭圆).

1051. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ (抛物线).　　**1052.** $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ (星形线).

1053. $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ (对数螺线).

1054. 设 y'_x, 设:

(a) $r=a\varphi$ (阿基米德螺线);　　(b) $r=a(1+\cos\varphi)$ (心脏线);

(c) $r=ae^{m\varphi}$ (对数螺线),

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $\varphi=\arctan\dfrac{y}{x}$ 是极坐标.

§3. 导数的几何意义

1. 切线和法线的方程. 可微函数 $y=f(x)$ 在其图像上之一点 $M(x,y)$ 处的切线 MT 和法线 MN (图 7) 的方程分别具有以下形式:

$$Y-y=y'(X-x),\quad Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x),$$

其中 X, Y 为切线或法线上的点的坐标, 而 $y'=f'(x)$ 为切点处导数的值.

2. 切线长和法线长. 对于与切线和法线有关的一些线段: PT 为次切线, PN 为次法线, MT 为切线, MN 为法线, 考虑到 $\tan\alpha=y'$ (图 7), 我们得到下列值:

$$PT=\left|\frac{y}{y'}\right|,\quad PN=|yy'|,\quad MT=\left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2},\quad MN=|y|\sqrt{1+y'^2}.$$

3. 切线与切点的径向量间的夹角. 若 $r=f(\varphi)$ 为曲线的极坐标方程, β 为切线 MT 与切点 M 的径向量 OM 所成的角 (图 8), 则 $\tan\beta=\dfrac{r}{r'}$.

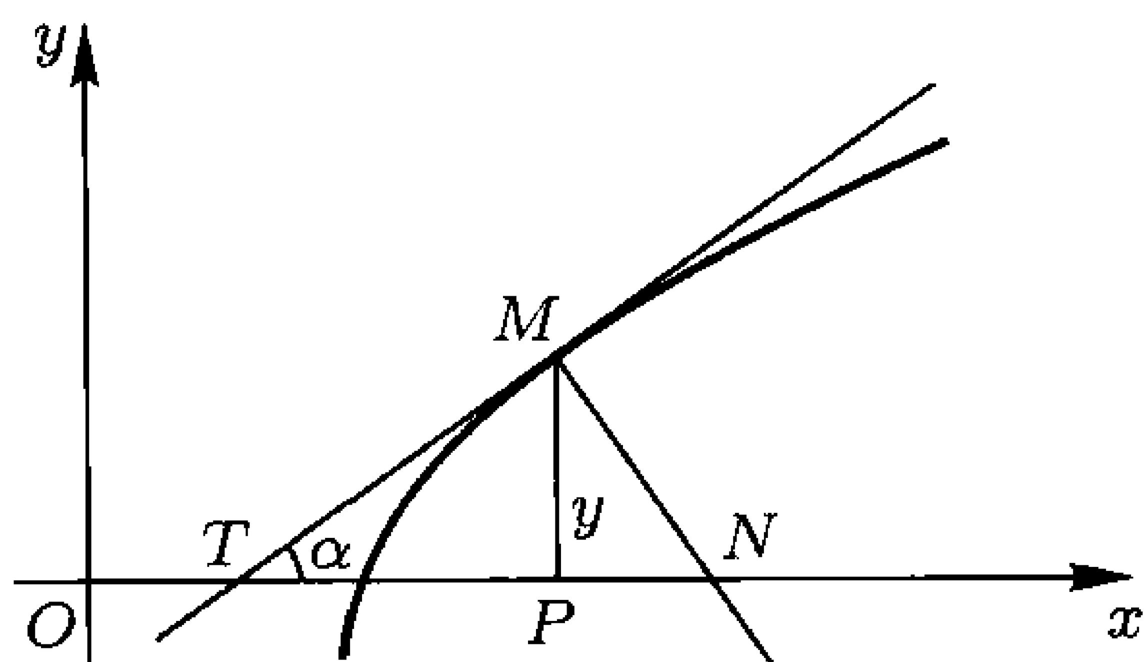


图 7

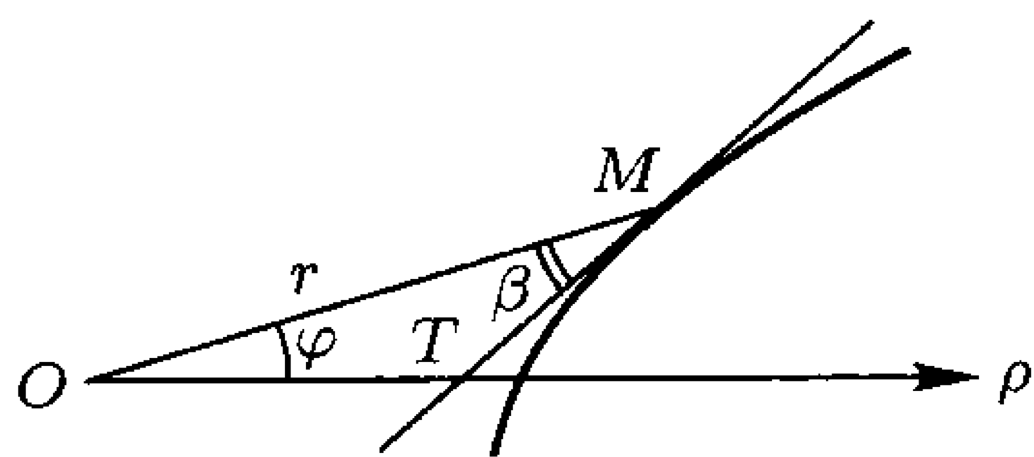


图 8

1055. 写出曲线

$$y=(x+1)\sqrt[3]{3-x}$$

在下列各点处的切线和法线方程:

(a) $A(-1,0)$;　　(b) $B(2,3)$;　　(c) $C(3,0)$.

1056. 在曲线

$$y=2+x-x^2$$

上的哪些点, 其切线 (a) 平行于 Ox 轴; (b) 平行于第一象限角的平分线?

1057. 证明: 抛物线

$$y=a(x-x_1)(x-x_2)\quad (a\neq 0, x_1<x_2)$$

与 Ox 轴相交所成的两角 α 及 β $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}, 0<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 彼此相等.

1058. 在曲线

$$y = 2\sin x \quad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$$

上求出 “曲线的坡度” (即 $|y'|$) 大于 1 的部分.

1059. 函数

$$y = x \quad 及 \quad y_1 = x + 0.01\sin 1000\,\pi x$$

二者相差不大于 0.01. 这些函数的导数的差的最大值如何? 作出相应的图像.

1060. 曲线 $y = \ln x$ 与 Ox 轴相交的角如何?

1061. 曲线 $y = x^2$ 与 $x = y^2$ 相交的角如何?

1062. 曲线 $y = \sin x$ 与 $y = \cos x$ 相交的角如何?

1063.1. 如何选择参数 n, 可使曲线

$$y = \arctan nx \quad (n > 0)$$

与 Ox 轴相交所成的角大于 89°?

1063.2. 证明: 曲线 $y = |x|^\alpha$ 在不同情形下与下列坐标轴相切:

(a) 当 $0 < \alpha < 1$ 时与 Oy 轴相切;　　(b) 当 $1 < \alpha < +\infty$ 时与 Ox 轴相切.

1063.3. 证明: 对于函数

$$y = \begin{cases} |x|^\alpha, & x \neq 0, \alpha \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

的图像, 经过点 $A(0,1)$ 的割线的极限位置是 Oy 轴.

1064. 求出曲线: (a) $y = \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-a^2x^2}}$ 于点 $x = 0$ 处; (b) $y = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$ 于点 $x = 1$ 处的左切线与右切线间的夹角.

1065. 证明: 对数螺线 $r = a\mathrm{e}^{m\varphi}$ (a 及 m 为常数) 的切线与切点的径向量所成的角度为一常量.

1066. 求曲线 $y = ax^n$ 的次切线长, 由此给出作此曲线的切线的方法.

1067. 证明: 对于抛物线 $y^2 = 2px$, (a) 次切线长等于切点的横坐标 (绝对值) 的两倍; (b) 次法线为一常量. 给出作抛物线的切线的方法.

1068. 证明: 指数曲线 $y = a^x$ $(a > 0)$ 有定长的次切线. 给出作指数曲线的切线的方法.

1069. 求悬链线

$$y = a\cosh\frac{x}{a}$$

上任何点 $M(x_0, y_0)$ 处的法线长.

1070. 证明: 星形线

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad (a > 0)$$

的切线介于坐标轴间的部分的长为一常量.

1071. 若抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 Ox 轴相切, 则系数 a, b, c 间的关系如何?

1072. 在什么条件下立方抛物线

$$y = x^3 + px + q$$

与 Ox 轴相切?

1073. 当参数 a 为何值时, 抛物线 $y = ax^2$ 与曲线 $y = \ln x$ 相切?

1074. 证明: 曲线

$$y = f(x) \quad (f(x) > 0)$$

和

$$y = f(x)\sin ax$$

于公共点彼此相切, 其中 $f(x)$ 为可微函数.

1075. 证明: 双曲线族 $x^2 - y^2 = a$ 及 $xy = b$ 形成一*正交网*, 即这两族曲线成直角相交.

1076. 证明: 抛物线族

$$y^2 = 4a(a - x) \quad (a > 0)$$

及

$$y^2 = 4b(b + x) \quad (b > 0)$$

形成正交网.

1077. 写出曲线 $x = 2t - t^2$ 及 $y = 3t - t^3$ 在下列各点的切线和法线的方程: (a) $t = 0$; (b) $t = 1$.

1078. 写出曲线

$$x = \frac{2t + t^2}{1 + t^3}, \quad y = \frac{2t - t^2}{1 + t^3}$$

在下列各点的切线与法线方程: (a) $t = 0$, (b) $t = 1$, (c) $t = \infty$.

1079. 写出摆线 (旋轮线)

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

上任意一点 $t = t_0$ 处的切线方程. 给出摆线的切线的作法.

1080. 证明: 曳物线

$$x = a\left(\ln\tan\frac{t}{2} + \cos t\right), \quad y = a\sin t \quad (a > 0, 0 < t < \pi)$$

有长度不变的切线.

写出下列曲线在指定点的切线与法线方程:

1081. $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1, M(6, 6.4)$.

1082. $xy + \ln y = 1, M(1, 1)$.

§4. 函数的微分

1. 函数的微分. 若自变量为 x 的函数 $y = f(x)$ 之增量可表示为以下形式:

$$\Delta y = A(x)\,\mathrm{d}x + o(\mathrm{d}x),$$

其中 $\mathrm{d}x = \Delta x$, 则此增量的线性部分称为*函数 y 的微分*:

$$\mathrm{d}y = A(x)\,\mathrm{d}x.$$

函数 $y=f(x)$ 的微分存在的充分必要条件为存在有限的导数 $y'=f'(x)$, 这时我们有

$$\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

若自变量 x 为另一自变量的函数, 公式 (1) 于这种情形下仍然有效 (一阶微分的不变性).

2. 函数的微小增量的估计. 为了计算可微函数 $f(x)$ 的微小增量, 可利用公式

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x;$$

若 $f'(x)\neq 0$, 则当 $|\Delta x|$ 充分小时, 此公式的相对误差可以任意的小.

例如, 若自变量 x 的绝对误差等于 Δ_x, 则函数 $y=f(x)$ 的绝对误差 Δ_y 和相对误差 δ_y 可用下列公式近似地表示出来:

$$\Delta_y=|y'|\Delta_x,\quad \delta_y=\left|\frac{y'}{y}\right|\Delta_x.$$

1083. 设

(a) $\Delta x=1$; (b) $\Delta x=0.1$; (c) $\Delta x=0.01$.

对于函数

$$f(x)=x^3-2x+1,$$

求: (1) $\Delta f(1)$, (2) $\mathrm{d}f(1)$, 并进行对比.

1084. 设运动方程由公式

$$x=5t^2$$

给出, 其中 t 以 s (秒) 来度量, x 以 m (米) 来度量. 若 (a) $\Delta t=1\,\mathrm{s}$, (b) $\Delta t=0.1\,\mathrm{s}$, (c) $\Delta t=0.001\,\mathrm{s}$, 对于 $t=2\,\mathrm{s}$ 的时刻, 求路程的增量 Δx 及微分 $\mathrm{d}x$, 并作比较.

求下列函数 y 的微分:

1085. $y=\dfrac{1}{x}$.

1086. $y=\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}$ $(a\neq 0)$.

1087. $y=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|$.

1088. $y=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|$.

1089. $y=\arcsin\dfrac{x}{a}$ $(a\neq 0)$.

1090. 求:

(a) $\mathrm{d}(x\mathrm{e}^x)$;

(b) $\mathrm{d}(\sin x-x\cos x)$;

(c) $\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$;

(d) $\mathrm{d}\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$;

(e) $\mathrm{d}(\sqrt{a^2+x^2})$;

(f) $\mathrm{d}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$;

(g) $\mathrm{d}\ln(1-x^2)$;

(h) $\mathrm{d}\left(\arccos\dfrac{1}{|x|}\right)$;

(i) $\mathrm{d}\left[\dfrac{\sin x}{2\cos^2 x}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|\right]$.

设 u, v, w 为 x 的可微函数, 求下列函数 y 的微分:

1091. $y=uvw$.

1092. $y=\dfrac{u}{v^2}$.

1093. $y = \dfrac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}$.

1094. $y = \arctan\dfrac{u}{v}$.

1095. $y = \ln\sqrt{u^2+v^2}$.

1096. 求:

(a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^3}(x^3-2x^6-x^9)$;

(b) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$;

(c) $\dfrac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}(\cos x)}$;

(d) $\dfrac{\mathrm{d}(\tan x)}{\mathrm{d}(\cot x)}$;

(e) $\dfrac{\mathrm{d}(\arcsin x)}{\mathrm{d}(\arccos x)}$.

1097. 有半径为 $R = 100\,\mathrm{cm}$ 及圆心角 $\alpha = 60^\circ$ 的扇形. 若 (a) 其半径 R 增加 $1\,\mathrm{cm}$; (b) 角 α 减少 $30'$, 则扇形面积的变化如何? 求出精确的和近似的解.

1098. 摆的振动周期按下式确定:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

其中 l 为摆长, $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ 为重力加速度.

为了使周期 T 增大 $0.05\,\mathrm{s}$, 对摆长 $l = 20\,\mathrm{cm}$ 需要作多少修改?

利用函数之微分代替其增量, 求下列各式之近似值:

1099. $\sqrt[3]{1.02}$.

1100. $\sin 29^\circ$.

1101. $\cos 151^\circ$.

1102. $\arctan 1.05$.

1103. $\lg 11$.

1104.1. 证明近似公式:

$$\sqrt{a^2+x} \approx a + \frac{x}{2a} \quad (a>0),$$

其中 $|x| \ll a$ (正数 A 和 B 间的关系式 $A \ll B$ 表示 A 远小于 B). 利用此公式近似地计算:

(a) $\sqrt{5}$; (b) $\sqrt{34}$; (c) $\sqrt{120}$,

并与平方根表中的数值作比较.

1104.2. 证明公式:

$$\sqrt{a^2+x} = a + \frac{x}{2a} - r \quad (a>0, x>0),$$

其中 $0 < r < \dfrac{x^2}{8a^3}$.

1105. 证明近似公式:

$$\sqrt[n]{a^n+x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}} \quad (a>0),$$

其中 $|x| \ll a$. 利用此公式近似地计算:

(a) $\sqrt[3]{9}$; (b) $\sqrt[4]{80}$; (c) $\sqrt[7]{100}$; (d) $\sqrt[10]{1000}$.

1106. 正方形的边 $x = 2.4\,\mathrm{m} \pm 0.05\,\mathrm{m}$. 由此计算所得正方形的面积的相对误差和绝对误差如何?

1107. 为了在 1% 的精度下计算出球的体积, 问度量球半径 R 时所允许的相对误差如何?

1108. 为了确定重力加速度, 可以利用摆的振动公式 $g = \dfrac{4\pi^2 l}{T^2}$, 其中 l 为摆长, T 为振动周期. 当测量 (a) 长度 l, (b) 周期 T 时, 相对误差 δ 如何影响 g 的值?

1109. 求数 x $(x > 0)$ 的常用对数 (以 10 为底) 的绝对误差, 设此数的相对误差等于 δ.

1110. 证明: 根据正切对数表求得的角度比根据具有同样多位小数的正弦对数表求得的角度更为精确.

§5. 高阶的导数和微分

1. 基本定义. 函数 $y = f(x)$ 的高阶导数由下列关系式顺次地定义出来 (假设相应运算都有意义!):

$$f^{(n)}(x) = \{f^{(n-1)}(x)\}' \quad (n = 2, 3, \cdots).$$

若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有连续的导数 $f^{(n)}(x)$, 则简写为: $f(x) \in C^{(n)}(a, b)$. 特别地, 若 $f(x)$ 在 (a, b) 上有各阶导数, 并且这些导数是连续的, 则使用记号 $f(x) \in C^{(\infty)}(a, b)$.

函数 $y = f(x)$ 的高阶微分是根据下列公式顺次定义的:

$$\mathrm{d}^n y = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1} y) \quad (n = 2, 3, \cdots),$$

其中认为 $\mathrm{d}^1 y = \mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x$.

若 x 为自变量, 则认为:

$$\mathrm{d}^2 x = \mathrm{d}^3 x = \cdots = 0.$$

这时成立公式

$$\mathrm{d}^n y = y^{(n)}\,\mathrm{d}x^n \quad 及 \quad y^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}.$$

2. 基本公式.

I. $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a > 0)$;　$(\mathrm{e}^x)^{(n)} = \mathrm{e}^x$.　II. $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \dfrac{n\pi}{2})$.

III. $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \dfrac{n\pi}{2})$.　IV. $(x^m)^{(n)} = m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$.

V. $(\ln x)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

3. 莱布尼茨公式. 若函数 $u = \varphi(x)$ 及 $v = \psi(x)$ 有 n 阶导数 (n 阶可微), 则

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_n^i u^{(i)} v^{(n-i)},$$

其中 $u^{(0)} = u, v^{(0)} = v, \mathrm{C}_n^i$ 为由 n 个元素每次取 i 个的组合数.

类似地对于微分 $\mathrm{d}^n(uv)$ 得:

$$\mathrm{d}^n(uv) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_n^i\,\mathrm{d}^{n-i}u\,\mathrm{d}^i v,$$

其中认为 $\mathrm{d}^0 u = u$ 及 $\mathrm{d}^0 v = v$.

求 y'', 设:

1111. $y = x\sqrt{1 + x^2}$.　　**1112.** $y = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

1113. $y = \mathrm{e}^{-x^2}$.　**1114.** $y = \tan x$.

1115. $y = (1+x^2)\arctan x$.　**1116.** $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1117. $y = x\ln x$.　**1118.** $y = \ln f(x)$.

1119. $y = x[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$.

1120. 设 $y = \mathrm{e}^{\sin x}\cos(\sin x)$, 求 $y(0)$, $y'(0)$ 及 $y''(0)$.

设 $u = \varphi(x)$ 及 $v = \psi(x)$ 为二阶可微函数. 求 y'', 设:

1121. $y = u^2$.　**1122.** $y = \ln\dfrac{u}{v}$.

1123. $y = \sqrt{u^2+v^2}$.　**1124.** $y = u^v$ $(u > 0)$.

设 $f(x)$ 为三阶可微函数. 求 y'' 及 y''', 设:

1125. $y = f(x^2)$.　**1126.** $y = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1127. $y = f(\mathrm{e}^x)$.　**1128.** $y = f(\ln x)$.

1129. $y = f(\varphi(x))$, 其中 $\varphi(x)$ 是充分多次可微函数.

1130. 对于以下两种情形: (a) x 为自变量, (b) x 为中间变量, 求函数 $y = \mathrm{e}^x$ 的 d^2y.

若 x 为自变量, 求 d^2y, 设:

1131. $y = \sqrt{1+x^2}$.　**1132.** $y = \dfrac{\ln x}{x}$.　**1133.** $y = x^x$.

令 u 及 v 为变量 x 的二阶可微函数, 求 d^2y, 设:

1134. $y = uv$.　**1135.** $y = \dfrac{u}{v}$.

1136. $y = u^m v^n$ (m 及 n 为常数).　**1137.** $y = a^u$ $(a > 0)$.

1138. $y = \ln\sqrt{u^2+v^2}$.　**1139.** $y = \arctan\dfrac{u}{v}$.

对以参数形式给出的函数 $y = y(x)$ 的导数 y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3}, 设:

1140. $x = 2t - t^2, y = 3t - t^3$.　**1141.** $x = a\cos t, y = a\sin t$.

1142. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$.

1143. $x = \mathrm{e}^t\cos t, y = \mathrm{e}^t\sin t$.　**1144.** $x = f'(t), y = tf'(t) - f(t)$.

1145. 设函数 $y = f(x)$ 充分多次可微. 求反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的导数 x', x'', x''', $x^{(4)}$ (设这些导数都存在).

求由下列隐函数给出的 $y = y(x)$ 的 y'_x, y''_{x^2} 及 y'''_{x^3}:

1146. $x^2 + y^2 = 25$. 在点 $M(3,4)$ 的 y', y'' 及 y''' 等于什么?

1147. $y^2 = 2px$.　**1148.** $x^2 - xy + y^2 = 1$.

求 y'_x 及 y''_{x^2}, 设:

1149. $y^2 + 2\ln y = x^4$.　**1150.** $\sqrt{x^2+y^2} = a\mathrm{e}^{\arctan\frac{y}{x}}$ $(a > 0)$.

1151. 设函数 $f(x)$ 当 $x \leqslant x_0$ 时有定义且二阶可微. 应当如何选择系数 a, b 及 c, 使函数

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x \leqslant x_0, \\ a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c, & x > x_0 \end{cases}$$

是二阶可微的函数?

1152. 质点作直线运动的规律为

$$s = 10 + 20t - 5t^2.$$

求其运动速度和加速度. 在 $t = 2$ 的时刻, 速度与加速度等于什么?

1153. 质点 $M(x, y)$ 沿圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ 匀速运动, 运动一周的时间为 T. 若质点在时刻 $t = 0$ 位于点 $M_0(a, 0)$, 求质点的速度和加速度在 Ox 轴上的投影 v 和 w.

1154. 在重力场中, 质点 $M(x, y)$ 在竖直平面 Oxy 内以初速度 v_0 沿与水平面成 α 角的方向抛出. 建立运动方程 (忽略空气阻力), 并确定速度 v 和加速度 w 的大小及运动轨迹. 质点的最大上升高度和射程等于多少?

1155. 质点的运动方程为

$$x = 4\sin\omega t - 3\cos\omega t, \quad y = 3\sin\omega t + 4\cos\omega t \quad (\omega \text{ 为常数}).$$

求运动轨迹、速度与加速度的大小.

求下列指定阶的导数:

1156. $y = x(2x-1)^2(x+3)^3$, 求 $y^{(6)}$ 及 $y^{(7)}$.

1157. $y = \dfrac{a}{x^m}$, 求 y'''.

1158. $y = \sqrt{x}$, 求 $y^{(10)}$.

1159. $y = \dfrac{x^2}{1-x}$, 求 $y^{(8)}$.

1160. $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, 求 $y^{(100)}$.

1161. $y = x^2 \mathrm{e}^{2x}$, 求 $y^{(20)}$.

1162. $y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$, 求 $y^{(10)}$.

1163. $y = x\ln x$, 求 $y^{(5)}$.

1164. $y = \dfrac{\ln x}{x}$, 求 $y^{(5)}$.

1165. $y = x^2 \sin 2x$, 求 $y^{(50)}$.

1166. $y = \dfrac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1-3x}}$, 求 y'''.

1167. $y = \sin x \sin 2x \sin 3x$, 求 $y^{(10)}$.

1168. $y = x \sinh x$, 求 $y^{(100)}$.

1169. $y = \mathrm{e}^x \cos x$, 求 $y^{(4)}$.

1170. $y = \sin^2 x \ln x$, 求 $y^{(6)}$.

在下列各例中, 视 x 为自变量, 求指定阶的微分.

1171. $y = x^5$, 求 $\mathrm{d}^5 y$.

1172. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, 求 $\mathrm{d}^3 y$.

1173. $y = x\cos 2x$, 求 $\mathrm{d}^{10} y$.

1174. $y = \mathrm{e}^x \ln x$, 求 $\mathrm{d}^4 y$.

1175. $y = \cos x \cdot \cosh x$, 求 $\mathrm{d}^6 y$.

设 u 为 x 的充分多次可微函数, 在下列各例中求指定阶的微分.

1176. $y = u^2$, 求 $\mathrm{d}^{10} y$.

1177. $y = \mathrm{e}^u$, 求 $\mathrm{d}^4 y$.

1178. $y=\ln u$, 求 d^3y.

1179. 视 x 为某个自变量的函数, 由函数 $y=f(x)$ 求 d^2y, d^3y 及 d^4y.

1180. 以变量 x 和 y 的逐次微分来表示函数 $y=f(x)$ 的导数 y'' 及 y''', 但不假定 x 为自变量.

1181. 证明: 函数

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x,$$

其中 C_1 及 C_2 为任意的常数, 满足方程

$$y''+y=0.$$

1182. 证明: 函数

$$y=C_1\cosh x+C_2\sinh x,$$

其中 C_1 及 C_2 为任意的常数, 满足方程

$$y''-y=0.$$

1183. 证明: 函数

$$y=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2x},$$

其中 C_1 及 C_2 为任意的常数, λ_1 及 λ_2 为常数, 满足方程

$$y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2y=0.$$

1184. 证明: 函数

$$y=x^n[C_1\cos(\ln x)+C_2\sin(\ln x)],$$

其中 C_1 及 C_2 为任意的常数, n 为常数, 满足方程

$$x^2y''+(1-2n)xy'+(1+n^2)y=0.$$

1185. 证明: 函数

$$y=\mathrm{e}^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+C_2\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+\mathrm{e}^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_3\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+C_4\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

其中 C_1,C_2,C_3 及 C_4 为任意常数, 满足方程

$$y^{(4)}+y=0.$$

1186. 证明: 若函数 $f(x)$ 有 n 阶导数, 则

$$[f(ax+b)]^{(n)}=a^nf^{(n)}(ax+b).$$

1187. 若

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,$$

求 $P^{(n)}(x)$.

求 $y^{(n)}$, 设:

1188. $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

1189. $y=\dfrac{1}{x(1-x)}$.

1190. $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$. 提示: 分解函数为最简分式.

1191. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$.

1192. $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$.

1193. $y = \sin^2 x$.

1194. $y = \cos^2 x$.

1195. $y = \sin^3 x$.

1196. $y = \cos^3 x$.

1197. $y = \sin ax \sin bx$.

1198. $y = \cos ax \cos bx$.

1199. $y = \sin ax \cos bx$.

1200. $y = \sin^2 ax \cos bx$.

1201. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

1202. $y = x \cos ax$.

1203. $y = x^2 \sin ax$.

1204. $y = (x^2 + 2x + 2)\mathrm{e}^{-x}$.

1205. $y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.

1206. $y = \mathrm{e}^x \cos x$.

1207. $y = \mathrm{e}^x \sin x$.

1208. $y = \ln \dfrac{a + bx}{a - bx}$.

1209. $y = \mathrm{e}^{ax} P(x)$, 其中 $P(x)$ 为多项式.

1210. $y = x \sinh x$.

求 $\mathrm{d}^n y$, 设:

1211. $y = x^n \mathrm{e}^x$.

1212. $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

1213. 证明等式:

(1) $[\mathrm{e}^{ax} \sin(bx + c)]^{(n)} = \mathrm{e}^{ax}(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \sin(bx + c + n\varphi)$,

(2) $[\mathrm{e}^{ax} \cos(bx + c)]^{(n)} = \mathrm{e}^{ax}(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \cos(bx + c + n\varphi)$,

其中 $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

1214. 求 $y^{(n)}$, 设:

(a) $y = \cosh ax \cos bx$; (b) $y = \cosh ax \sin bx$.

1215. 将函数

$$f(x) = \sin^{2p} x,$$

其中 p 为正整数, 化为三角多项式:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} A_k \cos 2kx,$$

以求 $f^{(n)}(x)$.

提示: 令 $\sin x = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}(t - \bar{t})$, 其中 $t = \cos x + \mathrm{i} \sin x$ 及 $\bar{t} = \cos x - \mathrm{i} \sin x$, 并且利用棣莫弗公式来计算.

1216. 设:

(a) $f(x) = \sin^{2p+1} x$; (b) $f(x) = \cos^{2p} x$; (c) $f(x) = \cos^{2p+1} x$,

其中 p 为正整数, 求 $f^{(n)}(x)$ (参阅前题).

若

$$f(x) = f_1(x) + \mathrm{i} f_2(x),$$

其中 i 是虚数单位, $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 为实变量 x 的实函数, 则按定义有:

$$f'(x) = f_1'(x) + \mathrm{i} f_2'(x).$$

1217. 利用恒等式

$$\frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{2\mathrm{i}} \left(\frac{1}{x - \mathrm{i}} - \frac{1}{x + \mathrm{i}} \right)$$

证明:

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}\sin[(n+1)\operatorname{arccot} x].$$

提示: 利用棣莫弗公式.

1218. 求函数 $f(x) = \arctan x$ 的 n 阶导数.

求 $f^{(n)}(0)$, 设:

1219. (a) $f(x) = \dfrac{1}{(1-2x)(1+x)}$; (b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$.

1220. (a) $f(x) = x^2 e^{ax}$; (b) $f(x) = \arctan x$; (c) $f(x) = \arcsin x$.

1221. (a) $f(x) = \cos(m \arcsin x)$; (b) $f(x) = \sin(m \arcsin x)$.

1222. (a) $f(x) = (\arctan x)^2$; (b) $f(x) = (\arcsin x)^2$.

1223. 设

$$f(x) = (x-a)^n \varphi(x),$$

其中函数 $\varphi(x)$ 在点 a 的邻域内有 $n-1$ 阶的连续导数, 求 $f^{(n)}(a)$.

1224. 证明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^{2n}\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(n 为正整数), 于点 $x = 0$ 有一直到 n 阶的导数, 而无 $n+1$ 阶导数.

1225. 证明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处是无穷次可微的. 作出此函数的图像.

1226. 证明: 切比雪夫多项式

$$T_m(x) = \frac{1}{2^{m-1}}\cos(m \arccos x) \quad (m = 1, 2, \cdots)$$

满足方程

$$(1-x^2)T_m''(x) - xT_m'(x) + m^2 T_m(x) = 0.$$

1227. 证明: 勒让德多项式

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!}\left[(x^2-1)^m\right]^{(m)} \quad (m = 0, 1, 2, \cdots)$$

满足方程

$$(1-x^2)P_m''(x) - 2xP_m'(x) + m(m+1)P_m(x) = 0.$$

提示: 把等式 $(x^2-1)u' = 2mxu$ 作 $m+1$ 次微分, 其中 $u = (x^2-1)^m$.

1228. 切比雪夫–拉盖尔多项式定义如下:

$$L_m(x) = e^x (x^m e^{-x})^{(m)} \quad (m = 0, 1, 2, \cdots).$$

求多项式 $L_m(x)$ 的显式表达式.

证明: $L_m(x)$ 满足方程

$$xL_m''(x) + (1-x)L_m'(x) + mL(x) = 0.$$

提示: 利用等式 $xu'+(x-m)u=0$, 其中 $u=x^m\mathrm{e}^{-x}$.

1229. 设 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$, 其中 $f(u)$ 及 $\varphi(x)$ 为 n 阶可微函数. 证明:

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}=\sum_{k=1}^{n}A_k(x)f^{(k)}(u),$$

其中系数 $A_k(x)$ $(k=0,1,\cdots,n)$ 与函数 $f(u)$ 无关.

1230. 证明: 对于复合函数 $y=f(x^2)$ 的 n 阶导数, 成立公式

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}=(2x)^n f^{(n)}(x^2)+\frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2}f^{(n-1)}(x^2)+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4}f^{(n-2)}(x^2)+\cdots.$$

1231. 切比雪夫–埃尔米特多项式定义如下:

$$H_m(x)=(-1)^m\mathrm{e}^{x^2}(\mathrm{e}^{-x^2})^{(m)}\quad(m=0,1,2,\cdots).$$

求多项式 $H_m(x)$ 的显式表达式.

证明: $H_m(x)$ 满足方程

$$H_m''(x)-2xH_m'(x)+2mH_m(x)=0.$$

提示: 利用等式 $u'+2xu=0$, 其中 $u=\mathrm{e}^{-x^2}$.

1232.1. 证明等式:

$$\left(x^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

提示: 运用数学归纳法.

1232.2. 证明公式:

(a) $$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n\ln x)=n!\left(\ln x+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\quad(x>0);$$

(b) $$\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{(2n)!}{x^{2n+1}}[C_n(x)\sin x-S_n(x)\cos x],$$

其中

$$C_n(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad S_n(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

1233. 设 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}=D$ 表示微分算子,

$$f(D)=\sum_{k=0}^{n}p_k(x)D^k$$

为微分符号的多项式, 其中 $p_k(x)(k=0,1,\cdots,n)$ 为 x 的某连续函数. 证明:

$$f(D)\{\mathrm{e}^{\lambda x}u(x)\}=\mathrm{e}^{\lambda x}f(D+\lambda)u(x),$$

其中 λ 为常数.

1234. 证明: 若在方程

$$\sum_{k=0}^{n}a_k x^k y_x^{(k)}=0$$

中令

$$x=\mathrm{e}^t,$$

其中 t 为自变量, 则此方程化为

$$\sum_{k=0}^{n} a_k D(D-1)\cdots(D-k+1)y=0,$$

其中 $D=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$.

§6. 罗尔定理、拉格朗日定理和柯西定理

1. 罗尔定理. 若函数 $f(x)$: (1) 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义并且是连续的; (2) 在此区间内有有限的导数 $f'(x)$; (3) $f(a)=f(b)$, 则在区间 (a,b) 内至少存在一个数 c, 使

$$f'(c)=0.$$

2. 拉格朗日定理. 若函数 $f(x)$: (1) 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义并且是连续的; (2) 在区间 (a,b) 内有有限的导数, 则

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c),\quad 其中\ a<c<b$$

(有限增量公式).

3. 柯西定理. 若函数 $f(x)$ 及 $g(x)$: (1) 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义并且是连续的; (2) 于 (a,b) 内 $f(x)$ 及 $g(x)$ 有有限的导数 $f'(x)$ 及 $g'(x)$; (3) 当 $a<x<b$ 时, $f'^2(x)+g'^2(x)\neq 0$; (4) $g(a)\neq g(b)$, 则

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},\quad 其中\ a<c<b.$$

1235. 检验罗尔定理对于函数

$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$$

的正确性.

1236. 函数 $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ 当 $x_1=-1$ 及 $x_2=1$ 时为零, 但是当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时, $f'(x)\neq 0$. 说明与罗尔定理表面上的矛盾.

1237. 设函数 $f(x)$ 在有限或无穷的区间 (a,b) 中的任意一点有有限的导数 $f'(x)$, 且

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\lim_{x\to b-0} f(x).$$

证明:

$$f'(c)=0,$$

其中 c 为区间 (a,b) 中的某点.

1238. 设函数 $f(x)$: (1) 在闭区间 $[x_0,x_n]$ 上有定义且有 $n-1$ 阶的连续导数 $f^{(n-1)}(x)$; (2) 在区间 (x_0,x_n) 内有 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$; (3) 下列等式成立:

$$f(x_0)=f(x_1)=\cdots=f(x_n)\quad (x_0<x_1<\cdots<x_n).$$

证明: 在区间 (x_0,x_n) 内最少存在一点 ξ, 使

$$f^{(n)}(\xi)=0.$$

1239. 设函数 $f(x)$: (1) 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义且有 $p+q$ 阶的连续导数 $f^{(p+q)}(x)$; (2) 在区间 (a,b) 内有 $p+q+1$ 阶的导数 $f^{(p+q+1)}(x)$; (3) 下列等式成立:

$$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(p)}(a)=0,$$

$$f(b) = f'(b) = \cdots = f^{(q)}(b) = 0.$$

证明: 在此种情形下

$$f^{(p+q+1)}(c) = 0,$$

其中 c 为区间 (a, b) 内的某点.

1240. 证明: 若具实系数 a_k $(k = 0, 1, \cdots, n)$ 的多项式

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

之一切根为实数, 则其逐次的导数 $P_n'(x), P_n''(x), \cdots, P_n^{(n-1)}(x)$ 也仅有实根.

1241. 证明: 勒让德多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\{(x^2-1)^n\}$$

的一切根都是实数且包含于区间 $(-1, 1)$ 中.

1242. 证明: 切比雪夫–拉盖尔多项式

$$L_n(x) = \mathrm{e}^x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n\mathrm{e}^{-x})$$

所有的根都是正数.

1243. 证明: 切比雪夫–埃尔米特多项式

$$H_n(x) = (-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\mathrm{e}^{-x^2})$$

所有的根都是实数.

1244. 在曲线 $y = x^3$ 上某点的切线, 平行于连接点 $A(-1, -1)$ 及点 $B(2, 8)$ 所成的弦, 求出此点.

1245. 若 $ab < 0$, 有限增量公式对于函数

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

在闭区间 $[a, b]$ 上是否正确?

1246.1. 设

(a) $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$; (b) $f(x) = x^3$;

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; (d) $f(x) = \mathrm{e}^x$,

求满足

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x f'(x + \theta\Delta x) \quad (0 < \theta < 1)$$

的函数 $\theta = \theta(x, \Delta x)$.

1246.2. 设 $f(x) \in C^{(1)}(-\infty, +\infty)$, 且对于任何 x 和 h 成立恒等式

$$f(x + h) - f(x) \equiv hf'(x).$$

证明:

$$f(x) = ax + b,$$

其中 a 和 b 为常数.

1246.3. 设 $f(x) \in C^{(2)}(-\infty, +\infty)$, 且对于任何 x 和 h 成立恒等式

$$f(x + h) - f(x) \equiv hf'\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

证明:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

其中 a, b 和 c 为常数.

1247. 证明: 若 $x \geqslant 0$, 则

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

其中 $\frac{1}{4} \leqslant \theta(x) \leqslant \frac{1}{2}$, 并且 $\lim\limits_{x \to 0} \theta(x) = \frac{1}{4}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \theta(x) = \frac{1}{2}$.

1248. 设

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{x}, & 1 < x < +\infty, \end{cases}$$

在闭区间 $[0, 2]$ 上对于函数 $f(x)$求有限增量公式中的中间值 c.

1249. 设

$$f(x) - f(0) = xf'[\xi(x)],$$

其中 $0 < \xi(x) < x$. 证明: 若

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\ln x), & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

则函数 $\xi = \xi(x)$ 在任意小的区间 $(0, \varepsilon)$ 内 $(\varepsilon > 0)$ 是不连续的.

1250. 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有连续的导数 $f'(x)$. 对于区间 (a, b) 内任何一点 ξ, 可否从此区间中指出另外的两点 x_1 及 x_2, 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \quad (x_1 < \xi < x_2)?$$

研究一个例子:

$$f(x) = x^3 \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1), \quad \xi = 0.$$

1251. 证明下列不等式:

(a) $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$;

(b) $py^{p-1}(x-y) \leqslant x^p - y^p \leqslant px^{p-1}(x-y) \ \ (0 < y < x, p > 1)$;

(c) $|\arctan a - \arctan b| \leqslant |a - b|$;

(d) $\dfrac{a-b}{a} < \ln\dfrac{a}{b} < \dfrac{a-b}{b} \ \ (0 < b < a)$.

1252. 说明在闭区间 $[-1, 1]$ 上柯西定理对于函数 $f(x) = x^2$ 及 $g(x) = x^3$ 何以不真?

1253. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[x_1, x_2]$ 上可微, 并且 $x_1x_2 > 0$. 证明:

$$\frac{1}{x_1 - x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} = f(\xi) - \xi f'(\xi),$$

其中 $x_1 < \xi < x_2$.

1254. 证明: 若函数 $f(x)$ 在有限的区间 (a, b) 内可微但无界, 则其导数 $f'(x)$ 在区间 (a, b) 内也无界. 逆命题不真 (举出例子).

1255. 证明: 若函数 $f(x)$ 在有限或无穷的区间 (a,b) 内有有界的导数 $f'(x)$, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 中一致连续.

1256. 证明: 若函数 $f(x)$ 在无穷的区间 $(x_0,+\infty)$ 内可微, 且

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0,$$

则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0,$$

即当 $x\to+\infty$ 时, $f(x)=o(x)$.

1257. 证明: 若函数 $f(x)$ 在无穷的区间 $(x_0,+\infty)$ 内可微且

$$\text{当 } x\to+\infty \text{ 时,}\quad f(x)=o(x),$$

则

$$\varliminf_{x\to+\infty}|f'(x)|=0.$$

1258.1. 证明: 若函数 $f(x)$: (1) 在闭区间 $[x_0,X]$ 上有定义并且是连续的; (2) 在区间 (x_0,X) 内有有限的导数 $f'(x)$; (3) 存在有限或无穷的极限

$$\lim_{x\to x_0+0} f'(x)=f'(x_0+0),$$

则相应地存在有限或无穷的单侧导数 $f'_+(x_0)$ 且

$$f'_+(x_0)=f'(x_0+0).$$

1258.2. 证明: 对于函数

$$f(x)=\begin{cases}\arctan\dfrac{1+x}{1-x}, & x\neq 1,\\ 0, & x=1\end{cases}$$

存在有限的极限

$$\lim_{x\to1} f'(x),$$

但是函数 $f(x)$ 没有单侧导数 $f'_-(1)$ 及 $f'_+(1)$. 给出这个事实的几何解释. 然而, 在这个点存在广义单侧导数 (见习题 1009.2).

1259. 证明: 若当 $a<x<b$ 时 $f'(x)=0$, 则

$$\text{当 } a<x<b \text{ 时,}\quad f(x)=\text{常数}.$$

1260. 证明: 导数为常数

$$f'(x)=k$$

的唯一函数 $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ 是线性函数

$$f(x)=kx+b.$$

1261.1. 若 $f^{(n)}(x)=0$, 则函数 $f(x)$ 有什么性质?

1261.2. 设 $f(x)\in C^{(\infty)}(-\infty,+\infty)$, 并且对每个 x 都存在正整数 n_x $(n_x\leqslant n)$, 使得

$$f^{(n_x)}(x)=0.$$

证明: 函数 $f(x)$ 是多项式.

1262. 证明: 满足方程

$$y'=\lambda y\quad(\lambda=\text{常数})$$

的唯一函数 $y = y(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ 是指数函数 $y = Ce^{\lambda x}$, 其中 C 为任意常数.

提示: 研究 $(ye^{-\lambda x})'$.

1263. 检验函数

$$f(x) = \arctan\frac{1+x}{1-x}, \quad g(x) = \arctan x$$

在区间: (1) $x < 1$ 及 (2) $x > 1$ 内有相同的导数. 推出这些函数间的关系.

1264. 证明下列恒等式:

(a) $2\arctan x + \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} = \pi\operatorname{sgn} x$, 当 $|x| \geqslant 1$;

(b) $3\arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi$, 当 $|x| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

1265. 证明: 若函数 $f(x)$: (1) 在闭区间 $[a,b]$ 上是连续的; (2) 于此区间内有有限的导数 $f'(x)$; (3) 不是线性函数, 则在区间 (a,b) 内至少能找到一点 c, 使得

$$|f'(c)| > \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

给出这个事实的几何解释.

1266. 证明: 若函数 $f(x)$: (1) 在闭区间 $[a,b]$ 上有二阶导数 $f''(x)$; (2) $f'(a) = f'(b) = 0$, 则在区间 (a,b) 内至少存在一点 c, 使得

$$|f''(c)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

1267. 汽车从某点开始行驶, 于 t 秒内走完了路程, 所经过的距离为 s. 证明: 汽车运动的加速度在某瞬时不小于 $\dfrac{4s}{t^2}$.

§7. 增函数与减函数. 不等式

1. 增函数与减函数. 若

当 $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$ 时, $f(x_2) > f(x_1)$ (或当 $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$ 时, $f(x_2) < f(x_1)$),

则称函数 $f(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的**增函数** (或**减函数**).

若可微函数 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的增函数 (或减函数), 则

当 $a \leqslant x \leqslant b$ 时, $f'(x) \geqslant 0$ (或当 $a \leqslant x \leqslant b$ 时, $f'(x) \leqslant 0$).

2. 函数递增 (或递减) 的充分条件. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上是连续的, 并且在其内有正的 (或负的) 导数 $f'(x)$, 则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内递增 (或递减).

求下列函数的严格单调 (增或减) 区间:

1268. $y = 2 + x - x^2$.

1269. $y = 3x - x^3$.

1270. $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

1271. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+100}$ $(x \geqslant 0)$.

1272. $y = x + \sin x$.

1273. $y = x + |\sin 2x|$.

1274. $y = \cos\dfrac{\pi}{x}$.

1275. $y = \dfrac{x^2}{2^x}$.

1276. $y = x^n e^{-x}$ $(n > 0, x \geqslant 0)$. **1277.** $y = x^2 - \ln x^2$.

1278. 若 $f(x) = \begin{cases} x\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}} + \sin\ln x\right), & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

1279. 证明: 圆的内接正 n 边形的周长 p_n 当边的数目 n 增加时增加, 而此圆的外切正 n 边形的周长 P_n 此时则减小. 利用这点来证明, 当 $n \to \infty$ 时, p_n 及 P_n 有相同的极限.

1280. 证明: 函数

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

在区间 $(-\infty, -1)$ 及 $(0, +\infty)$ 内递增.

1281. 证明: 有理函数

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad (n \geqslant 1, a_n \neq 0)$$

是区间 $(-\infty, -x_0)$ 及 $(x_0, +\infty)$ 上的严格单调函数, 其中 x_0 为充分大的正数.

1282. 证明: 有理函数

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m} \quad (a_n b_m \neq 0)$$

是区间 $(-\infty, -x_0)$ 及 $(x_0, +\infty)$ 上的严格单调函数, 其中 x_0 为充分大的正数.

1283. 单调函数的导数是否也必为单调的? 研究一个例子:

$$f(x) = x + \sin x.$$

1284. 证明: 若 $\varphi(x)$ 为可微的单调增函数, 且当 $x \geqslant x_0$ 时, $|f'(x)| \leqslant \varphi'(x)$, 则

$$\text{当 } x \geqslant x_0 \text{ 时,} \quad |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varphi(x) - \varphi(x_0).$$

给出这个事实的几何解释.

1285. 设函数 $f(x)$ 在区间 $a \leqslant x < +\infty$ 内连续, 而且当 $x > a$ 时, $f'(x) > k > 0$, 其中 k 为常数. 证明: 若 $f(a) < 0$, 则在区间 $\left(a, a - \dfrac{f(a)}{k}\right)$ 内方程 $f(x) = 0$ 有且仅有一个实根.

1286. 若在某邻域 $|x - x_0| < \delta$ 内, 函数增量 $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ 的符号与自变量增量 $\Delta x_0 = x - x_0$ 的符号相同, 则称函数 $f(x)$ 为在 x_0 点的增函数.

证明: 若函数 $f(x)$ $(a < x < b)$ 在有限或无穷的区间 (a, b) 内的每一点皆为增函数, 则它在此区间内为增函数.

1287. 证明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin\dfrac{2}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在点 $x = 0$ 是增函数, 但在包含此点的任何区间 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 中并非增函数, 其中 $\varepsilon > 0$ 为任意小的数. 作出此函数的略图.

1288. 证明定理: 设 (1) 函数 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 为 n 阶可微函数; (2) $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0)$ $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$; (3) 当 $x > x_0$ 时, $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$, 则当 $x > x_0$ 时有

不等式

$$\varphi(x) > \psi(x).$$

1289. 证明下列不等式:

(a) $e^x > 1 + x \quad (x \neq 0)$; (b) $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x \quad (x > 0)$;

(c) $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x \quad (x > 0)$; (d) $\tan x > x + \dfrac{x^3}{3} \quad \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$;

(e) $(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}} \quad (x > 0, y > 0, 0 < \alpha < \beta)$.

给出不等式 (a)—(d) 的几何解释.

1290. 证明: 不等式

$$\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$$

当 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时成立.

1291. 证明: 当 $x > 0$ 时有不等式

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

1292. 等差数列与等比数列的项的数目相同且有相同的首项与末项, 并且一切项都是正的. 证明: 等差数列各项之和大于等于等比数列各项之和.

1293. 用不等式

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k x + b_k)^2 \geqslant 0,$$

其中 $x, a_k, b_k \ (k = 1, \cdots, n)$ 为实数, 来证明柯西–布尼亚科夫斯基不等式:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

1294. 证明: 正数的算术平均值的平方不大于这些数的平方平均值, 即

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

1295. 证明: 正数的几何平均值不大于这些数的算术平均值, 即

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

提示: 用数学归纳法.

1296. 设 a 及 b 为两个正数, 则由等式

$$\Delta_s(a,b) = \begin{cases} \left(\dfrac{a^s + b^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}}, & s \neq 0, \\ \lim\limits_{t \to 0} \Delta_t(a,b), & s = 0 \end{cases}$$

所定义之函数称为正数 a 与 b 之 s 阶平均值.

例如, 当 $s = -1$ 时得调和平均值, 当 $s = 0$ 时得几何平均值 (试证明!); 当 $s = 1$ 时得算术平均值; 当 $s = 2$ 时得平方平均值.

证明: (1) $\min(a,b) \leqslant \Delta_s(a,b) \leqslant \max(a,b)$;

(2) 当 $a \neq b$ 时, 函数 $\Delta_s(a,b)$ 是变量 s 的增函数;

(3) $\lim\limits_{s\to-\infty}\Delta_s(a,b)=\min(a,b)$, $\lim\limits_{s\to+\infty}\Delta_s(a,b)=\max(a,b)$.

提示: 考察 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[\ln\Delta_s(a,b)]$.

1297. 证明下列不等式:

(a) $x^\alpha-1>\alpha(x-1)$, 若 $\alpha\geqslant 2, x>1$;

(b) $\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{x-a}$, 若 $n>1, x>a>0$;

(c) $1+2\ln x\leqslant x^2$, 若 $x>0$.

§8. 凹凸性. 拐点

1. 凹凸性的充分条件. 若由可微函数定义的一段曲线 $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 位于其任意一点的切线之上 (或之下), 则称这个可微函数 $y=f(x)$ 的图像在闭区间 $[a,b]$ 上是凸 (或对应地, 凹) 的[①]. 在假设二阶导数 $f''(x)$ 存在的情况下, 当 $a<x<b$ 时不等式

$$f''(x)>0\quad(\text{或对应地 } f''(x)<0)$$

成立, 为图像是凸 (或对应地, 凹) 的充分条件.

2. 拐点的充分条件. 若函数的图像在某点的凹凸性改变, 则称此点为*拐点*.

若在点 x_0 有 $f''(x_0)=0$, 或者 $f''(x_0)$ 虽不存在但 $f'(x_0)$ 有意义, 并且无论在哪种情形下, $f''(x)$ 在 x 经过 x_0 时改变符号, 则 x_0 是拐点.

1298. 研究曲线

$$y=1+\sqrt[3]{x}$$

于 $A(-1,0)$, $B(1,2)$ 及 $C(0,1)$ 诸点的凹凸性.

求下列函数的图像的凹或凸的区间及拐点:

1299. $y=3x^2-x^3$.

1300. $y=\dfrac{a^2}{a^2+x^2}$ $(a>0)$.

1301. $y=x+x^{\frac{5}{3}}$.

1302. $y=\sqrt{1+x^2}$.

1303. $y=x+\sin x$.

1304. $y=\mathrm{e}^{-x^2}$.

1305. $y=\ln(1+x^2)$.

1306. $y=x\sin(\ln x)$ $(x>0)$.

1307. $y=x^x$ $(x>0)$.

1308. 证明: 曲线

$$y=\frac{x+1}{x^2+1}$$

在位于同一直线上的三个拐点. 作出这个函数的图像.

1309. 如何选择参量 h, 可使 "概率曲线"

$$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-h^2x^2}\quad(h>0)$$

---

①更一般的定义见习题 1312. 原书把凸称为下凸或上凹, 把凹称为下凹或上凸, 译文已按照国际上更通用的术语修改. 关于凹凸性更详细的讨论, 详见与本书配套的参考书: 沐定夷, 谢惠民. 吉米多维奇数学分析习题集学习指引 (第一册). 北京: 高等教育出版社, 2010. 第二章 §2.8. —— 译注

有拐点 $x=\pm\sigma$?

1310. 研究摆线 (旋轮线)

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)\quad (a>0)$$

的凹凸性.

1311. 设函数 $f(x)$ 在区间 $a\leqslant x<+\infty$ 中二阶可微, 并且:

(1) $f(a)=A>0$; (2) $f'(a)<0$; (3) 当 $x>a$ 时, $f''(x)\leqslant 0$.

证明: 在区间 $(a,+\infty)$ 内方程 $f(x)=0$ 有而且仅有一个实根.

1312. 若对于区间 (a,b) 内的任意两点 x_1 与 x_2 及任意两数 λ_1 与 λ_2 $(\lambda_1>0,\lambda_2>0,\lambda_1+\lambda_2=1)$ 有不等式:

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)<\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$$

(或对应地, 相反的不等式 $f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)>\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$), 则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上是凸 (凹) 的.

证明: (1) 若当 $a<x<b$ 时, $f''(x)>0$, 则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上是凸的; (2) 若当 $a<x<b$ 时, $f''(x)<0$, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 上是凹的.

1313. 证明: 函数

$$x^n\ (n>1),\quad \mathrm{e}^x,\quad x\ln x$$

在区间 $(0,+\infty)$ 上是凸的, 而函数

$$x^n\ (0<n<1),\quad \ln x$$

在区间 $(0,+\infty)$ 上是凹的.

1314.1. 证明下列不等式, 并解释其几何意义:

(a) $\dfrac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$ $(x>0,y>0,x\neq y,n>1)$;

(b) $\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y}{2}>\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}}$ $(x\neq y)$;

(c) $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\dfrac{x+y}{2}$ $(x>0,\ y>0)$.

1314.2. 设当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时 $f''(x)\geqslant 0$, 证明: 对于任何 $x_1,x_2\in[a,b]$, 都有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)].$$

1315. 证明: 有界的凸函数处处连续, 并有左导数和右导数.

1316. 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内二阶可微, 且 $f''(\xi)\neq 0$, 其中 $a<\xi<b$. 证明: 在区间 (a,b) 中可找出两个值 x_1 与 x_2, 满足

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi).$$

1317. 证明: 若函数 $f(x)$ 在无穷的区间 $(x_0,+\infty)$ 内二阶可微, 且

$$\lim_{x\to x_0+0}f(x)=0,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=0,$$

则在区间 $(x_0,+\infty)$ 内最少有一点 ξ, 满足 $f''(\xi)=0$.

§9. 不定式的求值法

洛必达法则. 情形 1: 不定式 $\dfrac{0}{0}$ 的求值法. 若: (1) 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 a 的某邻域 U_ε[①] 内有定义并且连续 (此处 a 为数或符号 ∞), 并且当 $x \to a$ 时, 这两个函数都趋于零:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0;$$

(2) 导数 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 在点 a 的邻域 U_ε 内存在 (在点 a 本身可不存在), 并且当 $x \neq a$ 时, 二者不同时为零; (3) 有限或无穷的极限值

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

存在, 则有

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

情形 2: 不定式 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 的求值法. 若: (1) 当 $x \to a$ 时, 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都趋于无穷大:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty,$$

其中 a 为数或符号 ∞; (2) 对于异于 a 且属于点 a 的邻域 U_ε 的一切 x 值, 导数 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 都存在, 并且对于这样的 x 有

$$f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0;$$

(3) 有限或无穷的极限

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

存在, 则

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

对于单侧导数也有类似的法则.

利用代数变换与取对数的方法, 可使不定式 $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, 0^0 等的求值法化为

$$\frac{0}{0} \quad 与 \quad \frac{\infty}{\infty}$$

这两个基本类型的不定式的求值法.

求出下列各式之值:

1318. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$.

1319. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x^2}$.

1320. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$.

1321. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3\tan 4x - 12\tan x}{3\sin 4x - 12\sin x}$.

1322. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 3x}{\tan x}$.

1323. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cot x - 1}{x^2}$.

1324. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\tan x} - 1}{2\sin^2 x - 1}$.

1325. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$.

1326. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}$.

1327. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}$.

[①] 所谓点 a 的邻域 U_ε, 系指满足下列不等式的数 x 的集合: (1) $0 < |x - a| < \varepsilon$, 若 a 为一个数; (2) $|x| > \dfrac{1}{\varepsilon}$, 若 a 为符号 ∞. (这样定义的邻域通常叫做去心邻域. —— 译注)

1328. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{a}\arctan\sqrt{\dfrac{x}{a}}-\sqrt{b}\arctan\sqrt{\dfrac{x}{b}}\right)$.

1329. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}\ (a>0)$.

1330. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^x-x}{\ln x-x+1}\right)$.

1331. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$.

1332. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$.

1333. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

1334. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\tanh x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)$.

1335. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arsinh}(\sinh x)-\operatorname{arsinh}(\sin x)}{\sinh x-\sin x}$, 其中 $\operatorname{arsinh} x=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

1336. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\varepsilon}\ (\varepsilon>0)$.

1337. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{ax}}\ (a>0,n>0)$.

1338. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{1000}}$.

1339. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-0.01x}$.

1340. $\lim\limits_{x\to 1-0}\ln x\cdot\ln(1-x)$.

1341. $\lim\limits_{x\to+0}x^\varepsilon\ln x\ (\varepsilon>0)$.

1342. $\lim\limits_{x\to+0}x^x$.

1343. $\lim\limits_{x\to 0}x^{x^x-1}$.

1344. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^{x^x}-1\right)$.

1345. $\lim\limits_{x\to+0}x^{\frac{k}{1+\ln x}}$.

1346. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

1347. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$.

1348. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$.

1349. $\lim\limits_{x\to 0}(\cot x)^{\sin x}$.

1350. $\lim\limits_{x\to+0}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x$.

1351. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\tan\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

1352. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\tan x}{\tan a}\right)^{\cot(x-a)}$.

1353. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

1354. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

1355. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

1356. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x-\dfrac{1}{x}\right)$.

1357. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]$.

1358. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}\ (a>0)$.

1359. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$.

1360. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^x-a^x}{x^2}\ (a>0)$.

1361. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$.

1362. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\tanh x)^x$.

1363. (a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;　　(b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;　　(d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arctan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{arsinh} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, 其中 $\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

1364. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right]^{\frac{1}{x}}$.　　**1365.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$.

1366. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cosh x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.　　**1367.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cosh x}{\sqrt[m]{\cosh x}-\sqrt[n]{\cosh x}}$.

1368. (a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\mathrm{e}^x}{2}\right)^{\coth x}$;　　(b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$.

1369. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\dfrac{\ln(\mathrm{e}^x+x)}{x}\right]$.

1370. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[(x+a)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+a}}\right]$.

1371. 若当 $x\to 0$ 时, 曲线 $y=f(x)$ 通过坐标原点 $(0,0)$ $[\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0]$, 且在此有倾角 α, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y}{x}$.

1372. 若当 $x\to +0$ 时, 连续曲线 $y=f(x)$ 通过坐标原点 $(0,0)[\lim\limits_{x\to +0}f(x)=0]$, 并且当 $0<x<\varepsilon$ 时, 此曲线完全位于两直线 $y=-kx$ 及 $y=kx$ $(k\neq\infty)$ 所组成的锐角之内, 证明: $\lim\limits_{x\to +0}x^{f(x)}=1$.

1373.1. 证明: 若函数 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 存在, 则

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}.$$

1373.2. 研究函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}, & x\neq 0,\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 的可微性.

1373.3. 求曲线

$$y=\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}\quad(x>0)$$

的渐近线.

1374. 研究运用洛必达法则于下列各例的可能性:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$;　　(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$;

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}(\cos x+2\sin x)+\mathrm{e}^{-x^2}\sin^2 x}{\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)}$;

(d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x+\sin x\cos x}{(x+\sin x\cos x)\mathrm{e}^{\sin x}}$.

1375. 设有一弓形, 其弦长为 b, 拱高为 h, 半径为 R, 又有内接于此弓形的等腰三角形. 若当 R 不变时弓形的弧长趋于零, 求弓形面积与内接等腰三角形面积之比的极限. 利用所得结果推出弓形面积的近似公式:

$$S\approx\frac{2}{3}bh.$$

§10. 泰勒公式

1. 泰勒局部公式. 若: (1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $|x-x_0|<\varepsilon$ 内有定义; (2) $f(x)$ 在此邻域内有一直到 $n-1$ 阶的导数 $f'(x),\cdots,f^{(n-1)}(x)$; (3) 在点 x_0 存在 n 阶导数 $f^{(n)}(x_0)$, 则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+o\left((x-x_0)^n\right), \tag{1}$$

其中 $a_k=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ $(k=0,1,\cdots,n)$. 特别地, 当 $x_0=0$ 时, 有:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n). \tag{2}$$

在上述条件下, (1) 式是唯一的.

若在点 x_0 存在导数 $f^{(n+1)}(x_0)$, 则公式 (1) 中的余项可以取为 $O^*\left((x-x_0)^{n+1}\right)$ 的形式.

从泰勒局部公式 (2) 得出下列五个重要的展开式:

I. $\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$;

II. $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})$;

III. $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$;

IV. $(1+x)^m=1+mx+\dfrac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$;

V. $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$.

2. 泰勒公式. 若: (1) 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义; (2) $f(x)$ 在此闭区间上有连续的导数 $f'(x),\cdots,f^{(n-1)}(x)$; (3) 当 $a<x<b$ 时存在有限的导数 $f^{(n)}(x)$, 则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+R_n(x)\quad(a\leqslant x\leqslant b),$$

其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n\quad(0<\theta<1)$$

(拉格朗日余项), 或

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(a+\theta_1(x-a))}{(n-1)!}(1-\theta_1)^{n-1}(x-a)^n\quad(0<\theta_1<1)$$

(柯西余项).

1376. 将多项式

$$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$$

改写为二项式 $x + 1$ 的非负整数次幂多项式.

写出下列函数按变量 x 的非负整数次幂的展开式, 到含有所指阶数的项为止:

1377. $\dfrac{1 + x + x^2}{1 - x + x^2}$ 到含 x^4 的项. $f^{(4)}(0)$ 等于什么?

1378. $\dfrac{(1 + x)^{100}}{(1 - 2x)^{40}(1 + 2x)^{60}}$ 到含 x^2 的项.

1379. $\sqrt[m]{a^m + x}$ $(a > 0)$ 到含 x^2 的项.

1380. $\sqrt{1 - 2x + x^3} - \sqrt[3]{1 - 3x + x^2}$ 到含 x^3 的项.

1381. $\mathrm{e}^{2x - x^2}$ 到含 x^5 的项.

1382. $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ 到含 x^4 的项.

1383. $\sqrt[3]{\sin x^3}$ 到含 x^{13} 的项.

1384. $\ln\cos x$ 到含 x^6 的项.

1385. $\sin(\sin x)$ 到含 x^3 的项.

1386. $\tan x$ 到含 x^5 的项.

1387. $\ln\dfrac{\sin x}{x}$ 到含 x^6 的项.

1388. 求函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 按照 $x - 1$ 的非负整数次幂展开式的前三项.

1389. 将函数 $f(x) = x^x - 1$ 按照 $x - 1$ 的非负整数次幂展开至含有 $(x - 1)^3$ 的项.

1390. 在点 $x = 0$ 的邻域中, 用抛物线 (二次多项式) 近似地代替函数

$$y = a\cosh\frac{x}{a} \quad (a > 0).$$

1391. 按公式 $\dfrac{1}{x}$ 的非负整数次幂展开函数 $f(x) = \sqrt{1 + x^2} - x$ $(x > 0)$ 到含 $\dfrac{1}{x^3}$ 的项.

1392. 求函数 $f(h) = \ln(x + h)$ $(x > 0)$ 按增量 h 的正整数次幂的展开式, 到含 h^n 的项 (n 为正整数).

1393.1. 设

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x + \theta h) \quad (0 < \theta < 1),$$

且 $f^{(n+1)}(x) \neq 0$. 证明:

$$\lim_{h\to 0}\theta = \frac{1}{n + 1}.$$

1393.2. 设当 $x \to 0$ 时有 $f(x) = 1 + kx + o(x)$. 证明:

$$\lim_{x\to 0}[f(x)]^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^k.$$

1393.3. 设 $f(x) \in C^{(2)}[0, 1]$, $f(0) = f(1) = 0$, 且当 $x \in (0, 1)$ 时 $|f''(x)| \leqslant A$. 证明: 当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时

$$|f'(x)| \leqslant \frac{A}{2}.$$

1393.4. 设 $f(x)(-\infty < x < +\infty)$ 为二阶可微函数, 且

$$M_k = \sup_{-\infty < x < +\infty}|f^{(k)}(x)| < +\infty \quad (k = 0, 1, 2).$$

证明不等式:

$$M_1^2 \leqslant 2M_0M_2.$$

1394. 估计下列近似公式的绝对误差:

(a) $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$, 当 $0 \leqslant x \leqslant 1$;

(b) $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$, 当 $|x| \leqslant \frac{1}{2}$;

(c) $\tan x \approx x + \frac{x^3}{3}$, 当 $|x| \leqslant 0.1$;

(d) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$, 当 $0 \leqslant x \leqslant 1$.

1395.1. 近似公式

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$$

对于怎样的 x 精确到 0.0001?

1395.2. 证明公式:

$$\sqrt[n]{a^n + x} = a + \frac{x}{na^{n-1}} - r \quad (n \geqslant 2, a > 0, x > 0),$$

其中 $0 < r < \frac{n-1}{2n^2} \cdot \frac{x^2}{a^{2n-1}}$.

1396. 利用泰勒公式近似地计算并估计误差:

(a) $\sqrt[3]{30}$; (b) $\sqrt[5]{250}$; (c) $\sqrt[12]{4000}$;

(d) $\sqrt{e}$; (e) $\sin 18°$; (f) $\ln 1.2$;

(g) $\arctan 0.8$; (h) $\arcsin 0.45$; (i) $1.1^{1.2}$.

1397. 计算:

(a) e, 精确到 10^{-9}; (b) $\sin 1°$, 精确到 10^{-8}; (c) $\cos 9°$, 精确到 10^{-5};

(d) $\sqrt{5}$, 精确到 10^{-4}; (e) $\lg 11$, 精确到 10^{-5}.

利用展开式 I—V, 求下列极限:

1398. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

1399. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$.

1400. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right)$.

1401. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5})$.

1402. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}\right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1}\right]$.

1403. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}$ $(a > 0)$.

1404. $\lim\limits_{x \to \infty} \left[x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]$.

1405. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$.

1406. (a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \cot x\right)$; (b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1 - x^2}}{x^5}$;

(c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$; (d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sinh(\tan x)-x}{x^3}$.

当 $x\to0$ 时, 求出无穷小量 y 的形如 Cx^n (C 为常数) 的主项, 设:

1407. $y=\tan(\sin x)-\sin(\tan x)$. **1408.** $y=(1+x)^x-1$.

1409. $y=1-\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}$.

1410.1. 当选择怎样的系数 a 与 b 时, 量

$$x-(a+b\cos x)\sin x$$

对于 x 为 5 阶无穷小?

1410.2. 选择系数 A 和 B, 使当 $x\to0$ 时成立渐近公式

$$\cot x=\frac{1+Ax^2}{x+Bx^3}+O(x^5).$$

1410.3. 系数 A, B, C, D 为何值时, 在 $x\to0$ 时有渐近公式

$$\mathrm{e}^x=\frac{1+Ax+Bx^2}{1+Cx+Dx^2}+O(x^5)?$$

1411. 假设 $|x|$ 为小量, 推出下列各式的简单的近似公式:

(a) $\dfrac{1}{R^2}-\dfrac{1}{(R+x)^2}$ $(R>0)$; (b) $\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}-\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

(c) $\dfrac{A}{x}\left[1-\left(1+\dfrac{x}{100}\right)^{-n}\right]$; (d) $\dfrac{\ln2}{\ln\left(1+\dfrac{x}{100}\right)}$.

1412. 假设 x 的绝对值为小量, 推出形如

$$x=\alpha\sin x+\beta\tan x$$

且精确到 x^5 项的近似公式. 应用此公式近似地求小角度弧长.

1413. 估计下面的*切比雪夫法则*的相对误差: 圆弧长似近地等于以此弧的弦为底、以其拱高的 $\sqrt{\dfrac{4}{3}}$ 为高的等腰三角形的两腰之和.

§11. 函数的极值. 函数的最大值和最小值

1. 极值存在的必要条件. 若函数在点 x_0 的双侧邻域中有定义, 且对于某区域 $0<|x-x_0|<\delta$ 内的一切点 x, 下列不等式分别成立:

$$f(x)<f(x_0)\quad 或\quad f(x)>f(x_0),$$

则说函数 $f(x)$ 在点 x_0 有*极值* (*极大值或极小值*). 在有极值的点导数 $f'(x_0)=0$ (若它存在).

2. 极值存在的充分条件.

第一法则: 若

(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $|x-x_0|<\delta$ 内有定义并且是连续的, 且在 x_0 点导数 $f'(x_0)=0$ 或不存在 (临界点);

(2) $f(x)$ 在区域 $0<|x-x_0|<\delta$ 内有有限的导数 $f'(x)$;

(3) 导数 $f'(x)$ 在 x_0 的左侧与右侧有固定的符号, 则函数 $f(x)$ 的性质可用下表表示出来:

	导数的符号		结　论
	$x < x_0$	$x > x_0$	
I	$+$	$+$	无极值
II	$+$	$-$	极大值
III	$-$	$+$	极小值
IV	$-$	$-$	无极值

第二法则: 若函数 $f(x)$ 有二阶导数 $f''(x)$, 并且在点 x_0 下列条件成立:

$$f'(x_0) = 0 \quad 与 \quad f''(x_0) \neq 0,$$

则函数 $f(x)$ 在些点有极值, 并且当 $f''(x_0) < 0$ 时有极大值, 当 $f''(x_0) > 0$ 时有极小值.

第三法则: 设函数 $f(x)$ 在某区间 $|x - x_0| < \delta$ 内有导数 $f'(x), \cdots, f^{(n-1)}(x)$, 在点 x_0 有导数 $f^{(n)}(x_0)$, 并且

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \quad (k = 1, \cdots, n-1), \quad f^{(n)}(x_0') \neq 0.$$

这时, (1) 若 n 为偶数, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极值, 并且当 $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时有极大值, 当 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时有极小值; (2) 若 n 为奇数, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 无极值.

3. 绝对极值. 在闭区间 $[a, b]$ 上, 连续函数 $f(x)$ 或者在其临界点 (就是导数 $f'(x)$ 等于零或不存在的点) 达到最大 (最小) 值, 或者在所给闭区间的端点 a 或 b 达到其最大 (最小) 值.

研究下列函数的极值:

1414. $y = 2 + x - x^2$.

1415. $y = (x-1)^3$.

1416. $y = (x-1)^4$.

1417. $y = x^m(1-x)^n$ (m 及 n 为正整数).

1418. $y = \cos x + \cosh x$.

1419. $y = (x+1)^{10}\mathrm{e}^{-x}$.

1420. $y = \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}\right)\mathrm{e}^{-x}$ (n 为正整数)

1421. $y = |x|$.

1422. $y = x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$.

1423. 设

$$f(x) = (x - x_0)^n \varphi(x) \quad (n \text{ 为正整数}),$$

其中函数 $\varphi(x)$ 当 $x = x_0$ 时连续, 且 $\varphi(x_0) \neq 0$. 研究此函数在点 $x = x_0$ 的极值.

1424. 设

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad f'(x) = \frac{P_1(x)}{Q^2(x)},$$

x_0 为函数 $f(x)$ 的临界点, 即

$$P_1(x_0) = 0, \quad Q(x_0) \neq 0.$$

证明:

$$\operatorname{sgn} f''(x_0) = \operatorname{sgn} P_1'(x_0).$$

1425. 可否断定: 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极大值, 则在此点的某充分小邻域内, 函

数 $f(x)$ 在点 x_0 的左侧递增, 而在其右侧递减? 研究一个例子:

$$f(x)=\begin{cases}2-x^2\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 2, & x=0.\end{cases}$$

1426. 证明: 函数

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 有极小值, 而函数

$$g(x)=\begin{cases}x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 没有极值, 尽管

$$f^{(n)}(0)=0,\quad g^{(n)}(0)=0\quad (n=1,2,\cdots).$$

作出这些函数的图像.

1427. 研究下列函数的极值并作出其图像:

(a) $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{|x|}}\left(\sqrt{2}+\sin\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$

(b) $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{|x|}}\left(\sqrt{2}+\cos\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1428. 研究函数

$$f(x)=\begin{cases}|x|\left(2+\cos\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 处的极值, 并作出此函数的图像.

求下列函数的极值:

1429. $y=x^3-6x^2+9x-4$.

1430. $y=2x^2-x^4$.

1431. $y=x(x-1)^2(x-2)^3$.

1432. $y=x+\dfrac{1}{x}$.

1433. $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

1434. $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}$.

1435. $y=\sqrt{2x-x^2}$.

1436. $y=x\sqrt[3]{x-1}$.

1437. $y=x\mathrm{e}^{-x}$.

1438. $y=\sqrt{x}\ln x$.

1439. $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$.

1440. $y=\cos x+\dfrac{1}{2}\cos 2x$.

1441. $y=\dfrac{10}{1+\sin^2 x}$.

1442. $y=\arctan x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

1443. $y=\mathrm{e}^x\sin x$.

1444. $y=|x|\mathrm{e}^{-|x-1|}$.

求下列函数在所给闭区间上的最大值和最小值:

1445. $f(x) = 2^x$, $[-1, 5]$.

1446. $f(x) = x^2 - 4x + 6$, $[-3, 10]$.

1447. $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$, $[-10, 10]$.

1448. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $[0.01, 100]$.

1449. $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$, $[-1, 1]$.

求下列函数在所给区间上的下确界 (inf) 与上确界 (sup):

1450. $f(x) = x\mathrm{e}^{-0.01x}$, $(0, +\infty)$.

1451. $f(x) = \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}\right)\mathrm{e}^{-x}$, $(0, +\infty)$.

1452. $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{1 + x^4}$, $(0, +\infty)$.

1453. $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \cos\ x^2$, $(-\infty, +\infty)$.

1454.1. 求函数 $f(\xi) = \dfrac{1 + \xi}{3 + \xi^2}$ 在区间 $x < \xi < +\infty$ 内的下确界与上确界. 作出下列函数的图像:

$$M(x) = \sup_{x<\xi<+\infty} f(\xi), \quad m(x) = \inf_{x<\xi<+\infty} f(\xi).$$

1454.2. 设

$$M_k = \sup_x |f^{(k)}(x)| \quad (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

若 $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, 求 M_0, M_1 和 M_2.

1455. 求以下各数列的最大项:

(a) $\dfrac{n^{10}}{2^n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$; (b) $\dfrac{\sqrt{n}}{n + 10\ 000}$ $(n = 1, 2, \cdots)$;

(c) $\sqrt[n]{n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

1456.1. 证明下列不等式:

(a) $|3x - x^3| \leqslant 2$ $(|x| \leqslant 2)$;

(b) $\dfrac{1}{2^{p-1}} \leqslant x^p + (1 - x)^p \leqslant 1$ $(0 \leqslant x \leqslant 1, p > 1)$;

(c) $x^m(a - x)^n \leqslant \dfrac{m^m n^n}{(m + n)^{m+n}} a^{m+n}$ $(0 \leqslant x \leqslant a, m > 0, n > 0)$;

(d) $\dfrac{x + a}{2^{\frac{n-1}{n}}} \leqslant \sqrt[n]{x^n + a^n} \leqslant x + a$ $(x > 0, a > 0, n > 1)$;

(e) $|a \sin x + b \cos x| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$.

1456.2. 证明不等式:

$$\frac{2}{3} \leqslant \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} \leqslant 2 \quad (-\infty < x < +\infty).$$

1457. 求多项式

$$P(x) = x(x - 1)^2(x + 2)$$

在闭区间 $[-2,1]$ 上"与零的偏差", 就是求

$$E_P=\sup_{-2\leqslant x\leqslant 1}|P(x)|.$$

1458. 应当选择怎样的系数 q, 使多项式

$$P(x)=x^2+q$$

在闭区间 $[-1,1]$ 上与零的偏差最小, 即

$$E_P=\sup_{-1\leqslant x\leqslant 1}|P(x)|=\min?$$

1459. 数

$$\Delta=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-g(x)|$$

称为函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的*绝对偏差*.

求函数 $f(x)=x^2$ 和 $g(x)=x^3$ 在闭区间 $[0,1]$ 上的绝对偏差.

1460. 在闭区间 $[x_1,x_2]$ 上用线性函数

$$g(x)=(x_1+x_2)x+b$$

近似地代替函数

$$f(x)=x^2,$$

使函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的绝对偏差 (参阅上题) 最小, 并求此最小的绝对偏差.

1461. 求函数

$$f(x)=\max\{2|x|,|1+x|\}$$

的极小值.

确定下列各方程实根的数目, 并划分出这些根所在的区间:

1462. $x^3-6x^2+9x-10=0$.

1463. $x^3-3x^2-9x+h=0$.

1464. $3x^4-4x^3-6x^2+12x-20=0$.

1465. $x^5-5x=a$.

1466. $\ln x=kx$.

1467. $\mathrm{e}^x=ax^2$.

1468. 当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时, $\sin^3x\cdot\cos x=a$.

1469. $\cosh x=kx$.

1470. 在什么条件下方程

$$x^3+px+q=0$$

有: (a) 一个实根; (b) 三个实根? 在平面 (p,q) 上画出相应的区域.

§12. 依据函数的特征点作函数图像

为了作出函数 $y=f(x)$ 的图像, 必须: (1) 确定此函数的存在域并研究函数在其存在域边界点的性质; (2) 查明图像的对称性和周期性; (3) 求出函数的间断点及连续的区间; (4) 确定函数的零点及同号区间; (5) 求出极值点并查明函数上升和下降的区间; (6) 确定拐点及函数图像凹凸的区间; (7) 若有渐近线存在则求出渐近线; (8) 指出函数图像的各种特性.

记有星号的题, 只求其拐点的近似值.

作出下列函数的图像:

1471. $y = 3x - x^3$.

1472. $y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$.

1473. $y = (x+1)(x-2)^2$.

1474*. $y = \frac{2 - x^2}{1 + x^4}$.

1475*. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}$.

1476*. $y = \frac{x}{(1+x)(1-x)^2}$.

1477. $y = \frac{x^4}{(1+x)^3}$.

1478. $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$.

1479. $y = \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$.

1480. $y = \frac{x}{(1-x^2)^2}$.

1481. $y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

1482*. $y = \frac{x^4 + 8}{x^3 + 1}$.

1483. $y = \frac{1}{1+x} - \frac{10}{3x^2} + \frac{1}{1-x}$.

1484. $y = (x-3)\sqrt{x}$.

1485. (a) $y = \pm\sqrt{8x^2 - x^4}$;

(b) $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$.

1486. $y = \pm\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

1487*. $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$.

1488. $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2+1}$.

1489. $y = (x+2)^{\frac{2}{3}} - (x-2)^{\frac{2}{3}}$.

1490. $y = (x+1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{2}{3}}$.

1491. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

1492. $y = \frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$.

1493. $y = \frac{|1+x|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$.

1494. $y = 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}}$.

1495. $y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}$.

1496*. $y = \sqrt{\frac{x^4+3}{x^2+1}}$.

1497. $y = \sin x + \cos^2 x$.

1498. $y = (7 + 2\cos x)\sin x$.

1499. $y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$.

1500. $y = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x$.

1501. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

1502. $y = \sin x \cdot \sin 3x$.

1503. $y = \frac{\sin x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$.

1504. (a) $y = \frac{\cos x}{\cos 2x}$;

(b) $y = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$.

1505. $y = 2x - \tan x$.

1506. $y = \mathrm{e}^{2x - x^2}$.

1507. $y = (1+x^2)\mathrm{e}^{-x^2}$.

1508. $y = x + \mathrm{e}^{-x}$.

1509. (a) $y = x^{\frac{2}{3}}\mathrm{e}^{-x}$;

(b) $y = \mathrm{e}^{-2x}\sin^2 x$.

1510. $y = \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}$.

1511. $y = \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-x^2}}$.

1512. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

1513. $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

1514. $y = \sqrt{x^2+1} \cdot \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

1515. $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1516. $y = x + \arctan x$.

1517. $y = \dfrac{x}{2} + \operatorname{arccot} x$.

1518. $y = x \arctan x$.

1519. $y = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$.

1520. $y = \arccos \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

1521. $y = (x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

1522. $y = 2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.

1523*. $y = \ln \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+1}$.

1524. $y = a \arcsin \dfrac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2}\ (a>0)$.

1525. $y = \arccos \dfrac{1-x}{1-2x}$.

1526. $y = x^x$.

1527. $y = x^{\frac{1}{x}}$.

1528. $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

1529*. $y = x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\ (x>0)$.

1530*. $y = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x^2}}}{1+x^2}$ (不研究凹凸性).

作出下列参数方程所表示的曲线:

1531. $x = \dfrac{(t+1)^2}{4}, y = \dfrac{(t-1)^2}{4}$.

1532. $x = 2t - t^2, y = 3t - t^3$.

1533*. $x = \dfrac{t^2}{t-1}, y = \dfrac{t}{t^2-1}$.

1534. $x = \dfrac{t^2}{1-t^2}, y = \dfrac{1}{1+t^2}$.

1535. $x = t + \mathrm{e}^{-t}, y = 2t + \mathrm{e}^{-2t}$.

1536. $x = a\cos 2t, y = a\cos 3t\ (a>0)$.

1537. $x = \cos^4 t, y = \sin^4 t$.

1538. $x = t\ln t, y = \dfrac{\ln t}{t}$.

1539. $x = \dfrac{a}{\cos^3 t}, y = a\tan^3 t\ (a>0)$.

1540. $x = a(\sinh t - t), y = a(\cosh t - 1)\ (a>0)$.

把下列曲线方程化为参数方程, 然后作出这些曲线的图像:

1541. $x^3 + y^3 - 3axy = 0\ (a>0)$.

提示: 令 $y = tx$.

1542. $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$.

1543. $x^2y^2 = x^3 - y^3$.

1544. $x^y = y^x\ (x>0, y>0)$.

1545. 作出曲线 $\cosh^2 x - \cosh^2 y = 1$ 的图像.

作出下列用极坐标 (φ, r) $(r \geqslant 0)$ 表示的函数的图像:

1546. $r = a + b\cos\varphi\ (0 < a \leqslant b)$.

1547. $r = a\sin 3\varphi\ (a>0)$.

1548. $r = \dfrac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$ $(a > 0)$.

1549*. $r = a\dfrac{\tanh\varphi}{\varphi - 1}$, 其中 $\varphi > 1$ $(a > 0)$.

1550*. $\varphi = \arccos\dfrac{r-1}{r^2}$.

作出下列曲线族的图像 (a 为参变量):

1551. $y = x^2 - 2x + a$.

1552. $y = x + \dfrac{a^2}{x}$.

1553. $y = x \pm \sqrt{a(1-x^2)}$.

1554. $y = \dfrac{x}{2} + \mathrm{e}^{-ax}$.

1555. $y = x\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}$.

§13. 函数的极大值与极小值问题

1556. 证明: 若函数 $f(x)$ 不为负, 则函数

$$F(x) = Cf^2(x) \quad (C > 0)$$

与函数 $f(x)$ 有相同的极值点.

1557. 证明: 若当 $-\infty < x < +\infty$ 时函数 $\varphi(x)$ 严格单调递增, 则函数

$$f(x) \quad \text{和} \quad \varphi(f(x))$$

有相同的极值点.

1558. 若二正数之和等于常数 a, 求此二数的 m 次幂与 n 次幂 $(m > 0, n > 0)$ 之积的最大值.

1559. 若二正数之积等于常数 a, 求此二数的 m 次幂与 n 次幂 $(m > 0, n > 0)$ 之和的最小值.

1560. 当对数之底取何值时存在这样的数, 它本身和它的对数相等?

1561. 从面积为给定值 S 的一切矩形中, 求其周长为最小者.

1562. 若直角三角形的一直角边与斜边之和为常数, 求具有最大面积的直角三角形.

1563. 要使容积为给定值 V 的圆柱形闭合容器具有最小的表面积, 其尺寸如何?

1564. 在不超过半圆的给定弓形内作出具有最大面积的内接矩形.

1565. 在椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

内作出具有最大面积而边平行于椭圆轴的内接矩形.

1566. 在底边为 b 及高为 h 的三角形内作出具有最大周长的内接矩形. 研究此问题有解的可能性.

1567. 从直径为 d 的原木 (圆形横截面) 切出横截面为矩形的梁, 此矩形的底等于 b, 高等于 h. 若梁的强度[①]与 bh^2 成正比, 问梁的尺寸如何其强度最大?

1568. 在半径为 R 的半球中作出具有最大体积且底为正方形的内接长方体.

[①]此处的强度指梁的截面模量. —— 译注

1569. 在半径为 R 的球内作出具有最大体积的内接圆柱体.

1570. 在半径为 R 的球内作出具有最大表面积的内接圆柱体.

1571. 在已知球外作出具有最小体积的外切圆锥体.

1572. 求母线为给定值 l 的圆锥之最大体积.

1573. 在顶角为 2α 底半径为 R 的直圆锥体中作出具有最大表积的内接圆柱体.

1574. 求从点 $M(p,p)$ 到抛物线 $y^2=2px$ 的最短距离.

1575. 求从点 $A(2,0)$ 到圆 $x^2+y^2=1$ 的最短与最长距离.

1576. 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (0<b<a)$ 的经过顶点 $B(0,-b)$ 的最大弦.

1577. 过椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上的点 $M(x,y)$ 引切线, 使由此切线与坐标轴构成的三角形具有最小的面积.

1578. 直径相同的圆柱体与半球体拼接在一起构成一物体, 其体积为 V. 要使此物体具有最小的表面积, 其尺寸如何?

1579. 设明渠的横截面为等腰梯形, 渠中流水的横截面面积为 S, 水面的高为 h. 问水渠侧边的倾角 φ 如何, 才使其横截面边界被水浸湿的部分具有最小的长度?

1580. 设封闭曲线所围面积为 S, 则该曲线的周长与面积同为 S 的圆的周长之比称为封闭曲线的*弯曲度*.

设等腰梯形 $ABCD$ ($AD//BC$) 的底边 $AD=2a$, 锐角 $BAD=\alpha$, 问等腰梯形的形状如何, 才有最小的弯曲度?

1581. 从半径为 R 的圆中应切去怎样的扇形, 才能使余下的部分可卷成一漏斗, 其容积为最大?

1582. 从南至北的铁路经过 B 城, 工厂 A 距此铁路的最短距离为 a, 距偏北方的 B 城所在纬线的距离为 b. 为了从 A 至 B 运输货物最经济, 从工厂修建一条专线铁路. 若每吨货物沿专线运输的价格是 p元/km, 而沿常规铁路为 q元/km ($p>q$), 则支线应向常规铁路取怎样的角度 φ?

1583. 二船各以恒定的速度 u 和 v 沿直线前进, 二者前进方向所成的角为 θ. 若在某时刻它们到其路线交点的距离分别为 a 和 b, 求二船的最小距离.

1584. 在 A 与 B 二点处各有一光源, 其发光强度分别为 S_1 与 S_2. 在线段 $AB=a$ 上求出最小照度的点 M.

1585. 发光点位于半径为 R 与 r ($R>r$) 的二互不相交之球的连心线上, 并在此二球的外面. 此发光点的位置如何, 才可使二球表面上被照明部分之和为最大?

1586. 设圆桌面的半径为 a. 应当在正对桌面中央多高的地方安置电灯, 才可使桌面边缘的照度为最大?

提示: 照度可用下列公式表示:

$$I=I_0\frac{\sin\varphi}{r^2},$$

式中 φ 为光线对桌面的倾角, r 为光源与被照面的距离, I_0 为光源的发光强度.

1587. 向宽为 a 的河修建一宽为 b 的运河, 二者成直角相交, 问能驶进这运河的船, 其最大的长度如何?

1588. 船航行一昼夜的耗费由两部分组成: 固定部分等于 a 元, 变动部分与速度的立方成正比增加. 在怎样的速度 v 时, 航行最为经济?

1589. 重量为 P 的物体位于粗糙的水平面上, 需用力把物体从原位置移动. 若物体摩擦因子等于 k, 问作用力对水平面的倾斜程度如何, 才使所需的力为最小?

1590. 有一茶杯, 其形状是半径为 a 的半球, 在茶杯中放一长为 $l > 2a$ 的杆, 求杆的平衡位置.

§14. 曲线的相切. 曲率圆. 渐屈线

1. n 阶相切. 对于两曲线 $y = \varphi(x)$ 及 $y = \psi(x)$, 若在点 x_0 有

$$\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0) \quad (k = 0, 1, \cdots, n) \quad 且 \quad \varphi^{(n+1)}(x_0) \neq \psi^{(n+1)}(x_0),$$

便说这两曲线在此点 n *阶相切* (在严格的意义上讲!). 在这种情形下, 当 $x \to x_0$ 时有:

$$\varphi(x) - \psi(x) = O^*(x - x_0)^{n+1}.$$

2. 曲率圆. 若圆周

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = R^2$$

与已知曲线 $y = f(x)$ 二阶或更高阶相切, 则称此圆为在相应点的*曲率圆*. 这个圆的半径

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

称为*曲率半径*, 而量 $k = \dfrac{1}{R}$ 称为曲率.

3. 渐屈线. 曲率圆中心 (ξ, η) (*曲率中心*)

$$\xi = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}$$

的轨迹称为已知曲线 $y = f(x)$ 的*渐屈线*.

1591. 选择直线

$$y = kx + b$$

的参数 k 与 b, 使它与曲线

$$y = x^3 - 3x^2 + 2$$

二阶或更高阶相切.

1592. 应该怎样选择系数 a, b 和 c, 才能使抛物线

$$y = ax^2 + bx + c$$

在点 $x = x_0$ 与曲线 $y = \mathrm{e}^x$ 二阶相切?

1593. 下列曲线与 Ox 轴在点 $x = 0$ 相切的阶如何:

(a) $y = 1 - \cos x$; (b) $y = \tan x - \sin x$; (c) $y = \mathrm{e}^x - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right)$.

1594. 证明: 曲线

$$y=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 与 Ox 轴相切的阶为无穷大.

1595. 求双曲线

$$xy=1$$

在下列各点的曲率半径和曲率中心:

(a) $M(1,1)$;　　(b) $N(100,0.01)$.

求下列曲线的曲率半径:

1596. 抛物线 $y^2=2px$.

1597. 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ \ (a\geqslant b>0)$.

1598. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

1599. 星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

1600. 椭圆 $x=a\cos t, y=b\sin t$.

1601. 摆线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$.

1602. 圆的渐伸线 $x=a(\cos t+t\sin t), y=a(\sin t-t\cos t)$.

1603. 证明: 二次曲线

$$y^2=2px-qx^2$$

的曲率半径与法线段的立方成正比.

1604. 写出以极坐标表示的曲线的曲率半径公式.

求下列极坐标方程所表示的曲线的曲率半径:

1605. 阿基米德螺线 $r=a\varphi$.

1606. 对数螺线 $r=ae^{m\varphi}$.

1607. 心脏线 $r=a(1+\cos\varphi)$.

1608. 双纽线 $r^2=a^2\cos 2\varphi$.

1609. 在曲线 $y=\ln x$ 上求曲率最大的点.

1610. 三次抛物线 $y=\dfrac{kx^3}{6}$ $(0\leqslant x<+\infty, k>0)$ 的最大曲率等于 $\dfrac{1}{1000}$, 求达到此最大曲率的点 x.

求下列各曲线的渐屈线方程:

1611. 抛物线 $y^2=2px$.

1612. 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

1613. 星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

1614. 曳物线 $x=a\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}$.

1615. 对数螺线 $r=ae^{m\varphi}$.

1616. 证明: 摆线

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)$$

的渐屈线仍为一摆线, 仅其位置与所给摆线不同而已.

§15. 方程的近似解法

1. 比例法 (弦线法). 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续且

$$f(a)f(b)<0,$$

而当 $a<x<b$ 时, $f'(x)\neq 0$, 则方程

$$f(x)=0 \tag{1}$$

在区间 (a,b) 内有而且仅有一个实根 ξ. 可取下面的值作为此根的第一个近似值:

$$x_1=a+\delta_1$$

式中 $\delta_1=-\dfrac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a)$.

进而, 对区间 (a,x_1) 和 (x_1,b) 中使函数 $f(x)$ 在其两端异号的那一个区间运用此方法, 得到根 ξ 的第二个近似值 x_2, 并不断重复此过程. 对于第 n 个近似值 x_n, 有以下估计:

$$|x_n-\xi|\leqslant\left|\frac{f(x_n)}{m}\right|, \tag{2}$$

其中 $m=\inf\limits_{a<x<b}|f'(x)|$, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$.

2. 牛顿法 (切线法). 若在闭区间 $[a,b]$ 内 $f''(x)\neq 0$, 且 $f(a)f''(a)>0$, 则可取数值

$$\xi_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)}$$

作为方程 (1) 的根 ξ 的第一个近似值 ξ_1.

重复利用这个方法, 很快就得到趋于根 ξ 的一系列近似值 ξ_n $(n=1,2,\cdots)$, 这些近似值的精度可根据公式 (2) 来估计.

为了大致确定方程的根, 最好作出函数 $y=f(x)$ 的图像.

利用比例法求下列方程的根 (精确到 0.001):

1617. $x^3-6x+2=0$.

1618. $x^4-x-1=0$.

1619. $x-0.1\sin x=2$.

1620. $\cos x=x^2$.

利用牛顿法求下列方程的根 (精确到所指定的精度):

1621. $x^2+\dfrac{1}{x^2}=10x$ (精确到 10^{-3}).

1622. $x\lg x=1$ (精确到 10^{-4}).

1623. $\cos x\cdot\cosh x=1$ (精确到 10^{-3}) (二正根).

1624. $x+\mathrm{e}^x=0$ (精确到 10^{-5}).

1625. $x\tanh x=1$ (精确到 10^{-6}).

1626. 求方程

$$\tan x=x$$

最小的三个正根 (精确到 0.001).

1627. 求方程

$$\cot x=\frac{1}{x}-\frac{x}{2}$$

的二正根 (精确到 10^{-3}).

第三章 不定积分

§1. 最简单的不定积分

1. 不定积分的概念. 若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义且连续, $F(x)$ 是它的原函数, 即当 $a<x<b$ 时 $F'(x)=f(x)$, 则

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C, \quad a<x<b,$$

其中 C 为任意常数.

2. 不定积分的基本性质.

(a) $\mathrm{d}\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right] = f(x)\,\mathrm{d}x$; (b) $\int \mathrm{d}\Phi(x) = \Phi(x)+C$;

(c) $\int Af(x)\,\mathrm{d}x = A\int f(x)\,\mathrm{d}x$ (A 为常数, $A\neq 0$);

(d) $\int [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

3. 最简积分表.

I. $\int x^n\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$ $(n\neq -1)$. II. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x|+C$ $(x\neq 0)$.

III. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \begin{cases} \arctan x + C, \\ -\operatorname{arccot} x + C. \end{cases}$ IV. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|+C$.

V. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C. \end{cases}$ VI. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm 1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm 1}\right|+C$.

VII. $\int a^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a}+C$ $(a>0, a\neq 1)$; $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$.

VIII. $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$. IX. $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$.

X. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\cot x + C$. XI. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + C$.

XII. $\int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x + C$. XIII. $\int \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh x + C$.

XIV. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh^2 x} = -\coth x + C.$ XV. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^2 x} = \tanh x + C.$

4. 积分的基本方法.

(a) 引入新变量法. 若

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

则

$$\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + C, \text{ 式中 } u = \varphi(x) \text{ 是连续可微函数.}$$

(b) 分项积分法. 若

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

则

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int f_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

(c) 代换法. 若 $f(x)$ 连续, 令

$$x = \varphi(t), \text{ 式中 } \varphi(t) \text{ 及其导数 } \varphi'(t) \text{ 皆连续,}$$

则得:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

(d) 分部积分法. 若 u 和 v 为 x 的可微函数, 则

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u.$$

利用最简积分表, 求下列积分:

1628. $\int (3 - x^2)^3\,\mathrm{d}x.$

1629. $\int x^2(5 - x)^4\,\mathrm{d}x.$

1630. $\int (1 - x)(1 - 2x)(1 - 3x)\,\mathrm{d}x.$

1631. $\int \left(\frac{1 - x}{x}\right)^2\,\mathrm{d}x.$

1632. $\int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}\right)\mathrm{d}x.$

1633. $\int \frac{x + 1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$

1634. $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x.$

1635. $\int \frac{(1 - x)^3}{x\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x.$

1636. $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$

1637. $\int \frac{(\sqrt{2x} - \sqrt[3]{3x})^2}{x}\,\mathrm{d}x.$

1638. $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3}\,\mathrm{d}x.$

1639. $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1 + x^2}.$

1640. $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1 - x^2}.$

1641. $\int \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x.$

1642. $\int \frac{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^4}}\,\mathrm{d}x.$

1643. $\int \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^4 - 1}}\,\mathrm{d}x.$

1644. $\int (2^x + 3^x)^2 \, dx$.

1645. $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} \, dx$.

1646. $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} \, dx$.

1647. $\int (1 + \sin x + \cos x) \, dx$.

1648. $\int \sqrt{1 - \sin 2x} \, dx \ (0 \leqslant x \leqslant \pi)$.

1649. $\int \cot^2 x \, dx$.

1650. $\int \tan^2 x \, dx$.

1651. $\int (a \ \sinh x + b \ \cosh x) \, dx$.

1652. $\int \tanh^2 x \, dx$.

1653. $\int \coth^2 x \, dx$.

1654. 证明: 若

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C,$$

则

$$\int f(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \quad (a \neq 0).$$

求下列积分:

1655. $\int \frac{dx}{x+a}$.

1656. $\int (2x-3)^{10} \, dx$.

1657. $\int \sqrt[3]{1-3x} \, dx$.

1658. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$.

1659. $\int \frac{dx}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}$.

1660. $\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x} \, dx$.

1661. $\int \frac{dx}{2+3x^2}$.

1662. $\int \frac{dx}{2-3x^2}$.

1663. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$.

1664. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$.

1665. $\int (e^{-x} + e^{-2x}) \, dx$.

1666. $\int (\sin 5x - \sin 5\alpha) \, dx$.

1667. $\int \frac{dx}{\sin^2 \left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}$.

1668. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$.

1669. $\int \frac{dx}{1-\cos x}$.

1670. $\int \frac{dx}{1+\sin x}$.

1671. $\int [\sinh(2x+1) + \cosh(2x-1)] \, dx$.

1672. $\int \frac{dx}{\cosh^2 \frac{x}{2}}$.

1673. $\int \frac{dx}{\sinh^2 \frac{x}{2}}$.

用适当地变换被积函数的方法求下列积分:

1674. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1675. $\displaystyle\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,\mathrm{d}x$.

1676. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{3-2x^2}$.

1677. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$.

1678. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{4+x^2}$.

1679. $\displaystyle\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x^8-2}$.

1680. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}}$.

提示: $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\,\mathrm{d}\left(\sqrt{x}\right)$.

1681. $\displaystyle\int \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$.

1682. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}$.

1683. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$.

1684. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$.

1685. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$.

1686. $\displaystyle\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(8x^3+27)^{\frac{2}{3}}}$.

1687. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}$.

1688. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$.

1689. $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

1690. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{2+\mathrm{e}^x}$.

1691. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$.

1692. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}$.

1693. $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$.

1694. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln(\ln x)}$.

1695. $\displaystyle\int \sin^5 x\cos x\,\mathrm{d}x$.

1696. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\,\mathrm{d}x$.

1697. $\displaystyle\int \tan x\,\mathrm{d}x$.

1698. $\displaystyle\int \cot x\,\mathrm{d}x$.

1699. $\displaystyle\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\,\mathrm{d}x$.

1700. (a) $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}\,\mathrm{d}x$; (b) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}\,\mathrm{d}x$;

(c) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}\,\mathrm{d}x$; (d) $\displaystyle\int \frac{\sinh x}{\sqrt{\cosh 2x}}\,\mathrm{d}x$.

1701. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\sqrt[4]{\cot x}}$.

1702. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x+2\cos^2 x}$.

1703. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$.

1704. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$.

1705. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh x}$.

1706. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x}$.

1707. $\int \frac{\sinh x \cosh x}{\sqrt{\sinh^4 x + \cosh^4 x}}\,dx$.

1708. $\int \frac{dx}{\cosh^2 x \sqrt[3]{\tanh^2 x}}$.

1709. $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$.

1710. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$.

1711. $\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}\,dx$.

1712. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$.

提示: $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx = d\left(x-\frac{1}{x}\right)$.

1713. $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\,dx$.

1714. $\int \frac{x^4\,dx}{(x^5+1)^4}$.

1715. $\int \frac{x^{\frac{n}{2}}\,dx}{\sqrt{1+x^{n+2}}}$.

1716. $\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx$.

1717. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{2+\cos\ 2x}}$.

1718. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx$.

1719. $\int \frac{2^x\cdot 3^x}{9^x-4^x}\,dx$.

1720. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$.

用分项积分法计算下列积分:

1721. (a) $\int x^2(2-3x^2)^2\,dx$; (b) $\int x(1-x)^{10}\,dx$.

1722. $\int \frac{1+x}{1-x}\,dx$.

1723. $\int \frac{x^2}{1+x}\,dx$.

1724. $\int \frac{x^3}{3+x}\,dx$.

1725. $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2}\,dx$.

1726. $\int \frac{(2-x)^2}{2-x^2}\,dx$.

1727. $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,dx$.

1728. $\int \frac{x^5}{x+1}\,dx$.

1729. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$.

1730. $\int x\sqrt{2-5x}\,dx$.

提示: $x \equiv -\frac{1}{5}(2-5x)+\frac{2}{5}$.

1731. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1-3x}}$.

1732. $\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$.

1733. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}$.

提示: $1 \equiv \frac{1}{4}[(x+3)-(x-1)]$.

1734. $\int \frac{dx}{x^2+x-2}$.

1735. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$.

1736. $\int \frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)}$.

1737. $\int \frac{x\,dx}{(x+2)(x+3)}$.

1738. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^4+3x^2+2}$.

1739. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^2(x+b)^2}$ $(a \neq b)$.

1740. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(a^2 \neq b^2)$.

1741. $\displaystyle\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

1742. $\displaystyle\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

1743. $\displaystyle\int \sin x \sin(x+\alpha)\,\mathrm{d}x$.

1744. $\displaystyle\int \sin 3x \cdot \sin 5x\,\mathrm{d}x$.

1745. $\displaystyle\int \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{3}\,\mathrm{d}x$.

1746. $\displaystyle\int \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x$.

1747. $\displaystyle\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x$.

1748. $\displaystyle\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x$.

1749. $\displaystyle\int \sin^4 x\,\mathrm{d}x$.

1750. $\displaystyle\int \cos^4 x\,\mathrm{d}x$.

1751. $\displaystyle\int \cot^2 x\,\mathrm{d}x$.

1752. $\displaystyle\int \tan^3 x\,\mathrm{d}x$.

1753. $\displaystyle\int \sin^2 3x \sin^3 2x\,\mathrm{d}x$.

1754. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

提示: $1 \equiv \sin^2 x + \cos^2 x$.

1755. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos x}$.

1756. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x \cos^3 x}$.

1757. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$.

1758. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x}$.

1759. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$.

1760. $\displaystyle\int \frac{(1+\mathrm{e}^x)^2}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$.

1761. $\displaystyle\int \sinh^2 x\,\mathrm{d}x$.

1762. $\displaystyle\int \cosh^2 x\,\mathrm{d}x$.

1763. $\displaystyle\int \sinh x \sinh 2x\,\mathrm{d}x$.

1764. $\displaystyle\int \cosh x \cdot \cosh 3x\,\mathrm{d}x$.

1765. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh^2 x \cosh^2 x}$.

用适当的代换, 求下列积分:

1766. $\displaystyle\int x^2 \sqrt[3]{1-x}\,\mathrm{d}x$.

1767. $\displaystyle\int x^3(1-5x^2)^{10}\,\mathrm{d}x$.

1768. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,\mathrm{d}x$.

1769. $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

1770. $\displaystyle\int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x$.

1771. $\displaystyle\int \cos^5 x \cdot \sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x$.

1772. $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

1773. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,\mathrm{d}x$.

1774. $\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

1775. $\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}+e^x}$.

1776. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

1777. $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{dx}{1+x}$.

用三角函数代换 $x=a\sin t, x=a\tan t, x=a\sin^2 t$ 等,求下列积分 (参数为正的):

1778. $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

1779. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-2}}$.

1780. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$.

1781. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$.

1782. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$.

1783. $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,dx$.

1784. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

提示: 用代换 $x-a=(b-a)\sin^2 t$.

1785. $\int \sqrt{(x-a)(b-a)}\,dx$.

用双曲函数代换 $x=a\sinh t, x=a\cosh t$ 等, 求下列积分 (参数为正的):

1786. $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$.

1787. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

1788. $\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\,dx$.

1789. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$.

1790. $\int \sqrt{(x+a)(x+b)}\,dx$.

提示: 令 $x+a=(b-a)\sinh^2 t$.

用分部积分法, 求下列积分:

1791. $\int \ln x\,dx$.

1792. $\int x^n \ln x\,dx\ (n\neq -1)$.

1793. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$.

1794. $\int \sqrt{x}\ln^2 x\,dx$.

1795. $\int x e^{-x}\,dx$.

1796. $\int x^2 e^{-2x}\,dx$.

1797. $\int x^3 e^{-x^2}\,dx$.

1798. $\int x\cos x\,dx$.

1799. $\int x^2\sin 2x\,dx$.

1800. $\int x\sinh x\,dx$.

1801. $\int x^3\cosh 3x\,dx$.

1802. $\int \arctan x\,dx$.

1803. $\int \arcsin x\,dx$.

1804. $\int x\arctan x\,dx$.

1805. $\int x^2 \arccos x \, dx$.

1806. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$.

1807. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \, dx$.

1808. $\int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx$.

1809. $\int \arctan \sqrt{x} \, dx$.

1810. $\int \sin x \cdot \ln(\tan x) \, dx$.

求下列积分:

1811. $\int x^5 e^{x^3} dx$.

1812. $\int (\arcsin x)^2 dx$.

1813. $\int x(\arctan x)^2 dx$.

1814. $\int x^2 \ln \frac{1-x}{1+x} dx$.

1815. $\int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

1816. $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$.

1817. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$.

1818. $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$.

1819. $\int \sqrt{x^2 + a} \, dx$.

1820. $\int x^2 \sqrt{a^2 + x^2} \, dx$.

1821. $\int x \sin^2 x \, dx$.

1822. $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

1823. $\int x \sin \sqrt{x} \, dx$.

1824. $\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$.

1825. $\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$.

1826. $\int \sin(\ln x) \, dx$.

1827. $\int \cos(\ln x) \, dx$.

1828. $\int e^{ax} \cos bx \, dx$.

1829. $\int e^{ax} \sin bx \, dx$.

1830. $\int e^{2x} \sin^2 x \, dx$.

1831. $\int (e^x - \cos x)^2 dx$.

1832. $\int \frac{\operatorname{arccot} e^x}{e^x} dx$.

1833. $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx$.

1834. $\int \frac{x \, dx}{\cos^2 x}$.

1835. $\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx$.

在求下面的积分时, 需要把二次三项式化成标准形式, 并利用下列公式:

I. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \ (a \neq 0)$.

II. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \ (a \neq 0)$.

III. $\int \frac{x \, dx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \ln |a^2 \pm x^2| + C$.

Ⅳ. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C\ (a>0)$.

Ⅴ. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C\ (a>0)$.

Ⅵ. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2\pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2\pm x^2} + C\ (a>0)$.

Ⅶ. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C\ (a>0)$.

Ⅷ. $\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C\ (a>0)$.

求下列积分:

1836. $\int \frac{dx}{a+bx^2}\ (ab\neq 0)$.

1837. $\int \frac{dx}{x^2-x+2}$.

1838. $\int \frac{dx}{3x^2-2x-1}$.

1839. $\int \frac{x\,dx}{x^4-2x^2-1}$.

1840. $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx$.

1841. $\int \frac{x\,dx}{x^2-2x\cos\alpha+1}$.

1842. $\int \frac{x^3\,dx}{x^4-x^2+2}$.

1843. $\int \frac{x^5\,dx}{x^6-x^3-2}$.

1844. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x-8\sin x\cos x+5\cos^2 x}$.

1845. $\int \frac{dx}{\sin x+2\cos x+3}$.

1846. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}\ (b\neq 0)$.

1847. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

1848. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}$.

1849. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}}$.

1850. 证明: 若

$$y = ax^2+bx+c\ (a\neq 0),$$

则

$$\text{当 } a>0 \text{ 时},\quad \int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{y'}{2}+\sqrt{ay}\right| + C,$$

$$\text{当 } a<0 \text{ 时},\quad \int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{-y'}{\sqrt{b^2-4ac}} + C.$$

1851. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5+x-x^2}}$.

1852. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$.

1853. (a) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}}$; (b) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\sin x+\cos^2 x}}$.

1854. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}$.

1855. $\int \frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}}\,dx$.

1856. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

1857. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x-1}}$.

1858. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.

1859. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$.

1860. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}}$.

1861. $\displaystyle\int \sqrt{2+x-x^2}\,dx$.

1862. $\displaystyle\int \sqrt{2+x+x^2}\,dx$.

1863. $\displaystyle\int \sqrt{x^4+2x^2-1}\,x\,dx$.

1864. $\displaystyle\int \frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}}\,dx$.

1865. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}\,dx$.

§2. 有理函数的积分法

利用待定系数法, 求下列积分:

1866. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx$.

1867. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

1868. $\displaystyle\int \frac{x^{10}\,dx}{x^2+x-2}$.

1869. $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx$.

1870. $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx$.

1871. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^3-3x+2}$.

1872. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\,dx$.

1873. $\displaystyle\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 dx$.

1874. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$.

1875. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}$.

1876. $\displaystyle\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}\,dx$.

1877. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$.

1878. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$.

1879. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$.

1880. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)}$.

1881. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$.

1882. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^3-1}$.

1883. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-1}$.

1884. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1}$.

1885. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$.

1886. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^6+1}$.

1887. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}$.

1888. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$.

1889. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^4+3x^3+\frac{9}{2}x^2+3x+1}$.

1890. 在什么条件下, 积分

$$\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\,dx$$

为有理函数?

利用奥斯特罗格拉茨基方法求积分:

1891. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x+1)^3}$.

1892. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^3+1)^2}$.

1893. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^3}$.

1894. $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)^2}$.

1895. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^4+1)^2}$.

1896. $\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

1897. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^4-1)^3}$.

分出下列积分的代数部分:

1898. $\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

1899. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^3+x+1)^3}$.

1900. $\int \frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

1901. 计算积分

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}.$$

1902. 在什么条件下, 积分

$$\int \frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2}\,\mathrm{d}x$$

为有理函数?

利用不同方法, 计算下列积分:

1903. $\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}\,\mathrm{d}x$.

1904. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^8-1}$.

1905. $\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x^8+3}$.

1906. $\int \frac{x^2+x}{x^6+1}\,\mathrm{d}x$.

1907. $\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}\,\mathrm{d}x$.

1908. $\int \frac{x^4\,\mathrm{d}x}{(x^{10}-10)^2}$.

1909. $\int \frac{x^{11}\,\mathrm{d}x}{x^8+3x^4+2}$.

1910. $\int \frac{x^9\,\mathrm{d}x}{(x^{10}+2x^5+2)^2}$.

1911. $\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}\,\mathrm{d}x$.

1912. $\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

1913. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+2)}$.

1914. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+1)^2}$.

1915. $\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}\,\mathrm{d}x$.

1916. $\int \frac{x^4-1}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)}\,\mathrm{d}x$.

1917. $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,dx$.

1918. $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}\,dx$.

1919. $\int \frac{x^5-x}{x^8+1}\,dx$.

1920. $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx$.

1921. 试导出用于计算积分

$$I_n = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} \quad (a \neq 0)$$

的递推公式. 利用这个公式计算:

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^3}.$$

提示: 利用恒等式 $4a(ax^2+bx+c) \equiv (2ax+b)^2+(4ac-b^2)$.

1922. 利用代换 $t = \frac{x+a}{x+b}$ 计算积分:

$$I = \int \frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n} \quad (m \text{ 和 } n \text{ 为正整数}).$$

利用这个代换, 求

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}.$$

1923. 若 $P_n(x)$ 为 x 的 n 次多项式, 计算

$$\int \frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}}\,dx.$$

提示: 利用泰勒公式.

1924. 设 $R(x) = R^*(x^2)$, 其中 R^* 为有理函数. 函数 $R(x)$ 分解为有理公式时有什么特性?

1925. 计算

$$\int \frac{dx}{1+x^{2n}},$$

式中 n 为正整数.

§3. 无理函数的积分法

利用化被积函数为有理函数的方法, 求下列积分:

1926. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

1927. $\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$.

1928. $\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,dx$.

1929. $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$.

1930. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3}$.

1931. $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx$.

1932. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

1933. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}} \quad (a>0)$.

1934. $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}$ (n 为正整数).

1935. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$.　　提示: 令 $x=\left(\frac{u^2-1}{2u}\right)^2$.

1936. 考虑积分

$$\int R[x(x-a)^{\frac{p}{n}},(x-b)^{\frac{q}{n}}]\,dx,$$

其中 R 为有理函数, p,q,n 为整数. 证明: 若 $p+q=kn$, 其中 k 为整数, 则该积分为初等函数.

求最简单二次无理式的积分:

1937. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$.

1938. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

1939. $\int \frac{dx}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}$.

1940. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\,dx$.

1941. $\int \frac{x\,dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$.

1942. $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx$.

利用公式

$$\int \frac{P_n(x)}{y}\,dx = Q_{n-1}(x)y+\lambda\int\frac{dx}{y},$$

式中 $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, $P_n(x)$ 为 n 次多项式, $Q_{n-1}(x)$ 为 $n-1$ 次多项式, λ 为常数, 求下列积分:

1943. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx$.

1944. $\int \frac{x^{10}\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

1945. $\int x^4\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

1946. $\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}\,dx$.

1947. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$.

1948. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$.

1949. $\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}$.

1950. $\int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}$.

1951. 在什么条件下, 积分

$$\int \frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

是代数函数?

分解有理函数 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为最简分式, 求积分 $\int \frac{P(x)}{Q(x)y}dx$, 式中 $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$:

1952. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}$.

1953. $\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}$.

1954. $\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}\,dx$.

1955. $\int \frac{x^3}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx$.

1956. $\int \frac{x\,dx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}$.

1957. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

1958. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}$.

1959. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}}$.

1960. $\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

化二次三项式为标准形式, 计算下列积分:

1961. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$.

1962. $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$.

1963. $\int \frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

1964. 利用分式线性代换 $x=\frac{\alpha+\beta t}{1+t}$ 计算积分:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

1965. 求

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}.$$

利用欧拉代换:

(1) 若 $a>0$, $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+z$;

(2) 若 $c>0$, $\sqrt{ax^2+bx+c}=xz\pm\sqrt{c}$;

(3) $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=z(x-x_1)$,

求下列积分:

1966. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

1967. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

1968. $\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x$.

1969. $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,\mathrm{d}x$.

1970. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\left[1+\sqrt{x(1+x)}\right]^2}$.

利用不同方法, 计算下列积分:

1971. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.

1972. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}}$.

1973. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}$.

1974. $\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

1975. $\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$.

1976. $\int \frac{(x^2-1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}$.

1977. $\int \frac{(x^2+1)\,\mathrm{d}x}{(x^2-1)\sqrt{x^4+1}}$.

1978. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}$.

1979. $\displaystyle\int \frac{(x^2+1)\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}$.

1980. 证明: 积分

$$\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})\,\mathrm{d}x \quad (R \text{ 为有理函数})$$

的求法归结为有理函数的积分法.

二项微分式的积分

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x \quad (m, n \text{ 和 } p \text{ 为有理数})$$

仅在下列三种情形下可化为有理函数的积分 (切比雪夫定理):

第一种情形, p 为整数. 此时令 $x = z^N$, 其中 N 为分数 m 和 n 的公分母.

第二种情形, $\dfrac{m+1}{n}$ 为整数. 此时令 $a+bx^n = z^N$, 其中 N 为分数 p 的分母.

第三种情形, $\dfrac{m+1}{n}+p$ 为整数. 此时利用代换 $ax^{-n}+b = z^N$, 其中 N 为分数 p 的分母.

若 $n=1$, 则这些情形等价于: (1) p 为整数; (2) m 为整数; (3) $m+p$ 为整数.

计算下列积分:

1981. $\displaystyle\int \sqrt{x^3+x^4}\,\mathrm{d}x$.

1982. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,\mathrm{d}x$.

1983. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.

1984. $\displaystyle\int \frac{x^5\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1985. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

1986. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

1987. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[6]{1+x^6}}$.

1988. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt[5]{1+\dfrac{1}{x}}}$.

1989. $\displaystyle\int \sqrt[3]{3x-x^3}\,\mathrm{d}x$.

1990. 在什么情形下, 积分

$$\int \sqrt{1+x^m}\,\mathrm{d}x \quad (m \text{ 为有理数})$$

为初等函数?

§4. 三角函数的积分法

形如

$$\int \sin^m x\cos^n x\,\mathrm{d}x \quad (m \text{ 及 } n \text{ 为整数})$$

的积分可利用巧妙的变换或运用递推公式计算.

求下列积分:

1991. $\displaystyle\int \cos^5 x\,\mathrm{d}x$.

1992. $\displaystyle\int \sin^6 x\,\mathrm{d}x$.

1993. $\int \cos^6 x\,\mathrm{d}x.$

1994. $\int \sin^2 x\cos^4 x\,\mathrm{d}x.$

1995. $\int \sin^4 x\cos^5 x\,\mathrm{d}x.$

1996. $\int \sin^5 x\cos^5 x\,\mathrm{d}x.$

1997. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x.$

1998. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\,\mathrm{d}x.$

1999. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x}.$

2000. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^3 x}.$

2001. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x\cos^4 x}.$

2002. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x\cos^5 x}.$

2003. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos^4 x}.$

2004. $\int \tan^5 x\,\mathrm{d}x.$

2005. $\int \cot^6 x\,\mathrm{d}x.$

2006. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,\mathrm{d}x.$

2007. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}}.$

2008. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x\sqrt[3]{\sin^2 x}}.$

2009. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\tan x}}.$

2010. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{\tan x}}.$

2011. 推出下列积分的递推公式:

$$\text{(a) } I_n = \int \sin^n x\,\mathrm{d}x; \quad \text{(b) } K_n = \int \cos^n x\,\mathrm{d}x \quad (n > 2).$$

利用这些公式计算

$$\int \sin^6 x\,\mathrm{d}x \quad 和 \quad \int \cos^8 x\,\mathrm{d}x.$$

2012. 推出下列积分的递推公式:

$$\text{(a) } I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^n x}; \quad \text{(b) } K_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^n x} \quad (n > 2).$$

利用这些公式计算

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^5 x} \quad 和 \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^7 x}.$$

为了计算下面的积分, 可以运用公式:

Ⅰ. $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$;

Ⅱ. $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$;

Ⅲ. $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$.

求积分:

2013. $\int \sin 5x\cos x\,\mathrm{d}x.$

2014. $\int \cos x\cos 2x\cos 3x\,\mathrm{d}x.$

2015. $\int \sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}\,\mathrm{d}x.$

2016. $\int \sin x\sin(x+a)\sin(x+b)\,\mathrm{d}x.$

2017. $\int \cos^2 ax \cos^2 bx \, \mathrm{d}x$.

2018. $\int \sin^3 2x \cdot \cos^2 3x \, \mathrm{d}x$.

为了计算下面的积分, 可以运用恒等式:

$$\sin(\alpha - \beta) \equiv \sin[(x + \alpha) - (x + \beta)],$$
$$\cos(\alpha - \beta) \equiv \cos[(x + \alpha) - (x + \beta)].$$

求积分:

2019. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x + a)\sin(x + b)}$.

2020. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x + a)\cos(x + b)}$.

2021. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos(x + a)\cos(x + b)}$.

2022. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x - \sin a}$.

2023. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x + \cos a}$.

2024. $\int \tan x \tan(x + a) \, \mathrm{d}x$.

形如

$$\int R(\sin x, \cos x) \, \mathrm{d}x \quad (R \text{ 为有理函数})$$

的积分, 在一般情形下可利用代换 $\tan \frac{x}{2} = t$ 化为有理函数的积分.

(a) 若等式

$$R(-\sin x, \cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$$

或

$$R(\sin x, -\cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$$

成立, 则最好利用相应的代换 $\cos x = t$ 或 $\sin x = t$.

(b) 若等式

$$R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x)$$

成立, 则最好利用代换 $\tan x = t$.

求积分:

2025. $\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x - \cos x + 5}$.

2026. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2 + \cos x)\sin x}$.

2027. $\int \frac{\sin^2 x}{\sin x + 2\cos x} \mathrm{d}x$.

2028. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \varepsilon \cos x}$, (a) $0 < \varepsilon < 1$; (b) $\varepsilon > 1$.

2029. $\int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} \mathrm{d}x$.

2030. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$.

2031. $\int \frac{\cos^2 x \, \mathrm{d}x}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^2}$.

2032. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} \mathrm{d}x$.

2033. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(a \sin x + b \cos x)^2}$.

2034. $\int \frac{\sin x \, \mathrm{d}x}{\sin^3 x + \cos^3 x}$.

2035. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

2036. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^8 x + \cos^8 x} dx$.

2037. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$.

2038. $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx$.

2039. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$.

2040. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^2}$.

2041. 把分母化为对数的形式, 求积分

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}.$$

2042. 证明:

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx = Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x| + C,$$

式中 A, B, C 为常数.

提示: 令 $a_1 \sin x + b_1 \cos x = A(a \sin x + b \cos x) + B(a \cos x - b \sin x)$, 式中 A 和 B 为常数.

求积分:

2043. (a) $\displaystyle\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x} dx$; (b) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sin x - 3\cos x} dx$.

2044. $\displaystyle\int \frac{dx}{3 + 5\tan x}$.

2045. $\displaystyle\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^2} dx$.

2046. 证明:

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a \sin x + b \cos x + c} dx$$

$$= Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x + c| + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c},$$

式中 A, B, C 都是常系数.

求积分:

2047. $\displaystyle\int \frac{\sin x + 2\cos x - 3}{\sin x - 2\cos x + 3} dx$.

2048. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{2} + \sin x + \cos x} dx$.

2049. $\displaystyle\int \frac{2\sin x + \cos x}{3\sin x + 4\cos x - 2} dx$.

2050. 证明:

$$\int \frac{a_1 \sin^2 x + 2b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x}{a \sin x + b \cos x} dx = A \sin x + B \cos x + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x},$$

式中 A, B, C 都是常系数.

求积分:

2051. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 3\cos^2 x}{\sin x + \cos x} dx$.

2052. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x - \sin x \cos x + 2\cos^2 x}{\sin x + 2\cos x} dx$.

2053. 证明: 若 $(a - c)^2 + b^2 \neq 0$, 则

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin^2 x + 2b \sin x \cos x + c \cos^2 x} \mathrm{d}x = A \int \frac{\mathrm{d}u_1}{k_1 u_1^2 + \lambda_1} + B \int \frac{\mathrm{d}u_2}{k_2 u_2^2 + \lambda_2},$$

式中 A, B 为待定系数, λ_1, λ_2 为方程

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$$

的根, 而

$$u_i = (a-\lambda_i)\sin x + b\cos x, \quad k_i = \frac{1}{a-\lambda_i} \quad (i=1,2).$$

求积分:

2054. $\displaystyle\int \frac{2\sin x - \cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x} \mathrm{d}x.$　　**2055.** $\displaystyle\int \frac{(\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x}{2\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 5\cos^2 x}.$

2056. $\displaystyle\int \frac{\sin x - 2\cos x}{1 + 4\sin x \cos x} \mathrm{d}x.$

2057. 证明:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x + b\cos x)^n} = \frac{A\sin x + B\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-1}} + C\int \frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-2}},$$

式中 A, B, C 为待定系数.

2058. 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(\sin x + 2\cos x)^3}.$

2059. 若 n 为大于 1 的正整数, 证明:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cos x)^n} = \frac{A\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}} + B\int \frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cos x)^{n-1}} + C\int \frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cos x)^{n-2}},$$

其中 $|a| \neq |b|$, 并求出系数 A, B 和 C.

求积分:

2060. $\displaystyle\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}.$　　**2061.** $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\sqrt{\tan x}} \mathrm{d}x.$

2062. $\displaystyle\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2+\sin 2x}}.$　　**2063.** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\varepsilon\cos x)^2} \quad (0<\varepsilon<1).$

2064. $\displaystyle\int \frac{\cos^{n-1}\dfrac{x+a}{2}}{\sin^{n+1}\dfrac{x-a}{2}} \mathrm{d}x.$　　提示: 令 $t = \dfrac{\cos\dfrac{x+a}{2}}{\sin\dfrac{x-a}{2}}.$

2065. 推出积分

$$I_n = \int \left(\frac{\sin\dfrac{x-a}{2}}{\sin\dfrac{x+a}{2}} \right)^n \mathrm{d}x \quad (n \text{ 为正整数})$$

的递推公式.

§5. 各种超越函数的积分法

2066. 证明: 若 $P(x)$ 为 n 次多项式, 则

$$\int P(x)e^{ax}\,dx = e^{ax}\left[\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \cdots + (-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right] + C.$$

2067. 证明: 若 $P(x)$ 为 n 次多项式, 则

$$\int P(x)\cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a}\left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(4)}(x)}{a^4} - \cdots\right] + \frac{\cos ax}{a^2}\left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{(5)}(x)}{a^4} - \cdots\right] + C,$$

$$\int P(x)\sin ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a}\left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(4)}(x)}{a^4} - \cdots\right] + \frac{\sin ax}{a^2}\left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{(5)}(x)}{a^4} - \cdots\right] + C.$$

求积分:

2068. $\int x^3 e^{3x}\,dx.$

2069. $\int (x^2 - 2x + 2)e^{-x}\,dx.$

2070. $\int x^5 \sin 5x\,dx.$

2071. $\int (1 + x^2)^2 \cos x\,dx.$

2072. $\int x^7 e^{-x^2}\,dx.$

2073. $\int x^2 e^{\sqrt{x}}\,dx.$

2074. $\int e^{ax}\cos^2 bx\,dx.$

2075. $\int e^{ax}\sin^3 bx\,dx.$

2076. $\int xe^x \sin x\,dx.$

2077. $\int x^2 e^x \cos x\,dx.$

2078. $\int xe^x \sin^2 x\,dx.$

2079. $\int (x - \sin x)^3\,dx.$

2080. $\int \cos^2\sqrt{x}\,dx.$

2081. 证明: 若 R 为有理函数, 数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为可公约的, 则积分

$$\int R(e^{a_1x}, e^{a_2x}, \cdots, e^{a_nx})\,dx$$

是初等函数.

求下列积分:

2082. $\int \frac{dx}{(1 + e^x)^2}.$

2083. $\int \frac{e^{2x}}{1 + e^x}\,dx.$

2084. $\int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2}.$

2085. $\int \frac{dx}{1 + e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{3}} + e^{\frac{x}{6}}}.$

2086. $\int \frac{1 + e^{\frac{x}{2}}}{\left(1 + e^{\frac{x}{4}}\right)^2}\,dx.$

2087. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}.$

2088. $\int \sqrt{\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}}\,\mathrm{d}x$.

2089. $\int \sqrt{\mathrm{e}^{2x}+4\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$.

2090. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}+\sqrt{1-\mathrm{e}^x}}$.

2091. 证明: 若 R 为有理函数, 其分母仅有实根, 则积分

$$\int R(x)\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x$$

可用初等函数和超越函数

$$\int \frac{\mathrm{e}^{ax}}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{li}(\mathrm{e}^{ax})+C, \quad 式中\ \mathrm{li}\,x=\int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$$

来表示.

2092. 若 $P\left(\frac{1}{x}\right)=a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}$, $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 为常数, 则在什么情形下, 积分

$$\int P\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

为初等函数?

求积分:

2093. $\int \left(1-\frac{2}{x}\right)^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

2094. $\int \left(1-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

2095. $\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x$.

2096. $\int \frac{x\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

2097. $\int \frac{x^4\mathrm{e}^{2x}}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x$.

求含有 $\ln f(x)$, $\arctan f(x)$, $\arcsin f(x)$, $\arccos f(x)$ 等函数的积分, 其中 $f(x)$ 为代数函数:

2098. $\int \ln^n x\,\mathrm{d}x$ (n 为正整数).

2099. $\int x^3\ln^3 x\,\mathrm{d}x$.

2100. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 \mathrm{d}x$.

2101. $\int \ln\left[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}\right]\frac{\mathrm{d}x}{(x+a)(x+b)}$.

2102. $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x$.

2103. $\int \ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})\,\mathrm{d}x$.

2104. $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$.

2105. $\int x\arctan(x+1)\,\mathrm{d}x$.

2106. $\int \sqrt{x}\arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

2107. $\int x\arcsin(1-x)\,\mathrm{d}x$.

2108. $\int \arcsin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

2109. $\int x\arccos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

2110. $\int \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

2111. $\int \frac{\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$.

2112. $\int \frac{x\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$.

2113. $\int x\arctan x\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$.

2114. $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x$.

2115. $\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

求含有双曲函数的积分:

2116. $\int \sinh^2 x\cosh^2 x\,\mathrm{d}x$.

2117. $\int \cosh^4 x\,\mathrm{d}x$.

2118. $\int \sinh^3 x\,\mathrm{d}x$.

2119. $\int \sinh x\sinh 2x\sinh 3x\,\mathrm{d}x$.

2120. $\int \tanh x\,\mathrm{d}x$.

2121. $\int \coth^2 x\,\mathrm{d}x$.

2122. $\int \sqrt{\tanh x}\,\mathrm{d}x$.

2123. (a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh x+2\cosh x}$; (b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh^2 x-4\sinh x\cosh x+9\cosh^2 x}$;

(c) $\int \frac{\mathrm{d}x}{0.1+\cosh x}$; (d) $\int \frac{\cosh x\,\mathrm{d}x}{3\sinh x-4\cosh x}$.

2124. $\int \sinh ax\sin bx\,\mathrm{d}x$.

2125. $\int \sinh ax\cos bx\,\mathrm{d}x$.

§6. 求函数积分的各种例子

求积分:

2126. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^6(1+x^2)}$.

2127. $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(1-x^2)^3}$.

2128. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4+x^8}$.

2129. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

2130. $\int x^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$.

2131. $\int \frac{x+2}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

2132. $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$.

2133. $\int \frac{x^5\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$.

2134. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$.

2135. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}$.

2136. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^4-2x^2-1}}$.

2137. $\int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

2138. $\int \frac{(1+x)\,\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x+x^2}}$.

2139. $\int \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$.

2140. $\int (2x+3)\arccos(2x-3)\,\mathrm{d}x$.

2141. $\int x\ln(4+x^4)\,\mathrm{d}x$.

2142. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

2143. $\int \frac{x\ln(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

2144. $\int x\sqrt{x^2+1}\ln\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

2145. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$.

2146. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+\sin x)^2}$.

2147. $\int \frac{\sin 4x}{\sin^8 x+\cos^8 x}\,\mathrm{d}x$.

2148. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}$.

2149. $\int \frac{ax^2+b}{x^2+1}\arctan x\,\mathrm{d}x$.

2150. $\int \frac{ax^2+b}{x^2-1}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\,\mathrm{d}x$.

2151. $\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$.

2152. $\int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

2153. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}\,\mathrm{d}x$.

2154. $\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

2155. $\int \frac{x^4\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

2156. $\int \frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$.

2157. $\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2}\,\mathrm{d}x$.

2158. $\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x\,\mathrm{d}x$.

2159. $\int x(1+x^2)\operatorname{arccot} x\,\mathrm{d}x$.

2160. $\int x^x(1+\ln x)\,\mathrm{d}x$.

2161. $\int \frac{\arcsin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

2162. $\int \frac{\arctan \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}(1+\mathrm{e}^x)}\,\mathrm{d}x$.

2163. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^{x+1}+1)^2-(\mathrm{e}^{x-1}+1)^2}$.

2164. $\int \sqrt{\tanh^2 x+1}\,\mathrm{d}x$.

2165. $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

2166. $\int |x|\,\mathrm{d}x$.

2167. $\int x|x|\,\mathrm{d}x$.

2168. $\int (x+|x|)^2\,\mathrm{d}x$.

2169. $\int \{|1+x|-|1-x|\}\,\mathrm{d}x$.

2170. $\int \mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x$.

2171. $\int \max(1,x^2)\,\mathrm{d}x$.

2172. $\int \varphi(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $\varphi(x)$ 为数 x 到最近整数的距离.

2173. $\int [x]|\sin \pi x|\,\mathrm{d}x\ (x\geqslant 0)$.

2174. $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & |x|\leqslant 1,\\ 1-|x|, & |x|>1.\end{cases}$

2175. $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, 式中 $f(x)=\begin{cases}1, & -\infty<x<0,\\ x+1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x, & 1<x<+\infty.\end{cases}$

2176. 求 $\int xf''(x)\,\mathrm{d}x$.

2177. 求 $\int f'(2x)\,\mathrm{d}x$.

2178. 设 $f'(x^2)=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$, 求 $f(x)$.

2179. (a) 设 $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$, 求 $f(x)$.

(b) 设 $f'(\ln x)=\begin{cases}1, & 0<x\leqslant 1,\\ x, & 1<x<+\infty,\end{cases}$ 且 $f(0)=0$, 求 $f(x)$.

2180. 设 $f(x)$ 为单调的连续函数, $f^{-1}(x)$ 为其反函数. 证明: 若

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C,$$

则

$$\int f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x=xf^{-1}(x)-F(f^{-1}(x))+C.$$

研究例子:

(a) $f(x)=x^n\ (n>0)$;

(b) $f(x)=\mathrm{e}^x$;

(c) $f(x)=\arcsin x$;

(d) $f(x)=\operatorname{artanh} x$.

第四章　定积分

§1. 定积分是积分和的极限

1. 黎曼积分. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义且 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$, 则数

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i \quad (x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_i+1,\ \Delta x_i=x_{i+1}-x_i) \tag{1}$$

称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的积分①.

极限 (1) 存在的充分必要条件为: 下积分和

$$\underline{S}=\sum_{i=0}^{n-1}m_i\Delta x_i$$

及上积分和

$$\overline{S}=\sum_{i=0}^{n-1}M_i\Delta x_i$$

当 $\max|\Delta x_i|\to 0$ 时有共同的极限, 其中

$$m_i=\inf_{x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}}f(x),\quad M_i=\sup_{x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}}f(x).$$

若等式 (1) 右端的极限存在, 则函数 $f(x)$ 称为相应区间上的可积函数 (常义的). 例如, (a) 连续函数, (b) 具有有限个间断点的有界函数, (c) 单调有界的函数, 这些都是任意有限闭区间上的可积函数. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上无界, 则它在 $[a,b]$ 上不可积 (常义的).

2. 可积条件. 函数 $f(x)$ 在已知闭区间 $[a,b]$ 上可积的充分必要条件为成立等式

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=0,$$

式中 ω_i 为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上的振幅.

2181. 把区间 $[-1,4]$ 分为 n 个相等的子区间, 并取这些子区间中点的坐标作自变量 ξ_i 的值 $(i=0,1,\cdots,n-1)$. 求函数 $f(x)=1+x$ 在此区间上的积分和 S_n.

---

①这里的 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i$ 称为积分和. —— 译注

2182. 把所给区间分为 n 个相等的部分, 求下列函数 $f(x)$ 在相应区间上的下积分和 $\underline{S}_n$ 与上积分和 $\overline{S}_n$:

(a) $f(x) = x^3 \quad (-2 \leqslant x \leqslant 3)$; (b) $f(x) = \sqrt{x} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$;

(c) $f(x) = 2^x \quad (0 \leqslant x \leqslant 10)$.

2183. 把闭区间 $[1,2]$ 分为 n 份, 使这 n 份的长构成一等比数列, 求函数 $f(x) = x^4$ 在此区间上的下积分和. 当 $n \to \infty$时此和的极限等于什么?

2184. 从积分的定义出发, 求

$$\int_0^T (v_0 + gt)\,\mathrm{d}t,$$

其中 T, v_0, g 为常数.

以适当的方法分割积分区间, 并视积分为相应积分和的极限, 计算下列定积分:

2185. $\displaystyle\int_{-1}^{2} x^2\,\mathrm{d}x$.

2186. $\displaystyle\int_0^1 a^x\,\mathrm{d}x \ (a > 0)$.

2187. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x$.

2188. $\displaystyle\int_0^x \cos t\,\mathrm{d}t$.

2189. $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \ (0 < a < b)$. 提示: 令 $\xi_i = \sqrt{x_i x_{i+1}} \ (i = 0, 1, \cdots, n)$.

2190. $\displaystyle\int_a^b x^m\,\mathrm{d}x \ (0 < a < b; m \neq -1)$.

提示: 选择诸分点, 使它们的横坐标 x_i 构成一等比数列.

2191. $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} \ (0 < a < b)$.

2192. 计算泊松积分

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\,\mathrm{d}x,$$

考虑两种情形: (a) $|\alpha| < 1$; (b) $|\alpha| > 1$.

提示: 分解多项式 $\alpha^{2n} - 1$ 为二次因式.

2193.1. 设函数 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 证明:

$$\lim_{\max|\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\varphi(\theta_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中 $x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}, x_i \leqslant \theta_i \leqslant x_{i+1} \ (i = 0, 1, \cdots, n-1)$, 且 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \ (x_0 = a, x_n = b)$.

2193.2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界且单调, 证明:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

2193.3. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界并凹 (参考习题 1312), 证明:

$$(b-a)\frac{f(a) + f(b)}{2} \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

2193.4. 设 $f(x) \in C^{(2)}[1, +\infty)$, 且当 $x \in [1, +\infty)$ 时 $f(x) \geqslant 0$, $f'(x) \geqslant 0$,

$f''(x) \leqslant 0$. 证明: 当 $n \to \infty$ 时

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{1}{2} f(n) + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x + O(1).$$

2193.5. 设 $f(x) \in C^{(1)}[a, b]$,

$$\Delta_n = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right),$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\Delta_n$.

2194. 证明: 不连续函数

$$f(x) = \operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$$

在区间 $[0, 1]$ 上可积.

2195. 证明: 黎曼函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ 为无理数}, \\ \dfrac{1}{n}, & x = \dfrac{m}{n} \quad (m \text{ 及 } n\ (n \geqslant 1) \text{ 为互素的整数}) \end{cases}$$

在任何有限的区间上可积.

2196. 证明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \left[\dfrac{1}{x}\right], & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在闭区间 $[0, 1]$ 上可积.

2197. 证明: 狄利克雷函数

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ 为无理数}, \\ 1, & x \text{ 为有理数} \end{cases}$$

在任何区间上不可积.

2198. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 且

$$f_n(x) = \sup f(x) \quad (x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}),$$

其中 $x_i = a + \dfrac{i}{n}(b-a)$ $(i = 0, 1, \cdots, n; n = 1, 2, \cdots)$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2199. 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则存在连续函数 $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 的序列, 使得在 $a \leqslant c \leqslant b$ 时

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^c \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

2200. 证明: 若有界函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可积, 则其绝对值 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上也可积, 并且

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

2201. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上绝对可积, 即积分 $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 存在. 这个函数在

$[a,b]$ 上是否为可积函数? 研究例子:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ -1, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

2202. 设函数 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[A,B]$ 上有定义并连续, 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 并且当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时 $A\leqslant f(x)\leqslant B$. 证明: 函数 $\varphi(f(x))$ 在 $[a,b]$ 上可积.

2203. 若函数 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 可积, 则函数 $f(\varphi(x))$ 是否也必定可积? 研究例子:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 1, & x\neq 0,\end{cases}$$

$\varphi(x)$ 为黎曼函数 (见习题 2195).

2204. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[A,B]$ 上可积, 证明: 函数 $f(x)$ 有积分连续性, 即

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\,\mathrm{d}x=0,$$

其中 $[a,b]\subset[A,B]$.

2205. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积, 证明: 等式

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x=0$$

当且仅当对属于闭区间 $[a,b]$ 内函数 $f(x)$ 连续的一切点有 $f(x)=0$ 时方成立.

§2. 利用不定积分计算定积分的方法

1. 牛顿–莱布尼茨公式. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义且连续, $F(x)$ 为它的原函数, 即 $F'(x)=f(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b.$$

当 $f(x)\geqslant 0$ 时, 定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 在几何上表示由曲线 $y=(x)$, Ox 轴及垂直于 Ox 轴的二直线 $x=a$ 和 $x=b$ 所围成的面积 S (图 9).

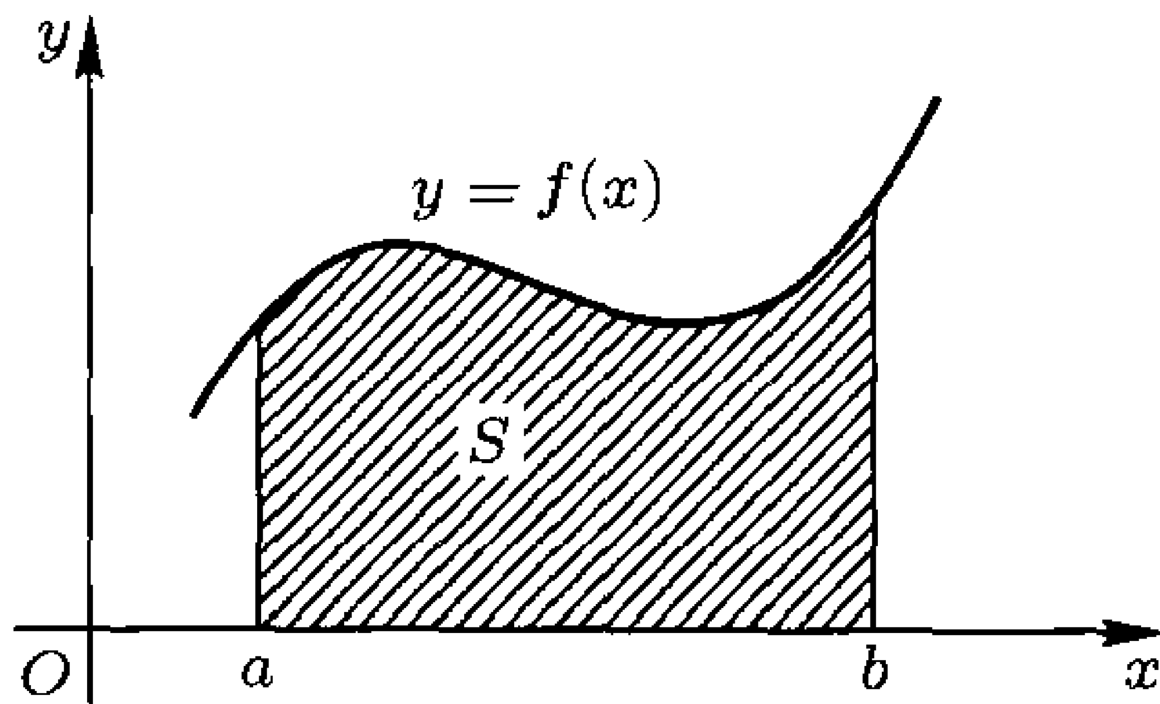


图 9

2. 分部积分法. 若 $f(x),g(x)\in C^{(1)}[a,b]$, 则

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. 变量代换. 若: (1) 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续; (2) 函数 $\varphi(t)$ 及其导数 $\varphi'(t)$ 皆在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续, 其中 $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$; (3) 复合函数 $f[\varphi(t)]$ 在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上有定义并连续, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

利用牛顿–莱布尼茨公式, 求下列定积分并绘出相应的曲边图形面积:

2206. $\int_{-1}^{8}\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x.$

2207. $\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x.$

2208. $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

2209. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

2210. $\displaystyle\int_{\sinh 1}^{\sinh 2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$.

2211. $\displaystyle\int_0^2 |1-x|\,\mathrm{d}x$.

2212. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x\cos\alpha+1}$ $(0<\alpha<\pi)$.

2213. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x}$ $(0\leqslant\varepsilon<1)$.

2214. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}}$ $(|a|<1,\ |b|<1,\ ab>0)$.

2215. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$ $(ab\neq 0)$.

2216. 对于下列定积分:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x}$;　(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sec^2 x\,\mathrm{d}x}{2+\tan^2 x}$;　(c) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$,

说明为什么运用牛顿-莱布尼茨公式会得到不正确的结果.

2217. 求 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)\mathrm{d}x$.

2218. 求 $\displaystyle\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$.

利用定积分求下列和的极限值:

2219. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$.

2220. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$.

2221. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$.

2222. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$.

2223. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$ $(p>0)$.

2224. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$.

2225. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

2226. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right]$.

弃掉高阶无穷小量, 求下列和的极限值:

2227. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n^2}+\left(1+\frac{2}{n}\right)\sin\frac{2\pi}{n^2}+\cdots+\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\sin\frac{(n-1)\pi}{n^2}\right]$.

2228. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\dfrac{k\pi}{n}}$.

2229. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2}\ (x>0)$.

2230. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\dfrac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

2231. 求:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b\sin x^2\,\mathrm{d}x;\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\int_a^b\sin x^2\,\mathrm{d}x;\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\int_a^b\sin x^2\,\mathrm{d}x.$$

2232. 求:

(a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$; (b) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{x^2}^{x^3}\dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$; (c) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\,\mathrm{d}t$.

2233. 求:

(a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\displaystyle\int_0^x\cos t^2\,\mathrm{d}t}{x}$; (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\displaystyle\int_0^x(\arctan t)^2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}$; (c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2}{\displaystyle\int_0^x\mathrm{e}^{2t^2}\,\mathrm{d}t}$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 f(nx)\,\mathrm{d}x$, 其中 $f(x)\in C[0,+\infty)$, 且当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)\to A$.

2234. 证明: 当 $x\to\infty$ 时

$$\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t\sim\frac{1}{2x}\mathrm{e}^{x^2}.$$

2235. 求

$$\lim_{x\to+0}\frac{\displaystyle\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan t}\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin t}\,\mathrm{d}t}.$$

2236. 设 $f(x)$ 为连续正值函数. 证明: 当 $x\geqslant0$ 时, 函数

$$\varphi(x)=\frac{\displaystyle\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}$$

递增.

2237. 求:

(a) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$, 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant2;\end{cases}$

(b) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, 设 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant t,\\ t\cdot\dfrac{1-x}{1-t}, & t\leqslant x\leqslant1.\end{cases}$

2238. 计算下列积分并作出这些积分对参数 α 的函数关系 $I=I(\alpha)$ 的图像:

(a) $I=\displaystyle\int_0^1 x|x-\alpha|\,\mathrm{d}x$; (b) $I=\displaystyle\int_0^{\pi}\dfrac{\sin^2 x}{1+2\alpha\cos x+\alpha^2}\,\mathrm{d}x$;

(c) $I = \int_0^{\pi} \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2}}$.

利用分部积分公式, 求下列定积分:

2239. $\int_0^{\ln 2} x e^{-x} \, dx$.

2240. $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$.

2241. $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x \, dx$.

2242. $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| \, dx$.

2243. $\int_0^1 \arccos x \, dx$.

2244. $\int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x \, dx$.

利用适当的变量代换, 求下列定积分:

2245. $\int_{-1}^1 \frac{x \, dx}{\sqrt{5 - 4x}}$.

2246. $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$.

2247. $\int_0^{0.75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.

2248. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} \, dx$.

2249. $\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} \, dx$.

2250. 令 $x - \frac{1}{x} = t$, 计算积分

$$\int_{-1}^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} \, dx.$$

2251. 对于下列定积分和代换 $x = \varphi(t)$:

(a) $\int_{-1}^1 dx, \ t = x^{\frac{2}{3}}$; (b) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}, \ x = \frac{1}{t}$; (c) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}, \ \tan x = t$.

说明为什么用 $\varphi(x)$ 代换 x 会引致不正确的结果.

2252. 在积分

$$\int_0^3 x \sqrt[3]{1 - x^2} \, dx$$

中, 令 $x = \sin t$ 是否可以?

2253. 若在积分 $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \, dx$ 中作变量代换 $x = \sin t$, 可否取数 π 和 $\frac{\pi}{2}$ 作为新的积分上下限?

2254. 证明: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 内连续, 则:

$$\int_a^b f(x) \, dx = (b - a) \int_0^1 f(a + (b - a)x) \, dx.$$

2255. 证明等式:

$$\int_0^a x^3 f(x^2) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} x f(x) \, dx \quad (a > 0).$$

2256. 设 $f(x)$ 为闭区间 $[A, B] \supset [a, b]$ 上的连续函数, 当 $[a - x, b - x] \subset [A, B]$ 时, 求 $\frac{d}{dx} \int_a^b f(x + y) \, dy$.

2257. 证明: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 则:

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x$;

(b) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$.

2258. 证明: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-l,l]$ 上连续, 则

(1) 当函数 $f(x)$ 为偶函数时

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{l} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

(2) 当函数 $f(x)$ 奇函数时

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

给出这些事实的几何解释.

2259. 证明:偶函数的原函数中之一个为奇函数,而奇函数的一切原函数皆为偶函数.

2260. 引入新变量

$$t = x + \frac{1}{x},$$

计算积分

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x.$$

2261. 在积分

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x$$

中进行变量代换 $\sin x = t$.

2262. 计算积分

$$\int_{\mathrm{e}^{-2\pi n}}^{1} \left|\left[\cos x\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right]'\right|\,\mathrm{d}x \quad (n\ 为正整数).$$

2263. 求积分

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

2264. 设

$$f(x) = \frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)},$$

求积分

$$\int_{-1}^{3} \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

2265. 证明: 若 $f(x)$ 为定义于 $-\infty < x < +\infty$ 而周期为 T 的连续的周期函数, 则

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{T} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

式中 a 为任意的数.

2266. 证明: 当 n 为奇数时, 函数

$$F(x)=\int_0^x \sin^n t\,\mathrm{d}t \quad 和 \quad G(x)=\int_0^x \cos^n t\,\mathrm{d}t$$

为以 2π 为周期的周期函数; 而当 n 为偶数时, 其中的每一个皆为线性函数与周期函数之和.

2267. 证明: 若 $f(x)$ 为以 T 为周期的连续的周期函数, 则函数

$$F(x)=\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

在一般情形下是线性函数与周期等于 T 的周期函数的和,

计算下列积分:

2268. $\int_0^1 x(2-x^2)^{12}\,\mathrm{d}x.$

2269. $\int_{-1}^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+x+1}.$

2270. $\int_1^{\mathrm{e}} (x\ln x)^2\,\mathrm{d}x.$

2271. $\int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}\,\mathrm{d}x.$

2272. $\int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}.$

2273. $\int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,\mathrm{d}x.$

2274. $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,\mathrm{d}x.$

2275. $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)(3+\cos x)}.$

2276. $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}.$

2277. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\sin 2x\sin 3x\,\mathrm{d}x.$

2278. $\int_0^{\pi} (x\sin x)^2\,\mathrm{d}x.$

2279. $\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x\cos^2 x\,\mathrm{d}x.$

2280. $\int_0^{\ln 2} \sinh^4 x\,\mathrm{d}x.$

利用递推公式来计算下列依赖于取正整数值的参数 n 的积分:

2281. $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x.$

2282. $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x.$

2283. $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x\,\mathrm{d}x.$

2284. $I_n=\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x.$

2285. $I_n=\int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}.$

2286. $I_n=\int_0^1 x^m(\ln x)^n\,\mathrm{d}x.$

2287. $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^{2n+1}\,\mathrm{d}x.$

设 $f(x)=f_1(x)+\mathrm{i}f_2(x)$ 是实变量 x 的复函数, 其中 $f_1(x)=\operatorname{Re} f(x), f_2(x)=\operatorname{Im} f(x), \mathrm{i}^2=-1$, 则按定义有:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int f_1(x)\,\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int f_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

显然,

$$\operatorname{Re}\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int \operatorname{Re} f(x)\,\mathrm{d}x,\quad \operatorname{Im}\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int \operatorname{Im} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2288. 利用欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x,$$

证明:

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{inx}\mathrm{e}^{-imx}\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ 2\pi, & m=n\end{cases}\quad (n \text{ 及 } m \text{ 为整数}).$$

2289. 证明:

$$\int_a^b \mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x}\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{b(\alpha+\mathrm{i}\beta)}-\mathrm{e}^{a(\alpha+\mathrm{i}\beta)}}{\alpha+\mathrm{i}\beta}\quad (\alpha \text{ 及 } \beta \text{ 为常数}).$$

利用欧拉公式:

$$\cos x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}),\quad \sin x=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}),$$

计算下列积分 (m 及 n 为正整数):

2290. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\cos^{2n}x\,\mathrm{d}x.$

2291. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x.$

2292. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\,\mathrm{d}x.$

2293. $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^n x\cos nx\,\mathrm{d}x.$

2294. $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^n x\sin nx\,\mathrm{d}x.$

求下列积分 (n 为正整数):

2295. $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^{n-1}x\cos(n+1)x\,\mathrm{d}x.$

2296. $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^{n-1}x\sin(n+1)x\,\mathrm{d}x.$

2297. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-ax}\cos^{2n}x\,\mathrm{d}x.$

2298. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\cdot\cos 2nx\,\mathrm{d}x.$

2299. 多次利用分部积分法, 计算欧拉积分:

$$B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x\quad (m \text{ 及 } n \text{ 为正整数}).$$

2300. 勒让德多项式 $P_n(x)$ 可由以下公式定义:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(x^2-1)^n\right]\quad (n=0,1,2,\cdots).$$

证明:

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \dfrac{2}{2n+1}, & m=n.\end{cases}$$

2301. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 内除了有限个内点 c_i ($i=1,\cdots,p$) 及点 a 与 b 外皆满足等式 $F'(x)=f(x)$, 而在这些点上 $F(x)$ 有第一类间断点

(广义原函数). 证明:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b-0) - F(a+0) - \sum_{i=1}^{p}[F(c_i+0) - F(c_i-0)].$$

2302. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积, 而

$$F(x) = C + \int_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

为 $f(x)$ 的不定积分. 证明: 函数 $F(x)$ 连续, 且在函数 $f(x)$ 连续的一切点处成立等式

$$F'(x) = f(x).$$

问在函数 $f(x)$ 的间断点处函数 $F(x)$ 的导数是什么?

研究例子:

(a) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1$ $(n = \pm 1, \pm 2, \cdots)$, 当 $x \neq \dfrac{1}{n}$ 时 $f(x) = 0$;

(b) $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

求下列有界不连续函数的不定积分:

2303. $\displaystyle\int \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x$. **2304.** $\displaystyle\int \operatorname{sgn}(\sin x)\,\mathrm{d}x$.

2305. $\displaystyle\int [x]\,\mathrm{d}x$ $(x \geqslant 0)$. **2306.** $\displaystyle\int x[x]\,\mathrm{d}x$ $(x \geqslant 0)$.

2307. $\displaystyle\int (-1)^{[x]}\,\mathrm{d}x$. **2308.** $\displaystyle\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < l, \\ 0, & |x| > l. \end{cases}$

计算下列有界不连续函数的定积分:

2309. $\displaystyle\int_0^3 \operatorname{sgn}(x - x^3)\,\mathrm{d}x$. **2310.** $\displaystyle\int_0^2 [\mathrm{e}^x]\,\mathrm{d}x$.

2311. $\displaystyle\int_0^6 [x]\sin\frac{\pi x}{6}\,\mathrm{d}x$. **2312.** $\displaystyle\int_0^\pi x\operatorname{sgn}(\cos x)\,\mathrm{d}x$.

2313. $\displaystyle\int_1^{n+1} \ln[x]\,\mathrm{d}x$ (n 为正整数). **2314.** $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sgn}[\sin(\ln x)]\,\mathrm{d}x$.

2315. 求 $\displaystyle\int_E |\cos x|\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x$, 其中 E 为闭区间 $[0, 4\pi]$ 中使被积函数有意义的一切值的集合.

§3. 中值定理

1. 函数的平均值. 数

$$M[f] = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均值 .

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则可求得一点 $c \in (a,b)$, 使得

$$M[f] = f(c).$$

2. 第一中值定理. 若: (1) 函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界并可积; (2) 当 $a<x<b$ 时, 函数 $\varphi(x)$ 不变号, 则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\mu\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

式中 $m\leqslant\mu\leqslant M$ 且 $m=\inf\limits_{a\leqslant x\leqslant b}f(x), M=\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)$; (3) 此外, 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则 $\mu=f(c)$, 其中 $a\leqslant c\leqslant b$.

3. 第二中值定理. 若: (1) 函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界并可积; (2) 当 $a<x<b$ 时, 函数 $\varphi(x)$ 是单调的, 则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\varphi(\alpha+0)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x+\varphi(b-0)\int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

式中 $a\leqslant\xi\leqslant b$; (3) 此外, 若函数 $\varphi(x)$ 单调下降 (广义的) 且不为负, 则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\varphi(a+0)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x\quad(a\leqslant\xi\leqslant b);$$

若函数 $\varphi(x)$ 单调上升 (广义的) 且不为负, 则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\varphi(b-0)\int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x\quad(a\leqslant\xi\leqslant b).$$

2316. 确定下列定积分的符号:

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x$; (b) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$;

(c) $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^3 2^x\,\mathrm{d}x$; (d) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2\ln x\,\mathrm{d}x$.

2317. 确定哪个积分较大:

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{10}x\,\mathrm{d}x$ 或 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,\mathrm{d}x$; (b) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ 或 $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$;

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-x^2}\cos^2 x\,\mathrm{d}x$ 或 $\displaystyle\int_\pi^{2\pi}\mathrm{e}^{-x^2}\cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

2318. 求下列函数在所给区间内的平均值:

(a) $f(x)=x^2$, 在 $[0,1]$ 上;

(b) $f(x)=\sqrt{x}$, 在 $[0,100]$ 上;

(c) $f(x)=10+2\sin x+3\cos x$, 在 $[0,2\pi]$ 上;

(d) $f(x)=\sin x\sin(x+\varphi)$, 在 $[0,2\pi]$ 上.

2319.1. 求椭圆之焦径

$$r=\frac{\rho}{1-\varepsilon\cos\varphi}\quad(0<\varepsilon<1)$$

之长的平均值.

2319.2. 求初速度为 v_0 之自由落体的速度之平均值.

2320. 电流强度依规律

$$i = i_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)$$

变化, 其中 i_0 为振幅, t 为时间, T 为周期, φ 为初相. 求电流强度之平方的平均值.

2321. 设 $f(x) \in C[0, +\infty)$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. 研究例子 $f(x) = \arctan x$.

2322. 命

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = xf(\theta x).$$

求 θ, 设: (a) $f(t) = t^n$ $(n > -1)$; (b) $f(t) = \ln t$; (c) $f(t) = \mathrm{e}^t$. $\lim\limits_{x\to+0}\theta$ 及 $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta$ 等于什么?

利用第一中值定理, 估计积分:

2323. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + 0.5\cos x}$.　　**2324.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$.　　**2325.** $\displaystyle\int_0^{100} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+100}\,\mathrm{d}x$.

2326.1. 证明等式:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = 0$;　　(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = 0$.

2326.2. 求:

(a) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\varepsilon x^2+1}$;　(b) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x)\frac{\mathrm{d}x}{x}$　$(a > 0, b > 0, f(x) \in C[0,1])$.

2327. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 而 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且在 (a, b) 上可微, 并且当 $a < x < b$ 时 $\varphi'(x) \geqslant 0$. 应用分部积分法及第一中值定理, 证明第二中值定理.

利用第二中值定理, 估计积分:

2328. $\displaystyle\int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.　　**2329.** $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}}{x}\sin x\,\mathrm{d}x$ $(\alpha \geqslant 0; 0 < a < b)$.

2330. $\displaystyle\int_a^b \sin x^2\,\mathrm{d}x$ $(0 < a < b)$.

2331. 设函数 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 和它们的平方在区间 $[a, b]$ 上可积. 证明柯西–布尼亚科夫斯基不等式:

$$\left\{\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x\right\}^2 \leqslant \int_a^b \varphi^2(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b \psi^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

2332. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续可微且 $f(a) = 0$. 证明不等式:

$$M^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f'^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中 $M = \sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|$.

2333. 证明等式:

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = 0 \quad (p > 0).$$

§4. 广义积分

1. 函数的广义可积性. 若函数 $f(x)$ 在每一个有限区间 $[a,b]$ 上依寻常的意义是可积的, 则可定义

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

若函数 $f(x)$ 在点 b 的邻域内无界且在每一个区间 $[a,b-\varepsilon]$ $(\varepsilon>0)$ 上依寻常的意义是可积的, 则取

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

若极限 (1) 或 (2) 存在, 则相应的积分称为*收敛的*, 否则称为*发散的* (在基本的意义上).

2. 柯西准则. 积分 (1) 收敛的充要条件为: 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在数 $b=b(\varepsilon)$, 当 $b'>b$ 及 $b''>b$ 时, 下面的不等式成立:

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

对于形如 (2) 的积分, 柯西准则的表述是类似的.

3. 绝对收敛的判别法. 若 $|f(x)|$ 是广义可积的, 则函数 $f(x)$ 所对应的积分 (1) 或 (2) 称为*绝对收敛的*, 而且显然也是收敛的.

比较判别法 I. 设当 $x\geqslant a$ 时 $|f(x)|\leqslant F(x)$. 若 $\int_a^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

比较判别法 II. 若 $\psi(x)>0$, 且当 $x\to+\infty$ 时 $\varphi(x)=O^*(\psi(x))$, 则积分 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ 及 $\int_a^{+\infty}\psi(x)\,\mathrm{d}x$ 同时收敛或同时发散. 就特别情形来说, 若当 $x\to+\infty$ 时 $\varphi(x)\sim\psi(x)$, 则上面的结果也成立.

比较判别法 III. (a) 设

$$\text{当 } x\to+\infty \text{ 时},\quad f(x)=O^*\left(\frac{1}{x^p}\right).$$

在这种情况下, 当 $p>1$ 时, 积分 (1) 收敛; 当 $p\leqslant 1$ 时, 积分 (1) 发散.

(b) 设

$$\text{当 } x\to b-0 \text{ 时},\quad f(x)=O^*\left(\frac{1}{(b-x)^p}\right).$$

在这种情况下, 当 $p<1$ 时, 积分 (2) 收敛; 当 $p\geqslant 1$ 时, 积分 (2) 发散.

4. 收敛性的较精密的判别法. 若 (1) 当 $x\to+\infty$ 时, 函数 $\varphi(x)$ 单调地趋于零; (2) 函数 $f(x)$ 有有界的原函数

$$F(x)=\int_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

收敛, 但一般地说, 并非绝对收敛.

在特殊情形下, 若 $p>0$, 则积分

$$\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}\,\mathrm{d}x \quad 及 \quad \int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x \quad (a>0)$$

收敛.

5. 柯西主值. 若对于任意的 $\varepsilon > 0$, 函数 $f(x)$ 的积分

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x \quad 及 \quad \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \quad (a < c < b)$$

存在, 则柯西主值 (v.p.) 为

$$\text{v.p.} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right].$$

相仿地,

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

计算下列积分:

2334. $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}\ (a>0)$.

2335. $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$.

2336. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

2337. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

2338. $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2}$.

2339. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}$.

2340. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$.

2341. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$.

2342. $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

2343. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$.

2344. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$.

2345. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$.

2346. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos bx\,\mathrm{d}x\ (a>0)$.

2347. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\sin bx\,\mathrm{d}x\ (a>0)$.

利用递推公式计算下列广义积分 (n 为正整数):

2348. $\displaystyle I_n=\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

2349. $\displaystyle I_n=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+2bx+c)^n}\quad(ac-b^2>0)$.

2350. $\displaystyle I_n=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

2351. $\displaystyle I_n=\int_0^1\frac{x^n\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}$.

2352. $\displaystyle I_n=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\cosh^{n+1}x}$.

2353. (a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x$; (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,\mathrm{d}x$.

2354. 求

$$\int_E \frac{|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \, \mathrm{d}x,$$

其中 E 为区间 $(0, +\infty)$ 中使被积函数有意义的一切 x 值的集合.

2355. 证明等式:

$$\int_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{x^2 + 4ab}\right) \mathrm{d}x,$$

其中 $a > 0, b > 0$ (假定等式左端的积分有意义).

2356. 数

$$M[f] = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(\xi) \, \mathrm{d}\xi$$

称为函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的平均值. 求下列函数在此区间上的平均值:

(a) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2(x\sqrt{2})$; (b) $f(x) = \arctan x$; (c) $f(x) = \sqrt{x} \sin x$.

2357. 求:

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} x \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} \, \mathrm{d}t$; (b) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1 + t^4} \, \mathrm{d}t}{x^3}$;

(c) $\displaystyle\lim_{x \to +0} \frac{\int_x^{+\infty} t^{-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t}{\ln \frac{1}{x}}$; (d) $\displaystyle\lim_{x \to 0} x^\alpha \int_x^1 \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}} \, \mathrm{d}t$,

其中 $\alpha > 0$, $f(t)$ 为闭区间 $[0, 1]$ 上的连续函数.

研究下列积分的收敛性:

2358. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2 \, \mathrm{d}x}{x^4 - x^2 + 1}$.

2359. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x \sqrt[3]{x^2 + 1}}$.

2360. $\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$.

2361. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{p-1} \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x$.

2362. $\displaystyle\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$.

2363. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1 + x^n} \, \mathrm{d}x \ (n \geqslant 0)$.

2364. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan ax}{x^n} \, \mathrm{d}x \ (a \neq 0)$.

2365. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x)}{x^n} \, \mathrm{d}x$.

2366. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^m \arctan x}{2 + x^n} \, \mathrm{d}x \ (n \geqslant 0)$.

2367. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1 + x^n} \, \mathrm{d}x \ (n \geqslant 0)$.

2368. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} \, \mathrm{d}x$.

2369. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x \cos^q x}$.

2370. (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n \, \mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}}$; (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3 + x}}$.

2371. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p + x^q}$.

2372. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1 - x^2} \, \mathrm{d}x$.

2373. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$.

2374. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}$. **2375.** $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$.

2376. (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\cdots|x-a_n|^{p_n}}$ $(a_1<a_2<\cdots<a_n)$;

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{\alpha}|x-1|^{\beta}\,\mathrm{d}x$.

2377. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\mathrm{d}x$, 式中 $P_m(x)$ 和 $P_n(x)$ 为次数分别为 m 及 n 的互素的多项式.

研究下列积分的绝对收敛性和条件收敛性:

2378. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$. 提示: $|\sin x|\geqslant\sin^2 x$. **2379.** $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}\mathrm{d}x$.

2380. (a) $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^p\sin(x^q)\,\mathrm{d}x$ $(q\neq 0)$; (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sec x)\,\mathrm{d}x$;

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^2\cos(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$.

2381. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\mathrm{d}x$ $(q\geqslant 0)$. **2382.** $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}{x^n}\mathrm{d}x$.

2383. $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\,\mathrm{d}x$, 式中 $P_m(x)$ 及 $P_n(x)$ 为整多项式, 且若 $x\geqslant a\geqslant 0$, 则 $P_n(x)>0$.

2384.1. 若 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则当 $x\to+\infty$ 时是否必有 $f(x)\to 0$? 研究例子:

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$; (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}\,\mathrm{d}x$.

2384.2. 设 $f(x)\in C^{(1)}[x_0,+\infty)$, 当 $x_0\leqslant x<+\infty$ 时 $|f'(x)|<C$, 且

$$\int_{x_0}^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x$$

收敛. 证明: 当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)\to 0$. 提示: 研究积分 $\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty}f(x)f'(x)\,\mathrm{d}x$.

2385. 设函数在 $[a,b]$ 上有定义且无界. 可否把函数 $f(x)$ 的收敛广义积分

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

看作相应积分和

$$\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i\quad(x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1},\ \Delta x_i=x_{i+1}-x_i)$$

的极限?

2386. 设:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

收敛, 函数 $\varphi(x)$ 有界, 则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

是否必定收敛? 举出适当的例子.

若积分 (1) 绝对收敛, 问积分 (2) 的收敛性如何?

2387. 证明: 若 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, $f(x)$ 为单调函数, 则 $f(x)=O\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

2388. 设函数 $f(x)$ 在区间 $0<x\leqslant 1$ 内是单调函数, 且在点 $x=0$ 的邻域内是无界的. 证明: 若

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

存在, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2389. 证明: 若函数 $f(x)$ 在区间 $0<x<a$ 内单调且有界, 且

$$\int_0^a x^p f(x)\,\mathrm{d}x$$

存在, 则

$$\lim_{x\to+0} x^{p+1}f(x)=0.$$

2390. 证明:

(a) v.p. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x}=0$; (b) v.p. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}=0$; (c) v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,\mathrm{d}x=0$.

2391. 证明: 当 $x\geqslant 0$ 且 $x\neq 1$ 时存在

$$\mathrm{li}\,x=\text{v.p.}\int_0^x\frac{\mathrm{d}\xi}{\ln\xi}.$$

求下列积分:

2392. v.p. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2}$.

2393. v.p. $\displaystyle\int_{\frac12}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$.

2394. v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

2395. v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\arctan x\,\mathrm{d}x$.

§5. 面积的计算法

1. 直角坐标系中的面积. 以两条连续的曲线 $y=y_1(x)$ 和 $y=y_2(x)$ $[y_2(x)\geqslant y_1(x)]$ 与两条直线 $x=a$ 和 $x=b$ $(a>b)$ 为界的图形 $A_1A_2B_2B_1$ (图 10), 其面积等于

$$S=\int_a^b [y_2(x)-y_1(x)]\,\mathrm{d}x.$$

2. 用参数方程给出的曲线所围成的面积. 若 $x = x(t), y = y(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ 为一分段光滑的简单封闭曲线 C 的参数方程, 并且沿曲线的环绕方向为逆时针方向, 使得该曲线所围图形总是位于其左侧 (图 11), 则此图形的面积 S 等于

$$S = -\int_0^T y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T x(t)y'(t)\,\mathrm{d}t,$$

或

$$S = \frac{1}{2}\int_0^T [x(t)y'(t) - x'(t)y(t)]\,\mathrm{d}t.$$

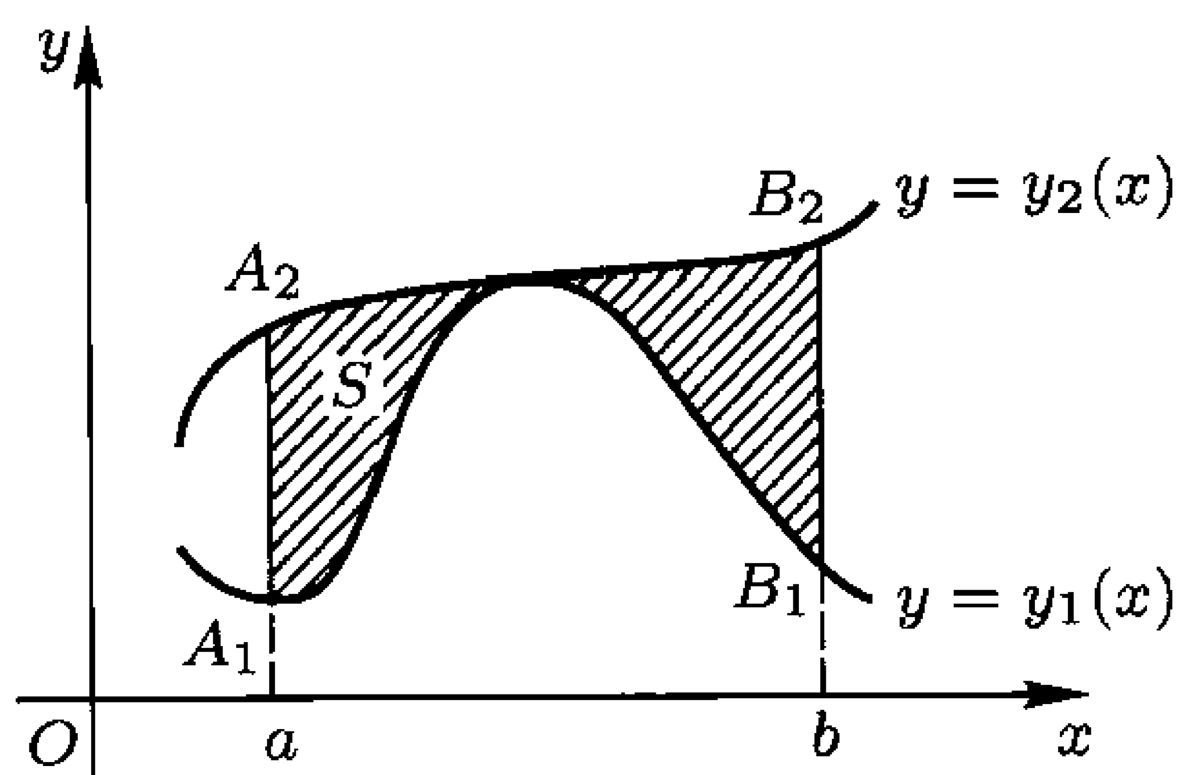


图 10

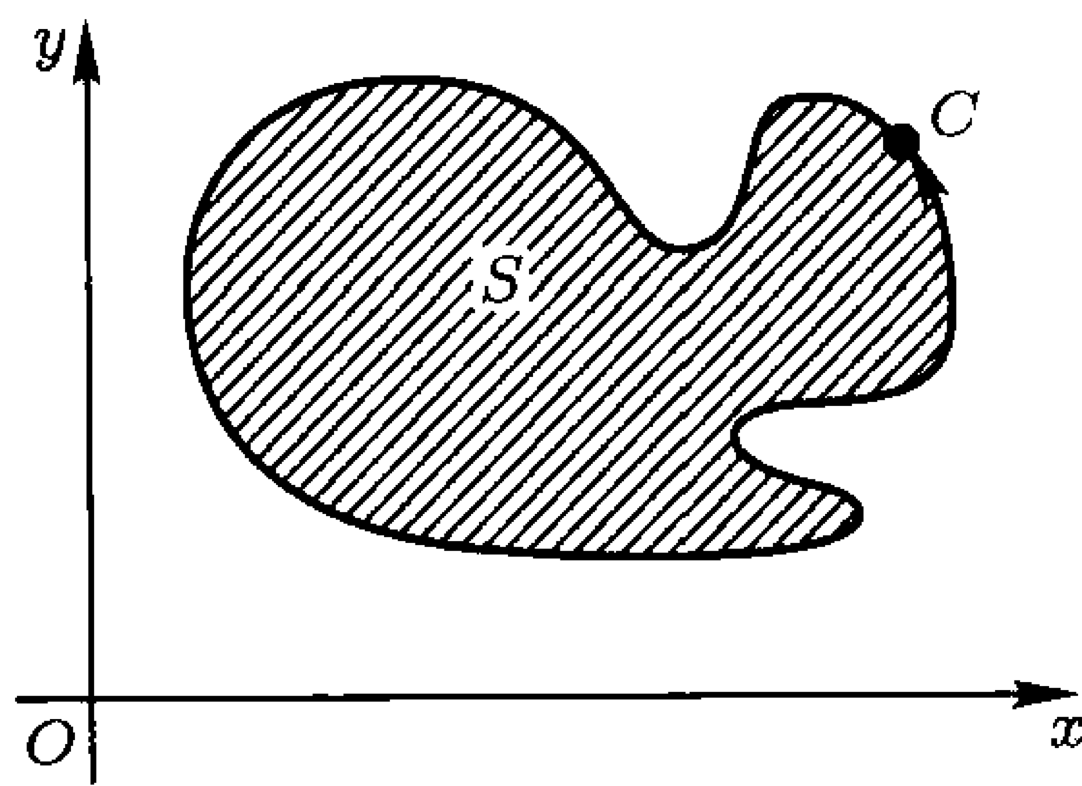


图 11

3. 极坐标系中的面积. 以连续的曲线 $r = r(\varphi)$ 和两条射线 $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$ 为界的扇形 OAB (图 12), 其面积 S 等于

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

2396. 证明: 正抛物线弓形的面积等于

$$S = \frac{2}{3}bh,$$

式中 b 为弓形的底, h 为高 (图 13).

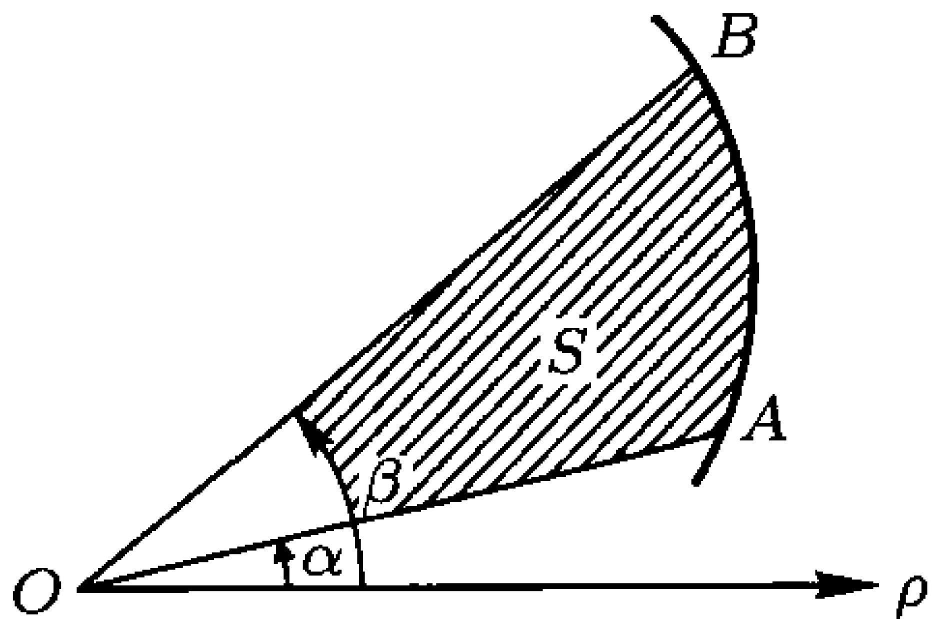


图 12

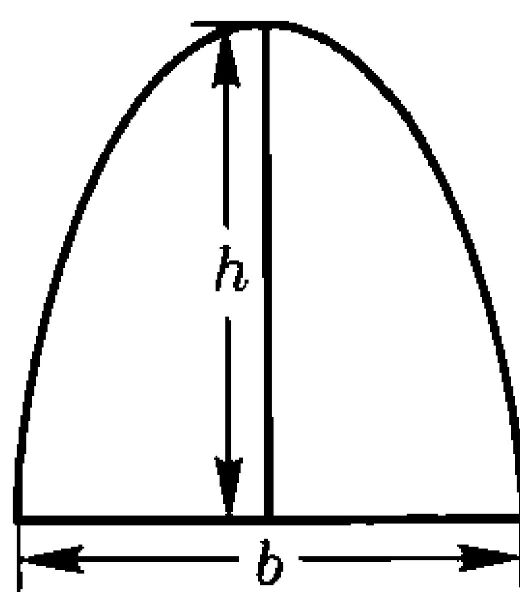


图 13

求以下列直角坐标方程所给曲线为界的图形的面积[①].

2397. $ax = y^2, ay = x^2$.

2398. $y = x^2, x + y = 2$.

---

①在第四章的这一节和以后各节都把一切的参数当作是正的.

2399. $y = 2x - x^2, x + y = 0$.

2400. (a) $y = |\lg x|, y = 0, x = 0, 1, x = 10$;

(b) $y = 2^x, y = 2, x = 0$;

(c) $y = (x+1)^2, y = \sin \pi y, y = 0\ (0 \leqslant y \leqslant 1)$.

2401. $y = x, y = x + \sin^2 x\ (0 \leqslant x \leqslant \pi)$.

2402. $y = \dfrac{a^3}{a^2 + x^2}, y = 0$.

2403. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

2404. $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$.

2405. $y^2 = 2px, 27py^2 = 8(x-p)^3$.

2406. $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1\ (A > 0, AC - B^2 > 0)$.

2407. $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$ (蔓叶线), $x = 2a$.

2408. $x = a \ln \dfrac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ (曳物线), $y = 0$.

2409. $y^2 = \dfrac{x^n}{(1 + x^{n+2})^2}\ (x > 0; n > -2)$.

2410. $y = \mathrm{e}^{-x}|\sin x|, y = 0\ (x \geqslant 0)$.

2411. 抛物线 $y^2 = 2x$ 把圆 $x^2 + y^2 = 8$ 的面积分为两部分, 这两部分的比如何?

2412. 把双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 上的点 $M(x, y)$ 的坐标表示为双曲线扇形 $OM'M$ 的面积 S 的函数, 此扇形以双曲线的弧 $M'M$ 与二射线 OM 及 OM' 为界, 其中 $M'(x, -y)$ 是点 M 相对于 Ox 轴的对称点.

求下列参数方程所给曲线所围图形的面积:

2413. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)\ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ (摆线) 及 $y = 0$.

2414. $x = 2t - t^2, y = 2t^2 - t^3$.

2415. $x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t)\ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ (圆的渐伸线) 及 $x = a, y \leqslant 0$.

2416. $x = a(2\cos t - \cos 2t), y = a(2\sin t - \sin 2t)$.

2417. (a) $x = \dfrac{c^2}{a}\cos^3 t, y = \dfrac{c^2}{b}\sin^3 t\ (c^2 = a^2 - b^2)$ (椭圆的渐屈线);

(b) $x = a\cos t, y = \dfrac{a\sin^2 t}{2 + \sin t}$.

求下列极坐标方程所给曲线所围图形 S 的面积:

2418. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (双纽线).

2419. $r = a(1 + \cos\varphi)$ (心脏线).

2420. $r = a \sin 3\varphi$ (三叶线).

2421. $r = \dfrac{p}{1 - \cos\varphi}$ (抛物线), $\varphi = \dfrac{\pi}{4}, \varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

2422. (a) $r = \dfrac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}\ (0 < \varepsilon < 1)$ (椭圆);

(b) $r = 3 + 2\cos\varphi$;

(c) $r = \dfrac{1}{\varphi}, r = \dfrac{1}{\sin\varphi}\ \left(0 < \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$.

2423. $r = a\cos\varphi, r = a(\cos\varphi + \sin\varphi)$ $\left(M\left(\dfrac{a}{2}, 0\right) \in S\right)$.

2424. 求由曲线 $\varphi = r\arctan r$ 及二射线 $\varphi = 0$ 及 $\varphi = \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$ 所围成之扇形的面积.

2425. 求下列曲线所围图形的面积:

(a) $r^2 + \varphi^2 = 1$; (b) 曲线 $\varphi = \sin(\pi r)$ $(0 \leqslant r \leqslant 1)$ 的蔓叶线;

(c) $\varphi = 4r - r^3, \varphi = 0$; (d) $\varphi = r - \sin r, \varphi = \pi$;

(e) 封闭曲线 $r = \dfrac{2at}{1+t^2}, \varphi = \dfrac{\pi t}{1+t}$.

变换为极坐标, 求下列曲线所围图形的面积:

2426. $x^3 + y^3 = 3axy$ (笛卡儿叶形线). **2427.** $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

2428. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ (双纽线).

用参数方程的形式给出下列曲线, 再求曲线所围图形的面积:

2429. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (星形线).

2430. $x^4 + y^4 = ax^2y$.

提示: 令 $y = tx$.

§6. 弧长的计算法

1. 直角坐标系中的弧长. 一段光滑 (连续可微) 曲线

$$y = y(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

的弧长等于

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

2. 参数方程所给曲线的弧长. 若曲线 C 由参数方程

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant T)$$

给出, 式中 $x(t), y(t) \in C^{(1)}[t_0, T]$, 则曲线 C 的弧长等于

$$s = \int_{t_0}^T \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

3. 极坐标系中的弧长. 若

$$r = r(\varphi) \quad (\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta),$$

式中 $r(\varphi) \in C^{(1)}[\alpha, \beta]$, 则相应曲线段的弧长等于

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi.$$

关于空间曲线的弧长可参阅第八章.

求下列曲线的弧长:

2431. $y = x^{\frac{3}{2}}$ $(0 \leqslant x \leqslant 4)$. **2432.** $y^2 = 2px$ $(0 \leqslant x \leqslant x_0)$.

2433. $y = a\cosh\dfrac{x}{a}$, 从点 $A(0, a)$ 至点 $B(b, h)$.

2434. $y = \mathrm{e}^x$ $(0 \leqslant x \leqslant x_0)$. **2435.** $x = \dfrac{1}{4}y^2 - \dfrac{1}{2}\ln y$ $(1 \leqslant y \leqslant \mathrm{e})$.

2436. $y = a\ln\dfrac{a^2}{a^2-x^2}$ $(0 \leqslant x \leqslant b < a)$. **2437.** $y = \ln\cos x$ $\left(0 \leqslant x \leqslant a < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

2438. $x = a\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} - \sqrt{a^2-y^2}$ $(0 < b \leqslant y \leqslant a)$.

2439. $y^2 = \dfrac{x^3}{2a-x}$ $\left(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{5}{3}a\right)$. **2440.** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (星形线).

2441. $x = \dfrac{c^2}{a}\cos^3 t, y = \dfrac{c^2}{b}\sin^3 t, c^2 = a^2 - b^2$ (椭圆的渐屈线).

2442. $x = a\cos^4 t, y = a\sin^4 t$.

2443. $x = a(t-\sin t), y = a(1-\cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

2444. $x = a(\cos t + t\sin t), y = a(\sin t - t\cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ (圆的渐伸线).

2445. (a) $x = a(\sinh t - t), y = a(\cosh t - 1)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$;

(b) $x = \cosh^3 t, y = \sinh^3 t$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$.

2446. $r = a\varphi$ (阿基米德螺线) $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$.

2447. $r = a\mathrm{e}^{m\varphi}$ $(m > 0, 0 < r < a)$.

2448. $r = a(1+\cos\varphi)$. **2449.** $r = \dfrac{p}{1+\cos\varphi}$ $\left(|\varphi| \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$.

2450. $r = a\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$. **2451.** $r = a\tanh\dfrac{\varphi}{2}$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$.

2452. (a) $\varphi = \dfrac{1}{2}\left(r + \dfrac{1}{r}\right)$ $(1 \leqslant r \leqslant 3)$; (b) $\varphi = \sqrt{r}$ $(0 \leqslant r \leqslant 5)$;

(c) $\varphi = \displaystyle\int_0^r \frac{\sinh\rho}{\rho}\,\mathrm{d}\rho$ $(0 \leqslant r \leqslant R)$;

(d) $r = 1 + \cos t, \varphi = t - \tan\dfrac{t}{2}$ $(0 \leqslant t \leqslant T < \pi)$.

2453. 证明: 椭圆

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t$$

的弧长等于正弦曲线 $y = c\sin\dfrac{x}{b}$ 的一波之长. 其中 $c = \sqrt{a^2-b^2}$.

2454. 抛物线 $4ay = x^2$ 沿 Ox 轴滚动. 证明: 抛物线的焦点的轨迹是悬链线.

2455. 求曲线

$$y = \pm\left(\frac{1}{3} - x\right)\sqrt{x}$$

的封闭部分与等周长圆周所分别围成的面积之比.

§7. 体积的计算法

1. 由已知横截面计算物体的体积. 若物体的体积 V 存在, 且 $S = S(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ 为物体的横截面面积, 此横截面经过点 x 且垂直于 Ox 轴, 则

$$V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. 旋转体的体积. 曲边梯形

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant y \leqslant y(x)$$

绕 Ox 轴旋转所成旋转体的体积等于

$$V_x = \pi \int_a^b y^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

这里 $y(x)$ 为单值连续函数.

在更一般的情形下, 图形

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$$

绕 Ox 轴旋转所成的环状体的体积等于

$$V = \pi \int_a^b \left[y_2^2(x) - y_1^2(x)\right]\,\mathrm{d}x,$$

这里 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是非负的连续函数.

2456. 求顶楼的体积, 其底是边长等于 a 及 b 的矩形, 其顶的棱边等于 c, 而高等于 h.

2457. 求截楔形的体积, 其平行的上下底为边长分别等于 A, B 和 a, b 的矩形, 而高等于 h.

2458. 求截锥体的体积, 其上下底为半轴长分别等于 A, B 和 a, b 的椭圆, 而高等于 h.

2459. 求旋转抛物体的体积, 其底为 S, 而高等于 H.

2460. 设一物体之垂直于 Ox 轴的横截面的面积 $S = S(x)$ 依下面的二次式规律变化:

$$S(x) = Ax^2 + Bx + C \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

其中 A, B 及 C 为常数. 证明: 此物体之体积等于

$$V = \frac{H}{6}\left[S(a) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) + S(b)\right],$$

其中 $H = b - a$ (辛普森公式).

2461. 物体是点 $M(x, y, z)$ 的集合, 其中 $0 \leqslant z \leqslant 1$, 而且当 z 为有理数时, $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$; 当 z 为无理数时, $-1 \leqslant x \leqslant 0, -1 \leqslant y \leqslant 0$. 证明: 此物体的体积不存在, 尽管相应积分

$$\int_0^1 S(z)\,\mathrm{d}x = 1.$$

求下列曲面所围成的体积:

2462. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, z = \dfrac{c}{a}x, z = 0.$

2463. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (椭球面).

2464. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, z = \pm c.$

2465. $x^2 + z^2 = a^2, y^2 + z^2 = a^2.$

2466. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = ax.$

2467. $z^2 = b(a - x), x^2 + y^2 = ax.$

2468. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{z^2} = 1 \ (0 < z < a).$

2469. $x + y + z^2 = 1, x = 0, y = 0, z = 0$

2470. $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = a^2.$

2471. 证明: 将平面图形

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant y \leqslant y(x)$$

绕 Oy 轴旋转所成的旋转体的体积等于

$$V_y = 2\pi \int_a^b xy(x)\,\mathrm{d}x,$$

这里 $y(x)$ 为单值连续函数.

求下列曲线段旋转所成旋转体的体积:

2472. $y = b\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$ $(0 \leqslant x \leqslant a)$ 绕 Ox 轴 (半立方抛物线).

2473. $y = 2x - x^2, y = 0$: (a) 绕 Ox 轴; (b) 绕 Oy 轴.

2474. $y = \sin x, y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$: (a) 绕 Ox 轴; (b) 绕 Oy 轴.

2475. $y = b\left(\dfrac{x}{a}\right)^2, y = b\left|\dfrac{x}{a}\right|$: (a) 绕 Ox 轴; (b) 绕 Oy 轴.

2476. $y = \mathrm{e}^{-x}, y = 0$ $(0 \leqslant x < +\infty)$: (a) 绕 Ox 轴; (b) 绕 Oy 轴.

2477. $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ $(0 < a \leqslant b)$, 绕 Ox 轴.

2478. $x^2 - xy + y^2 = a^2$, 绕 Ox 轴.

2479. $y = \mathrm{e}^{-x}\sqrt{\sin x}$ $(0 \leqslant x < +\infty)$, 绕 Ox 轴.

2480. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi), y = 0$:

(a) 绕 Ox 轴; (b) 绕 Oy 轴; (c) 绕直线 $y = 2a$.

2481. $x = a\sin^3 t, y = b\cos^3 t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$:

(a) 绕 Ox 轴; (b) 绕 Oy 轴.

2482.1. 求曲线

$$x = 2t - t^2, \quad y = 4t - t^3$$

所围图形绕 (a) Ox 轴; (b) Oy 轴旋转所成旋转体的体积.

2482.2. 证明: 把平面图形

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant r \leqslant r(\varphi) \quad (\varphi \text{ 与 } r \text{ 为极坐标})$$

绕极轴旋转所成旋转体的体积等于

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi.$$

求下列由极坐标或直角坐标给的平面图形经旋转后所成旋转体的体积:

2483.1. $r = a(1 + \cos\varphi)$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$:

(a) 绕极轴; (b) 绕直线 $r\cos\varphi = -\dfrac{a}{4}$.

2483.2. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$:

(a) 绕 Ox 轴; (b) 绕 Oy 轴; (c) 绕直线 $y = x$.

提示: 化为极坐标.

2484.1. 求半圈阿基米德螺线

$$r = a\varphi \quad (a > 0; 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$$

绕极轴旋转所成旋转体的体积.

2484.2. 求曲线

$$\varphi = \pi r^3, \quad \varphi = \pi$$

所围图形绕极轴旋转所成旋转体的体积.

2485. 求图形

$$a \leqslant r \leqslant a\sqrt{2\sin 2\varphi}$$

绕极轴旋转而成的旋转体的体积.

§8. 旋转曲面表面积的计算法

平滑曲线 AB 绕 Ox 轴旋转所成曲面的面积等于

$$P = 2\pi \int_A^B |y|\,\mathrm{d}s,$$

式中 $\mathrm{d}s$ 为弧的微分.

求旋转下列曲线所成曲面的面积:

2486. $y = x\sqrt{\dfrac{x}{a}}$ $(0 \leqslant x \leqslant a)$, 绕 Ox 轴.

2487. $y = a\cos\dfrac{\pi x}{2b}$ $(|x| \leqslant b)$, 绕 Ox 轴.

2488. $y = \tan x \left(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}\right)$, 绕 Ox 轴.

2489. $y^2 = 2px$ $(0 \leqslant x \leqslant x_0)$, (a) 绕 Ox 轴; (b) 绕 Oy 轴.

2490. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(0 < b \leqslant a)$, (a) 绕 Ox 轴; (b) 绕 Oy 轴.

2491. $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ $(b \geqslant a)$, 绕 Ox 轴.

2492. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, 绕 Ox 轴.

2493. $y = a\cosh\dfrac{x}{a}$ $(|x| \leqslant b)$, (a) 绕 Ox 轴; (b) 绕 Oy 轴.

2494. $\pm x = a\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} - \sqrt{a^2-y^2}$, 绕 Ox 轴.

2495. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$,
(a) 绕 Ox 轴; (b) 绕 Oy 轴; (c) 绕直线 $y = 2a$.

2496. $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$, 绕直线 $y = x$.

2497. $r = a(1+\cos\varphi)$, 绕极轴.

2498. $r^2 = a^2\cos 2\varphi$, (a) 绕极轴; (b) 绕轴 $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$; (c) 绕轴 $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

2499. 由抛物线 $ay = a^2 - x^2$ 及 Ox 轴围成的图形绕 Ox 轴旋转而构成一旋转体, 求其表面积与等体积球的表面积之比.

2500. 由直线 $x = \dfrac{p}{2}$ 与抛物线 $y^2 = 2px$ 围成的图形绕直线 $y = p$ 旋转而构成一旋转体, 求其体积和表面积.

§9. 矩的计算法. 质心的坐标

1. 矩. 若密度为 $\rho = \rho(y)$ 的质量 M 充满了 Oxy 平面上的某有界连续统 Ω (曲线, 平面区域), 而 $\omega = \omega(y)$ 为 Ω 中纵坐标不超过 y 的部分的相应度量 (弧长, 面积), 则数

$$M_k = \lim_{\max|\Delta y_i|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(y_i)y_i^k\Delta\omega(y_i) = \int_\Omega \rho y^k\,\mathrm{d}\omega(y) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

称为质量 M 对 Ox 轴的 k *次矩*.

作为特殊情形, 当 $k = 0$ 时得*质量* M, 当 $k = 1$ 时得*静矩*, 当 $k = 2$ 时得*转动惯量*.

类似地可定义出质量对坐标平面的矩.

若 $\rho = 1$, 则相应的矩称为*几何矩* (线矩, 面积矩, 体积矩等).

2. 质心. 均质平面图形 S 的质心①的坐标 (x_0, y_0) 可由以下公式来定义:

$$x_0 = \frac{M_1^{(y)}}{S}, \quad y_0 = \frac{M_1^{(x)}}{S},$$

式中 $M_1^{(y)}, M_1^{(x)}$ 为图形 S 对 Oy 轴和 Ox 轴的几何静矩.

2501.1. 求半径为 a 的半圆弧对过此弧两端点的直径的静矩和转动惯量.

2501.2. 求抛物线弧 $y^2 = 2px\left(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{p}{2}\right)$ 对直线 $x = \dfrac{p}{2}$ 的静矩.

2502.1. 求底为 b, 高为 h 的均质三角形平板对其底边的静矩和转动惯量 $(\rho = 1)$.

2502.2. 求曲线

$$ay = 2ax - x^2 \quad (a > 0), \quad y = 0$$

所围抛物线弓形对 Ox 轴和 Oy 轴的转动惯量 $I_x = M_2^{(x)}$ 和 $I_y = M_2^{(y)}$. 由关系式 $I_x = Sr_x^2$, $I_y = Sr_y^2$ (S 为弓形面积) 定义的惯性半径 r_x 和 r_y 等于什么?

2503. 求半轴长为 a 和 b 的均质椭圆形平板对其主轴的转动惯量 $(\rho = 1)$.

2504.1. 求底半径为 r 高为 h 的均质圆锥对其底平面的静矩和转动惯量 $(\rho = 1)$.

2504.2. 求半径为 R 质量为 M 的均质球体对其直径的转动惯量.

2505. 证明古尔丹第一定理: 平面曲线弧 C 绕此弧所在平面上不与它相交的轴旋转而成的旋转面, 其面积等于此弧的长度与它的质心所画出的圆周之长的乘积.

2506. 证明古尔丹第二定理: 平面图形 S 绕此图形所在平面上不与它相交的轴旋转而成的旋转体, 其体积等于图形 S 的面积与此图形的质心所画出的圆周之长的乘积.

2507. 求圆弧 $x = a\cos\varphi, y = a\sin\varphi$ $(|\varphi| \leqslant \alpha \leqslant \pi)$ 质心的坐标.

2508. 求抛物线 $ax = y^2, ay = x^2$ $(a > 0)$ 所围图形的质心的坐标.

2509. 求图形

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1 \quad (0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b)$$

的质心的坐标.

2510. 求半径为 a 的均质半球的质心坐标.

---

① 质心与重心是不同的概念, 重心是物体所受重力的合力的作用点, 它在重力加速度为常量时与物体的质心重合. 对于尺寸不大的物体, 可以认为质心等同于重心. 在下文中, 凡几何对象的质心均指同样形状的均质物体的质心. —— 译注

2511. 求对数螺线

$$r = a\mathrm{e}^{m\varphi} \quad (m > 0)$$

上由点 $O(-\infty, 0)$ 到点 $P(\varphi, r)$ 的弧 OP 的质心 $C(\varphi_0, r_0)$ 之坐标. 当点 P 移动时, 点 C 画出怎样的曲线?

2512. 求曲线 $r = a(1+\cos\varphi)$ 所围图形的质心坐标.

2513. 求摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1-\cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 的第一拱与 Ox 轴所围图形的质心的坐标.

2514. 求图形 $0 \leqslant x \leqslant a; y^2 \leqslant 2px$ 绕 Ox 轴旋转所成旋转体的质心的坐标.

2515. 求半球 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(z \geqslant 0)$ 的质心的坐标.

§10. 力学和物理学中的问题

组成适当的积分和并求出其极限, 以便求解下列问题:

2516. 杆的长度 $l = 10\,\mathrm{m}$, 若该杆的线密度按规律 $\delta = 6 + 0.3x\,\mathrm{kg/m}$ 而变, 其中 x 为到杆的一个端点的距离, 求杆的质量.

2517. 把质量为 m 的物体从地球 (其半径为 R) 表面抬升到高度为 h 的地方, 需要对它作多少功? 若物体远离至无穷远处, 则功等于多少?

2518. 若 $10\,\mathrm{N}$ 的力能使弹簧伸长 $1\,\mathrm{cm}$, 现在要使这弹簧伸长 $10\,\mathrm{cm}$, 问要作多少功?

提示: 利用胡克定律.

2519. 直径为 $20\,\mathrm{cm}$, 长为 $80\,\mathrm{cm}$ 的圆柱形汽缸充满压强为 $100\,\mathrm{N/cm^2}$ 的蒸汽. 假定蒸汽的温度保持不变, 要使其体积减小一半, 需要作多少功?

2520. 求水对竖直放置的半圆形档板的压力, 该档板的半径为 a, 而水面位于档板顶部直径的位置.①

2521. 求水对竖直壁面的压力, 此壁面的形状为梯形, 其下底 $a = 10\,\mathrm{m}$, 上底 $b = 6\,\mathrm{m}$, 高 $h = 5\,\mathrm{m}$, 下底位于水面以下 $c = 20\,\mathrm{m}$ 的深度.②

写出微分方程并求解下列问题:

2522. 一质点的速度按规律

$$v = v_0 + at \quad (v_0 = \text{常数},\ a = \text{常数})$$

变化, 问在时间间隔 $[0, T]$ 内此质点经过怎样的路程?

2523. 半径为 R 而密度为 δ 的均质球体以角速度 ω 绕其直径旋转. 求此球的动能.

2524. 线密度 μ_0 为常数的无穷直线以怎样的力吸引距此直线距离为 a 质量为 m 的质点?

---

① 此题是流体静力学问题, 在实际求解时还应知道水面上的压强 p_0, 以及水的密度 ρ. 原书所给答案对应着 $p_0 = 0$ 的特例. 类似情形还出现于习题 2521, 4070, 4071, 4072. —— 译注

② 此题应考虑水面处大气压 p_0 的影响. 书后的答案对应 $p_0 = 0$ 的情形, 与实际结果有较大差别. —— 译注

2525. 计算半径为 a 且面密度 δ_0 为常数的圆形薄板以怎样的力吸引质量为 m 的质点 P, 此质点位于通过薄板中心 Q 且垂直于薄板平面的直线上, 距离 PQ 等于 b.

2526. 根据托里拆利定律, 液体通过小孔从容器中流出的速度等于

$$v = c\sqrt{2gh},$$

式中 g 为重力加速度, h 为液体表面在小孔以上的高度, $c = 0.6$ 为实验系数. 直径为 $D = 1\,\mathrm{m}$ 高为 $H = 2\,\mathrm{m}$ 的直立圆柱形大桶, 其底部有一个直径为 $d = 1\,\mathrm{cm}$ 的圆孔, 问此桶充满液体后经过多长时间方可完全排空?

2527. 旋转体容器应当具有什么形状, 才能使液体从容器底部流出时, 液体表面的下降是均匀的?

2528. 镭在每一时刻的衰变速度与其现存的量成正比. 设镭的量在初始时刻 $t = 0$ 为 Q_0, 经过时间 $T = 1600$ 年它的量减少了一半. 求镭的衰变规律.

2529. 在一种把物质 A 变为物质 B 的二阶化学反应中, 反应速度与此二物质浓度之积成正比. 若在 $t = 0$ 时在容器中有 20% 的物质 B, 而当 $t = 15\,\mathrm{min}$ 时其浓度变为 80%, 问在 $t = 1\,\mathrm{h}$ 时其浓度如何?

2530. 根据胡克定律, 杆的相对伸长 ε 与相应横截面上的应力 σ 成正比, 即

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E},$$

式中 E 为杨氏模量. 求圆锥形杆在自重作用下的伸长量, 此锥形的顶向下而底固定, 设底半径等于 R, 圆锥的高为 H, 密度为 ρ.

§11. 定积分的近似计算法

1. 矩形公式. 若函数 $y = y(x)$ 在有限的闭区间 $[a, b]$ 上连续且充分多次可微, 并且 $h = \dfrac{b-a}{n}, x_i = a + ih\ (i = 0, 1, \cdots, n), y_i = y(x_i)$, 则

$$\int_a^b y(x)\,\mathrm{d}x = h(y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}) + R_n,$$

式中

$$R_n = \frac{(b-a)h}{2}y'(\xi) \quad (a \leqslant \xi \leqslant b).$$

2. 梯形公式. 在相同的记号下, 有

$$\int_a^b y(x)\,\mathrm{d}x = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right) + R_n,$$

式中

$$R_n = -\frac{(b-a)h^2}{12}y''(\xi') \quad (a \leqslant \xi' \leqslant b).$$

3. 抛物线公式 (辛普森公式). 命 $n = 2k$, 得:

$$\int_a^b y(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{3}[(y_0 + y_{2k}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2k-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2k-2})] + R_n,$$

式中

$$R_n = -\frac{(b-a)h^4}{180}y^{(4)}(\xi'') \quad (a \leqslant \xi'' \leqslant b).$$

2531. 利用矩形公式 $(n=12)$, 近似地计算

$$\int_0^{2\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x,$$

并把结果同精确答案进行比较.

利用梯形公式计算下列积分并估计它们的误差:

2532. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$ $(n=8)$.

2533. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$ $(n=12)$.

2534. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ $(n=6)$.

利用辛普森公式计算下列积分:

2535. $\displaystyle\int_1^9 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ $(n=4)$.

2536. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{3+\cos x}\,\mathrm{d}x$ $(n=6)$.

2537. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ $(n=10)$.

2538. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\ln(1+x)}$ $(n=6)$.

2539. 取 $n=10$, 计算卡塔兰常数

$$G=\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

2540. 利用公式

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

计算数 π, 精确到 10^{-5}.

2541. 精确到 0.001, 计算

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

2542. 精确到 10^{-4}, 计算

$$\int_0^1 (\mathrm{e}^x-1)\ln\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

2543. 精确到 0.001, 计算概率积分

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

2544. 近似地求出半轴为 $a=10$ 及 $b=6$ 的椭圆的周长.

2545. 取 $\Delta x=\dfrac{\pi}{3}$, 描点作出函数

$$y=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \quad (0\leqslant x\leqslant 2\pi)$$

的图像.

第五章　级数

§1. 数项级数. 同号级数收敛性的判别法

1. 一般概念. 对于数项级数

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

若存在极限

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad (\text{级数的和}),$$

式中 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 则称级数 (1) 为收敛的. 反之, 则称级数 (1) 发散的.

2. 柯西准则. 级数 (1) 收敛的充分必要条件为: 对于任何 $\varepsilon > 0$, 都存在数 $N = N(\varepsilon)$, 使得当 $n > N$ 和 $p > 0$ 时, 不等式

$$|S_{n+p} - S_n| = \left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i\right| < \varepsilon$$

成立. 特别是, 若级数收敛, 则

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

3. 比较判别法 I. 设除级数 (1) 外, 还有级数

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots \tag{2}$$

若当 $n \geqslant n_0$ 时, 不等式

$$0 \leqslant a_n \leqslant b_n$$

成立, 则: (a) 从级数 (2) 收敛可推得级数 (1) 收敛; (b) 从级数 (1) 发散可推得级数 (2) 发散.

特别地, 当 $n \to \infty$ 时 $a_n \sim b_n$, 则正项级数 (1) 和 (2) 同时收敛或同时发散.

4. 比较判别法 II. 若

$$a_n = O^*\left(\frac{1}{n^p}\right) ①,$$

则 (a) 当 $p > 1$ 时级数 (1) 收敛, (b) 当 $p \leqslant 1$ 时级数 (1) 发散.

5. 达朗贝尔判别法. 若 $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 及

---

①关于记号 O^* 的意义, 参阅第二章, §6, 1.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q,$$

则 (a) 当 $q<1$ 时级数 (1) 收敛, (b) 当 $q>1$ 时级数 (1) 发散.

6. 柯西判别法. 若 $a_n\geqslant 0\ (n=1,2,\cdots)$ 及

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q,$$

则 (a) 当 $q<1$ 时级数 (1) 收敛, (b) 当 $q>1$ 时级数 (1) 发散.

7. 拉比判别法. 若 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$ 及

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p,$$

则 (a) 当 $p>1$ 时级数 (1) 收敛, (b) 当 $p<1$ 时级数 (1) 发散.

8. 高斯判别法. 若 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$ 及

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+\frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

式中 $|\theta_n|<C$ 而 $\varepsilon>0$, 则 (a) 当 $\lambda>1$ 时级数 (1) 收敛; (b) 当 $\lambda<1$ 时级数 (1) 发散; (c) 当 $\lambda=1$ 时, 若 $\mu>1$ 则级数 (1) 收敛, 若 $\mu\leqslant 1$ 时级数 (1) 发散.

9. 柯西积分判别法. 若 $f(x)\ (x\geqslant 1)$ 是非负不增函数, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$$

与积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 同时收敛或同时发散.

直接证明下列级数的收敛性并求它们的和:

2546. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\cdots$.

2547. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$.

2548. $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}+\cdots$.

2549. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$.

2550. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots$.

2551. (a) $q\sin\alpha+q^2\sin 2\alpha+\cdots+q^n\sin n\alpha+\cdots\quad(|q|<1)$;

(b) $q\cos\alpha+q^2\cos 2\alpha+\cdots+q^n\cos n\alpha+\cdots\quad(|q|<1)$.

2552. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

2553. 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 的收敛性.

提示: 证明: 当 $x\neq k\pi$ (k 是整数) 时, 要 $\sin nx\to 0\ (n\to\infty)$ 是不可能的.

2554. 证明: 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则把该级数的各项在不变更其先后次序的情况下

分别组合起来, 所得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \quad \left(\text{其中 } A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \ (p_1 = 1, p_1 < p_2 < \cdots)\right),$$

也收敛且有相同的和. 反之不真. 举出例子.

2555. 证明: 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的各项是正的, 且把这级数的各项分别组合而得到的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛, 则原来的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

研究下列级数的收敛性:

2556. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$.

2557. $0.001 + \sqrt{0.001} + \sqrt[3]{0.001} + \cdots$.

2558. $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$.

2559. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \cdots$.

2560. $\frac{1}{1001} + \frac{1}{2001} + \frac{1}{3001} + \cdots + \frac{1}{1000n+1} + \cdots$.

2561. $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \cdots + \frac{n}{2n-1} + \cdots$.

2562. $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \cdots$.

2563. $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}} + \cdots$.

2564. $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3\cdot 5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} + \cdots$.

2565. 证明: 由等差数列各项的倒数组成的级数是发散的.

2566. 证明: 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (A) 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ (B) 皆收敛且 $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ (C) 也收敛. 若级数 (A) 和 (B) 皆发散, 问级数 (C) 的收敛性若何?

2567. 设已知二发散级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{及} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

的各项不为负数, 问下列级数的收敛性若何:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n) \quad \text{及} \quad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)?$$

2568. 证明: 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \geqslant 0)$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛. 逆命题不成立, 举出例子.

2569. 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$$

也收敛.

2570. 证明: 若

$$\lim_{n\to\infty} na_n = a \neq 0,$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

2571. 证明: 若各项为正且其值单调递减的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0.$$

2572. 若当 $p = 1, 2, 3, \cdots$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}) = 0$, 问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否收敛?

利用柯西准则, 证明下列正项级数的收敛性:

2573. $a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots \quad (|a_n| < 10).$

2574. $\frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \cdots + \frac{\sin nx}{2^n} + \cdots.$

2575.1. $\frac{\cos x - \cos 2x}{1} + \frac{\cos 2x - \cos 3x}{2} + \cdots + \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n} + \cdots.$

2575.2. $\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos x^2}{2^2} + \cdots + \frac{\cos x^n}{n^2} + \cdots.$

提示: 利用不等式

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad (n = 2, 3, \cdots).$$

利用柯西准则, 证明下列级数的发散性:

2576. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots.$

2577. (a) $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots;$

(b) $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \cdots.$

运用比较判别法、达朗贝尔判别法或柯西判别法, 研究下列级数的收敛性:

2578. $\frac{1000}{1!} + \frac{1000^2}{2!} + \frac{1000^3}{3!} + \cdots + \frac{1000^n}{n!} + \cdots.$

2579. $\frac{(1!)^2}{2!} + \frac{(2!)^2}{4!} + \cdots + \frac{(n!)^2}{(2n)!} + \cdots.$

2580. $\frac{1!}{1} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \cdots + \frac{n!}{n^n} + \cdots.$

2581. (a) $\dfrac{2\cdot 1!}{1}+\dfrac{2^2\cdot 2!}{2^2}+\dfrac{2^3\cdot 3!}{3^3}+\cdots+\dfrac{2^n n!}{n^n}+\cdots$;

(b) $\dfrac{3\cdot 1!}{1}+\dfrac{3^2\cdot 2!}{2^2}+\dfrac{3^3\cdot 3!}{3^3}+\cdots+\dfrac{3^n n!}{n^n}+\cdots$.

2582. $\dfrac{(1!)^2}{2}+\dfrac{(2!)^2}{2^4}+\dfrac{(3!)^2}{2^9}+\cdots+\dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}}+\cdots$.

2583. $\dfrac{1000}{1}+\dfrac{1000\cdot 1001}{1\cdot 3}+\dfrac{1000\cdot 1001\cdot 1002}{1\cdot 3\cdot 5}+\cdots$.

2584. $\dfrac{4}{2}+\dfrac{4\cdot 7}{2\cdot 6}+\dfrac{4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 6\cdot 10}+\cdots$.

2585. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\cdots(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2})$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 其中 $a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & n=m^2,\\ \dfrac{1}{n^2}, & n\neq m^2\end{cases}$ (m 为正整数);

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha}$.

2586. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^n}$. **2587.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n}$. **2588.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$.

2589. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^5}{2^n+3^n}$; (c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$;

(d) $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\cdots$.

提示: $\sqrt{2}=2\cos\dfrac{\pi}{4}$.

2590. 证明: 若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q\quad(a_n>0),$$

则 $a_n=o(q_1^n)$, 其中 $q_1>q$.

2591.1. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ $(a_n>0)$ 的各项在 $n\geqslant n_0$ 时满足不等式

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\rho<1.$$

证明: 对于级数的余项

$$R_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots$$

在 $n\geqslant n_0$ 时有以下估计:

$$R_n\leqslant a_{n_0}\cdot\frac{\rho^{n-n_0+1}}{1-\rho}.$$

2591.2. 已知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(2n)!!]^2}{(4n)!!},$$

其中 $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdots 2n$. 为使此级数的和与部分和 S_n 之差小于 $\varepsilon = 10^{-6}$, 应取多少项方可?

2592. 证明: 若

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1 \quad (a_n > 0),$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

逆命题不成立. 研究例子

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots.$$

2593. 证明: 若对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n > 0)$ 存在极限

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \tag{A}$$

则

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = q \tag{B}$$

也存在.

逆命题不成立: 若极限 (B) 存在, 则极限 (A) 可以不存在. 研究例子

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{2^{n+1}}.$$

2594. 证明: 若

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{a_n} = q \quad (a_n \geqslant 0),$$

则 (a) 当 $q < 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; (b) 当 $q > 1$ 时该级数发散 (柯西判别法的推广).

研究下列级数的收敛性:

2595. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n}$.

2596. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n}$.

2597. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \left[\sqrt{2} + (-1)^n\right]^n}{3^n}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \cos n}{2 + \cos n}\right)^{2n - \ln n}$.

利用拉比判别法和高斯判别法, 研究下列级数的收敛性:

2598. $\left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^p + \cdots$.

2599. $\frac{a}{b} + \frac{a(a+d)}{b(b+d)} + \frac{a(a+d)(a+2d)}{b(b+d)(b+2d)} + \cdots \quad (a > 0, b > 0, d > 0)$.

2600. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}}$.

2601. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}$.

2602. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!n^{-p}}{q(q+1)\cdots(q+n)}$ $(p>0, q>0)$.

2603. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q}$ $(p>0, q>0)$.

2604. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\right]^p \cdot \frac{1}{n^q}$ $(p>0, q>0)$.

2605. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{q(q+1)\cdots(q+n-1)}\right]^\alpha$ $(p>0, q>0)$.

2606. 证明: 对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n>0)$, 若在 $n\to\infty$ 时成立条件

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1+\frac{p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

则

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right),$$

其中 $\varepsilon>0$ 是任意小量; 并且若 $p>0$, 则当 $n\to\infty$ 时 $a_n\downarrow 0$, 即从 $n\geqslant n_0$ 开始, a_n 单调递减, 且在 $n\to\infty$ 时 $a_n\to 0$.

求出通项 a_n 的减小的阶, 从而研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性:

2607. $a_n = \frac{n^p+a_1n^{p-1}+\cdots+a_p}{n^q+b_1n^{q-1}+\cdots+b_q}$, 其中 $n^q+b_1n^{q-1}+\cdots+b_q>0$.

2608. $a_n = \frac{1}{n^p}\sin\frac{\pi}{n}$.

2609. $a_n = (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p \ln\frac{n-1}{n+1}$ $(n>1)$.

2610. $a_n = \ln^p\left(\sec\frac{\pi}{n}\right)$.

2611. $a_n = \log_{b^n}\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}}{n}\right)$ $(a>0, b>0)$.

2612. $a_n = \left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^p$.

2613. (a) $a_n = \frac{1}{n^{1+\frac{k}{\ln n}}}$; (b) $a_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

2614. 证明热梅判别法: 对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n>0)$, 若当 $n>n_0$ 时

$$(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n}\geqslant p>1,$$

则此级数收敛; 若当 $n>n_0$ 时

$$(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n}\leqslant 1,$$

则此级数发散.

2615. 证明: 若存在 $\alpha>0$ 使当 $n\geqslant n_0$ 时 $\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\geqslant 1+\alpha(a_n>0)$, 则级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\ (a_n > 0)$ 收敛; 若 $n \geqslant n_0$ 时 $\dfrac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leqslant 1$, 则此级数发散 (对数差别法).

研究具有如下通项的级数的收敛性:

2616. $a_n = n^{\ln x}\ (x > 0)$.

2617. $a_n = \dfrac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}}\ (n > 1)$.

2618. $a_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}\ (n > 1)$.

2619. 利用柯西积分判别法, 研究具有如下通项的级数的收敛性:

(a) $a_n = \dfrac{1}{n \ln^p n}\ (n > 1)$;

(b) $a_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^p (\ln \ln n)^q}\ (n > 2)$.

2620. 研究下列级数的收敛性:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdots \ln(n+1)}{\ln(2+p) \cdot \ln(3+p) \cdots \ln(n+1+p)}\ (p > 0)$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\nu(n)}{n^2}$, 其中 $\nu(n)$ 为数 n 的位数;

(c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln(n!)}$.

2621. 设 $\lambda_n\ (n = 1, 2, \cdots)$ 依次是方程 $\tan x = x$ 的各个正根. 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2}$ 的收敛性.

2622. 证明: 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的项单调递减, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 同时收敛或同时发散.

2623. 设 $f(x)$ 为单调不增的正值函数. 证明: 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛, 则对于它的余项 $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f(k)$ 有以下估计:

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant R_n \leqslant f(n+1) + \int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

利用此式, 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ 的和, 精确到 0.01.

2624. 证明叶尔马科夫判别法: 若 $f(x)$ 为单调递减的正值函数, 且

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)}{f(x)} = \lambda.$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 在 $\lambda < 1$ 时收敛, 在 $\lambda > 1$ 时发散.

2625. 证明罗巴切夫斯基判别法: 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的项单调趋于零, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数 $\sum\limits_{m=0}^{\infty} p_m \cdot 2^{-m}$ 同时收敛或者同时发散, 其中 p_m 是满足不等式

$$a_n \geqslant 2^{-m} \quad (n=1,2,\cdots,p_m)$$

的项 a_n 的最大的序号.

研究下列级数的收敛性:

2626. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}$.

2627. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+a}-\sqrt[4]{n^2+n+b})$.

2628. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cot\dfrac{n\pi}{4n-2}-\sin\dfrac{n\pi}{2n+1}\right)$.

2629. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\dfrac{n+1}{n}}\right)$.

2630. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(n!)}{n^{\alpha}}$.

2631. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt[3]{n}}$.

2632. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$.

2633. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1)$.

2634. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{a\ln n+b}{c\ln n+d}}$.

2635. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^2\left(\sin\dfrac{1}{n}\right)}$.

2636. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\dfrac{a}{n}\right)^{n^3}$.

2637. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\ln\left(\dfrac{\cosh\dfrac{\pi}{n}}{\cos\dfrac{\pi}{n}}\right)$.

2638. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$.

2639. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

2640. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a^{\frac{1}{n}}-\dfrac{b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{2}\right)\ (a>0,b>0,c>0)$.

2641. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^{n^{\alpha}}-1)$.

2642. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\ln\dfrac{1}{n^{\alpha}}-\ln\left(\sin\dfrac{1}{n^{\alpha}}\right)\right]$.

2643. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^{-(b\ln n+c\ln^2 n)}\ (a>0)$.

2644. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}\ (a>0,b>0)$.

2645. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{[(n+1)!]^n}{2!\cdot4\cdots(2n)!}$.

研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的收敛性, 其通项如下:

2646. $u_n=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

2647. $u_n=\dfrac{1}{\displaystyle\int_0^n\sqrt[4]{1+x^4}\,\mathrm{d}x}$.

2648. $u_n=\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\dfrac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$.

2649. $u_n=\displaystyle\int_n^{n+1}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

2650. $u_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{n}}\dfrac{\sin^3 x}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

2651. $u_n=\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!}$.

2652. $u_n = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln^2 k}{n^{\alpha}}$.

用相应的级数来代替数列 x_n $(n = 1, 2, \cdots)$, 然后研究它们的收敛性, 设:

2653. $x_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$. **2654.** $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln k}{k} - \dfrac{(\ln n)^2}{2}$.

2655. 对于下列级数:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}; \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}; \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!},$$

大约应取多少项来求级数的和方可精确到 10^{-5}?

§2. 变号级数收敛性的判别法

1. 级数的绝对收敛性. 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

称为*绝对收敛*, 若

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{2}$$

收敛. 这时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛. 绝对收敛级数的和与各项相加的顺序无关.

要确定级数 (1) 的绝对收敛性, 只须把对于同号级数收敛性的已知判别法应用于级数 (2) 即可.

若级数 (1) 收敛, 而级数 (2) 发散, 则称级数 (1) 为*条件收敛* (*非绝对收敛*). 通过改变各项的顺序, 可以让条件收敛级数的和等于任何数 (*黎曼定理*).

2. 莱布尼茨判别法. 若交错级数

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots + (-1)^{n-1} b_n + \cdots \quad (b_n \geqslant 0)$$

满足条件 (a) $b_n \geqslant b_{n+1} (n = 1, 2, \cdots)$ 和 (b) $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0$, 则该级数收敛 (一般说来, 非绝对收敛). 在这种情形下, 对于级数的余项

$$R_n = (-1)^n b_{n+1} + (-1)^{n+1} b_{n+2} + \cdots$$

有以下估计:

$$R_n = (-1)^n \theta_n b_{n+1} \quad (0 \leqslant \theta_n \leqslant 1).$$

3. 阿贝尔判别法. 若 (a) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, (b) 数 $b_n (n = 1, 2, \cdots)$ 构成单调有界数列, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{3}$$

收敛.

4. 狄利克雷判别法. 若 (a) 全体部分和 $A_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ 是有界的, (b) 当 $n \to \infty$ 时 b_n 单调地趋于零, 则级数 (3) 收敛.

2656. 证明：可把非绝对收敛级数的各项在不变更其顺序的情况下分别组合起来，使所得的新级数绝对收敛.

2657. 设有级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，若 (a) 当 $n \to \infty$ 时，此级数的通项 a_n 趋于零；(b) 在不变更其顺序的情况下分别组合该级数的各项，所得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛；(c) 在项 $A_n = \sum\limits_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i$ $(1 = p_1 < p_2 < \cdots)$ 中相加项 a_i 的数目是有界的，证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是收敛的.

2658. 证明：若将收敛级数的各项重新排列，使每一项离开原有的位置不超过 m 个位置 (m 为预先给定的数)，则级数的和不变.

证明下列级数的收敛性并求它们的和：

2659. $1 - \dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{4} - \dfrac{7}{8} + \cdots$.

2660. $1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{32} + \cdots$.

2661. $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} + \cdots$.

提示：运用公式 $1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n$，其中 C 为欧拉常数，并且 $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

2662. 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$. 将该级数的各项重排，得到下列级数：

(a) $1 + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{4} + \cdots$； (b) $1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{8} + \cdots$.

求这些级数的和.

2663. 把收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ 的各项重排，使它成为发散的.

研究下列变号级数的收敛性：

2664. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$.

2665. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\dfrac{2n+100}{3n+1}\right)^n$；

(b) $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{9} - \cdots$.

2666. 设

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n, \tag{1}$$

其中 $b_n > 0$，且当 $n \to \infty$ 时 $b_n \to 0$. 由此是否可知级数 (1) 收敛？考察例子

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2 + (-1)^n}{n}.$$

研究下列变号级数的收敛性:

2667. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin \frac{n\pi}{4}$.

2668. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$.

2669. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$.

2670. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

2671. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}\right)$.

2672. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$.

2673. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$; (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos \frac{\pi n^2}{n+1}$.

2674. 证明: 若

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

其中 $p > 0$ (参阅习题 2606), 则交错级数 $b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots + (-1)^{n-1} b_n + \cdots$ $(b_n > 0)$ 收敛.

研究下列级数的绝对收敛性 (除了习题 2690) 和条件收敛性:

2675. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$.

2676. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$.

2677. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left[1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right]$.

2678. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^{2n} x}{n}$.

2679. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

2680. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$.

2681. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{[\sqrt{n}+(-1)^{n-1}]^p}$.

2682. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}}$.

2683. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$.

2684. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^{100}}{2^n}$.

2685. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n^2]{n}}$.

2686. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n}$.

2687. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$.

2688. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$.

2689. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}\right]^p$.

2690. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n}$.

2691. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$. 提示: 证明 $\lim_{n\to\infty} \sin n^2 \neq 0$.

2692. 设

$$R(x) = \frac{a_0x^p + a_1x^{p-1} + \cdots + a_p}{b_0x^q + b_1x^{q-1} + \cdots + b_q}$$

为有理函数, 式中 $a_0 \neq 0$,$b_0 \neq 0$, 且当 $x \geqslant n_0$ 时 $|b_0x^q + b_1x^{q-1} + \cdots + b_q| > 0$. 研究级数

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n R(n)$$

的绝对收敛性和条件收敛性.

研究下列级数的收敛性:

2693. $\dfrac{1}{1^p} - \dfrac{1}{2^q} + \dfrac{1}{3^p} - \dfrac{1}{4^q} + \dfrac{1}{5^p} - \dfrac{1}{6^q} + \cdots$.

2694. $1 + \dfrac{1}{3^p} - \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{5^p} + \dfrac{1}{7^p} - \dfrac{1}{4^p} + \cdots$.

2695. (a) $1 + \dfrac{1}{3^p} - \dfrac{1}{1^p} + \dfrac{1}{5^p} + \dfrac{1}{7^p} - \dfrac{1}{3^p} + \dfrac{1}{9^p} + \dfrac{1}{11^p} - \dfrac{1}{5^p} + \cdots$;

(b) $1 - \dfrac{2}{2^q} + \dfrac{1}{3^p} + \dfrac{1}{4^p} - \dfrac{2}{5^q} + \dfrac{1}{6^p} + \dfrac{1}{7^p} - \dfrac{2}{8^q} + \dfrac{1}{9^p} + \cdots$.

2696. 证明: 级数

(a) $\sin x + \dfrac{\sin 2x}{2} + \dfrac{\sin 3x}{3} + \cdots$; (b) $\cos x + \dfrac{\cos 2x}{2} + \dfrac{\cos 3x}{3} + \cdots$

在区间 $(0, \pi)$ 内不绝对收敛.

2697. 对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p} \quad (0 < x < \pi)$$

对全体参数 (p, x) 定出: (a) 绝对收敛域; (b) 非绝对收敛域.

2698. 研究下列级数的收敛性:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[n]{n}}{\ln n}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{n}\right)}{\ln(\ln n)}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=10}^{\infty} \frac{\sin n}{n + 10\sin n}$.

2699. 对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n!n^q}$$

定出: (a) 绝对收敛域; (b) 条件收敛域.

2700. 研究级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n}$$

的收敛性, 其中 $\dbinom{m}{n} = \dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$.

2701. 若级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1,$$

则可否断定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收敛? 研究例子

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad 和 \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right].$$

2702.1. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为非绝对收敛的级数,

$$P_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i|+a_i}{2},\quad N_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i|-a_i}{2}.$$

证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n}{P_n}=1.$$

2702.2. 证明: 对于每一个 $p>0$, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$$

的和在 $\frac{1}{2}$ 与 1 之间.

2703. 在下列级数中:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}}$;　　(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$,

应取多少项来计算级数的和, 方可使其精度达到 $\varepsilon=10^{-6}$?

2704. 证明: 若把级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$$

的各项重排, 使依次 p 个正项的一组与依次 q 个负项的一组相交替, 则新级数的和为

$$\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}.$$

2705. 证明: 若改变调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots,$$

部分项的符号, 使得 p 个正项之后跟随着 q 个负项 $(p\neq q)$, 但不变更原来的顺序, 则此级数仍是发散的. 仅当 $p=q$ 时得到收敛级数.

§3. 级数的运算

级数的和与积. 我们定义:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$;　　(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$,

式中 $c_n=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1$.

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 二者收敛, 则等式 (a) 并非仅有形式上的意义; 至于等式 (b), 则要求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 二者收敛, 并且其中最少有一个是绝对收敛的.

2706. 若两个级数, (a) 一个收敛, 而另一个发散; (b) 两个都发散, 则关于这两个级数的和可下何种断言?

2707. 求二级数的和:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3^n}+\frac{(-1)^n}{n^3}\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\right].$$

求下列级数的和:

2708. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{3^n}\right]$.

2709. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}$.

2710. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{\left[\frac{n}{2}\right]}y^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$ $(|xy|<1)$.

2711. 证明:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1.$$

2712. 证明:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n \quad (|q|<1).$$

2713. 证明: 收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

的平方是发散级数.

2714. 证明: 下面二收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}\ (\alpha>0) \quad 及 \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}}\ (\beta>0)$$

之积当 $\alpha+\beta>1$ 时是收敛级数, 而当 $\alpha+\beta<1$ 时是发散级数.

2715. 验证下面二发散级数

$$1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n \quad 和 \quad 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

之积是绝对收敛级数.

§4. 函数项级数

1. 收敛域. 使函数项级数

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \tag{1}$$

收敛的 x 值的集合 X 叫做此级数的收敛域, 而函数

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}u_i(x)\quad(x\in X_0)$$

称为级数的和.

2. 一致收敛性. 对于函数序列

$$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x),\cdots \tag{*}$$

若: 1) 存在极限函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)\quad(x\in X);$$

2) 对于任何的数 $\varepsilon>0$, 可以确定 $N=N(\varepsilon)$, 使得当 $n>N$ 和 $x\in X$ 时,

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon.$$

成立, 则称此函数序列在集合 X 上一致收敛.

当序列 $(*)$ 一致收敛于 $f(x)$ 时, 我们使用记号 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$.

若函数项级数 (1) 的部分和序列

$$S_n(x)=\sum_{i=1}^{n}u_i(x)\quad(n=1,2,\cdots)$$

在集合 X 上一致收敛, 则称 (1) 在此集合上一致收敛.

3. 柯西准则. 级数 (1) 在集合 X 上一致收敛的充分必要条件为: 对于每一个 $\varepsilon>0$, 都存在数 $N=N(\varepsilon)$, 使得当 $n>N$ 和 $p>0$ 时不等式

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|=\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}u_i(x)\right|<\varepsilon$$

对一切 $x\in X$ 都成立.

4. 魏尔斯特拉斯判别法. 对于级数 (1), 若存在收敛的数项级数

$$c_1+c_2+\cdots+c_n+\cdots, \tag{2}$$

使得对于 $x\in X$ 下列不等式都成立:

$$|u_n(x)|\leqslant c_n,$$

则级数 (1) 在集合 X 上绝对并一致收敛.

5. 阿贝尔判别法. 若: 1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在集合 X 上一致收敛; 2) 函数 $b_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 全体是有界的并对每一个 x 组成一单调序列, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x) \tag{3}$$

在集合 X 上一致收敛.

6. 狄利克雷判别法. 若: 1) 级数 (3) 的部分和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 全体是有界的; 2) 序列 $b_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 对于每一个 x 都是单调的, 并且当 $n\to\infty$ 时在 X 上一致地趋于零, 则级数 (3) 在集合 X 上一致收敛.

7. 函数项级数的性质. (a) 以连续函数为项的一致收敛级数的和是连续函数.

(b) 若函数项级数 (1) 在每一个区间 $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$ 上一致收敛且有有限的极限 $\lim\limits_{x\to a}u_n(x)=A_n\ (n=1,2,\cdots)$, 则 1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 收敛; 2) 成立等式

$$\lim_{x\to a}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\lim_{x\to a}u_n(x)\right\}.$$

(c) 若收敛级数 (1) 的各项当 $a<x<b$ 时皆连续可微, 并且导数的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 在区间 (a,b) 内一致收敛, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x).$$

(d) 若级数 (1) 的各项连续, 并且此级数在有限闭区间 $[a,b]$ 内一致收敛, 则

$$\int_a^b\left[\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right]\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

一般说来, 若当 $n\to\infty$ 时 $\int_a^b R_n(x)\,\mathrm{d}x\to 0$, 这里 $R_n(x)=\sum\limits_{i=n+1}^{\infty}u_i(x)$, 则公式 (4) 成立. 最后这个条件也适合于积分限无穷大的情况.

定出下列函数项级数的绝对收敛域和条件收敛域.

2716. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{x^n}$.

2717. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$.

2718. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n+1}\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)^n$.

2719. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot\ \cdots\ \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^n$.

2720. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cdot 3^{2n}}{2^n}x^n(1-x)^n$.

2721. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n\sin^n x}{n^2}$.

2722. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(x+n)^p}$.

2723. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^p\sin nx}{1+n^q}$ $(q>0; 0<x<\pi)$.

2724. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{1-x^n}$ (兰伯特级数).

2725. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{x(x+n)}{n}\right]^n$.

2726. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$.

2727. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$.

2728. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-nx}$.

2729. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\dfrac{1}{1+a^{2n}x^2}$.

2730. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2-x)(2-x^{\frac{1}{2}})(2-x^{\frac{1}{3}})\cdots(2-x^{\frac{1}{n}})$ $(x>0)$.

2731. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$.

2732. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^ny^n}{x^n+y^n}$ $(x>0; y>0)$.

2733. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+y^n}$ $(y\geqslant 0)$.

2734. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{|x|^{n^2}+|y|^{n^2}}$.

2735. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+x^n)}{n^y}\ (x\geqslant 0)$. **2736.** $\sum_{n=1}^{\infty}\tan^n\left(x+\frac{y}{n}\right)$.

2737. 证明: 若洛朗级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_nx^n$ 当 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ ($|x_1|<|x_2|$) 时收敛, 则此级数当 $|x_1|<|x|<|x_2|$ 时也收敛.

2738. 求洛朗级数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{n}{2^{|n|}}x^n$$

的收敛域并求它的和.

2739. 求牛顿级数的绝对收敛域和条件收敛域:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{[n]}}{n!}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\frac{x^{[n]}}{n!}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\mathrm{e}x)^ny^{[n]}}{n^n}$.

其中 $x^{[n]}=x(x-1)\cdots[x-(n-1)]$.

2740. 证明: 若狄利克雷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 当 $x=x_0$ 时收敛, 则此级数当 $x>x_0$ 时也收敛.

2741. 证明: 序列 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在集合 X 上一致收敛于极限函数 $f(x)$ 的充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sup_{x\in X}r_n(x)\right\}=0,$$

式中 $r_n(x)=|f(x)-f_n(x)|$.

2742. 序列 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$: (a) 在区间 $(x_0,+\infty)$ 上收敛; (b) 在每一个有限的区间 $(a,b)\subset(x_0,+\infty)$ 上一致收敛; (c) 在区间 $(x_0,+\infty)$ 上一致收敛, 这分别是什么意思?

2743. 对于序列

$$f_n(x)=x^n\ (n=1,2,\cdots)\quad(0<x<1),$$

求出其项的最小序号 $N=N(\varepsilon,x)$, 使从这项起序列的项在已知点 x 与极限函数的差不超过 0.001, 设 $x=\frac{1}{10},\frac{1}{\sqrt{10}},\cdots,\frac{1}{\sqrt[m]{10}},\cdots$. 此序列在区间 $(0,1)$ 内是否一致收敛?

2744. 应当取级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n(n+1)}$$

的多少项方可使部分和 $S_n(x)$ 当 $-\infty<x<+\infty$ 时与级数的和之差小于 ε? 对于下列 ε 值, 给出具体的计算结果:

(a) $\varepsilon=0.1$; (b) $\varepsilon=0.01$; (c) $\varepsilon=0.001$.

2745. 对怎样的 n, 不等式

$$\left|\mathrm{e}^x-\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right|<0.001\quad(0\leqslant x\leqslant 10)$$

能保证成立?

研究序列在所给区间上的一致收敛性:

2746. $f_n(x) = x^n$; (a) $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$; (b) $0 \leqslant x \leqslant 1$.

2747. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$; $0 \leqslant x \leqslant 1$. **2748.** $f_n(x) = x^n - x^{2n}$; $0 \leqslant x \leqslant 1$.

2749. $f_n(x) = \dfrac{1}{x+n}$; $0 < x < +\infty$. **2750.** $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n+x}$; $0 \leqslant x \leqslant 1$.

2751. $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$;

(a) $0 \leqslant x \leqslant 1-\varepsilon$; (b) $1-\varepsilon \leqslant x \leqslant 1+\varepsilon$; (c) $1+\varepsilon \leqslant x < +\infty$, 其中 $\varepsilon > 0$.

2752. $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$; (a) $0 \leqslant x \leqslant 1$; (b) $1 < x < +\infty$.

2753. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$; $-\infty < x < +\infty$.

2754. $f_n(x) = n\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$; $1 < x < +\infty$.

2755. (a) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$; $-\infty < x < +\infty$;

(b) $f_n(x) = \sin\dfrac{x}{n}$; $-\infty < x < +\infty$.

2756. (a) $f_n(x) = \arctan nx$; $0 < x < +\infty$;

(b) $f_n(x) = x\arctan nx$; $0 < x < +\infty$.

2757. $f_n(x) = \mathrm{e}^{n(x-1)}$; $0 < x < 1$.

2758. $f_n(x) = \mathrm{e}^{-(x-n)^2}$; (a)$-l < x < l$, 其中 l 为任意正数; (b) $-\infty < x < +\infty$.

2759. $f_n(x) = \dfrac{x}{n}\ln\dfrac{x}{n}$; $0 < x < 1$.

2760. $f_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$; (a) 在有限的区间 (a,b) 上; (b) 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上.

2761. $f_n(x) = n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right)$; $1 \leqslant x \leqslant a$. **2762.** $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}$; $0 \leqslant x \leqslant 2$.

2763. $f_n(x) = \begin{cases} n^2x, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n}, \\ n^2\left(\dfrac{2}{n} - x\right), & \dfrac{1}{n} < x < \dfrac{2}{n}, \\ 0, & x \geqslant \dfrac{2}{n}; \end{cases}$ 在闭区间 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上.

2764. 设 $f(x)$ 为定义于闭区间 $[a,b]$ 上的任意函数, 且

$$f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

证明: 当 $n \to \infty$ 时

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

2765. 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有连续的导数 $f'(x)$, 且

$$f_n(x) = n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right].$$

证明: 在闭区间 $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ 上 (其中 $a < \alpha < \beta < b$), $f_n(x) \rightrightarrows f'(x)$.

2766. 设 $f_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x + \frac{i}{n}\right)$, 其中 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数. 证明: 序列 $f_n(x)$ 在任何有限闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛.

研究下列级数的收敛性:

2767. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$; (a) 在区间 $|x| < q$ 内, 此外 $q < 1$; (b) 在区间 $|x| < 1$ 内.

2768. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$; 在闭区间 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 上; (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; 在区间 $(0, +\infty)$ 内.

2769. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$; 在闭区间 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上.

2770. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$; $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

2771. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}$; $0 < x < +\infty$.

2772. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$; $0 < x < +\infty$.

2773. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$;

(a) $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$, 其中 $\varepsilon > 0$; (b) $\varepsilon \leqslant x < +\infty$.

2774. 利用魏尔斯特拉斯判别法, 证明下列函数项级数在所指区间内的一致收敛性:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$, $-\infty < x < +\infty$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n}$, $-2 < x < +\infty$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$, $0 \leqslant x < +\infty$; (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$, $|x| < +\infty$;

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n})$, $\frac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant 2$;

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}$, $|x| < a$, a 为任意正数;

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$, $|x| < +\infty$; (h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, $|x| < +\infty$;

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$, $|x| < +\infty$;

(j) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)$, $|x| < a$;

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 \mathrm{e}^{-nx}$, $0 \leqslant x < +\infty$;

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{2x}{x^2+n^3}$, $|x| < +\infty$.

研究下列函数项级数在指定区间上的一致收敛性:

2775. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$; (a) 在闭区间 $\varepsilon \leqslant x \leqslant 2\pi - \varepsilon$ 上, 其中 $\varepsilon > 0$; (b) 在闭区间 $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ 上.

2776. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{3^n x}$; $0 < x < +\infty$.

2777. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$; $0 < x < +\infty$.

提示: 估计级数的余项.

2778. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin x}$; $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

2779. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2+\mathrm{e}^x}}$; $|x| \leqslant 10$.

2780. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}$; $-\infty < x < +\infty$.

2781. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}$; $0 \leqslant x < +\infty$.

2782. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}$; $0 \leqslant x < +\infty$.

2783. 不连续函数序列可否一致收敛于连续函数? 研究例子

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\psi(x) \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

其中

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ 为无理数}, \\ 1, & x \text{ 为有理数}. \end{cases}$$

2784. 证明: 若级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$$

在 $[a, b]$ 上一致收敛, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

在 $[a, b]$ 上也一致收敛.

2785. 若级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

在 $[a, b]$ 上绝对并一致收敛, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$$

在 $[a,b]$ 上是否必定一致收敛? 研究例子

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n,$$

其中 $0 \leqslant x \leqslant 1$.

2786. 证明: 绝对且一致收敛的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

其中

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant 2^{-(n+1)}, \\ \dfrac{1}{n}\sin^2(2^{n+1}\pi x), & 2^{-(n+1)} < x < 2^{-n}, \\ 0, & 2^{-n} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

不能用非负项的收敛数项级数作为其强级数.

2787. 证明: 若函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$$

的各项是闭区间 $[a,b]$ 上的单调函数, 此级数在闭区间 $[a,b]$ 的两个端点绝对收敛, 则此级数在闭区间 $[a,b]$ 上绝对并一致收敛.

2788. 证明: 幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

在全部位于其收敛区间内的任何闭区间上一致收敛.

2789. 设 $a_n \to \infty$ 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{1}{a_n}\right|$ 收敛. 证明: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x-a_n}$$

在不包含点 a_n $(n=1,2,\cdots)$ 的任何有界闭集合上绝对并一致收敛.

2790. 证明: 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则狄利克雷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$$

在 $x \geqslant 0$ 时一致收敛.

2791. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 证明: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{-nx}$$

在区域 $x \geqslant 0$ 内一致收敛.

2792. 证明: 函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$$

在区域 $-\infty<x<+\infty$ 内连续并有连续的导数.

2793. 证明: 函数

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(n-x)^2}$$

(a) 在除整数点 $x=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 外的一切点有定义并且连续;

(b) 为周期函数, 其周期等于 1.

2794. 证明: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[nx\mathrm{e}^{-nx}-(n-1)x\mathrm{e}^{-(n-1)x}\right]$$

在闭区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上收敛但不一致收敛, 而它的和是此区间上的连续函数.

2795. 确定函数 $f(x)$ 的存在域并研究其连续性, 设:

(a) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\dfrac{1}{n}\right)^n$; (b) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x+n(-1)^n}{x^2+n^2}$; (c) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{(1+x^2)^n}$.

2796. 设 r_k $(k=1,2,\cdots)$ 是闭区间 $[0,1]$ 上的有理数. 证明函数

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x-r_k|}{3^k}\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$$

具有下列性质: 1) 连续; 2) 在无理点可微而在有理点不可微.

2797. 证明: 黎曼 ζ 函数

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

在区域 $x>1$ 内是连续的并且在此区域内有连续的各阶导数.

2798. 证明: θ 函数

$$\theta(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\pi n^2x}$$

当 $x>0$ 时有定义并无穷多次可微.

2799. 确定函数 $f(x)$ 的存在域并研究它们的可微性, 设:

(a) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^nx}{n+x}$; (b) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|x|}{n^2+x^2}$.

2800. 证明: 序列

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\arctan\ x^n\ (n=1,2,\cdots)$$

在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内一致收敛, 但

$$\left[\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right]'_{x=1}\neq\lim_{n\to\infty}f'_n(1).$$

2801. 证明: 序列

$$f_n(x)=x^2+\frac{1}{n}\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内一致收敛, 但

$$\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right]' \neq \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

2802. 试确定参数 α 取何值时下列命题为真:

(a) 序列

$$f_n(x)=n^{\alpha}x\mathrm{e}^{-nx} \quad (n=1,2,\cdots) \tag{1}$$

$(n=1,2,\cdots)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上收敛;

(b) 序列 (1) 在 $[0,1]$ 上一致收敛;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ 可在积分号下取极限.

2803. 证明: 序列

$$f_n(x)=nx\mathrm{e}^{-nx^2} \quad (n=1,2,\cdots)$$

在闭区间 $[0,1]$ 上收敛, 但

$$\int_0^1\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right]\mathrm{d}x \neq \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

2804. 证明: 序列

$$f_n(x)=nx(1-x)^n \quad (n=1,2,\cdots)$$

在闭区间 $[0,1]$ 上收敛而不一致收敛, 但

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

2805. 在表达式

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4}\,\mathrm{d}x$$

中, 在积分符号下取极限是否合理?

求极限:

2806. $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\dfrac{x^n}{x^n+1}$.

2807. $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n-x^{n+1})$.

2808. (a) $\lim\limits_{x\to +0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n n^x}$;

(b) $\lim\limits_{x\to \infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{1+n^2x^2}$.

2809. 逐项微分级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\dfrac{x}{n^2}$ 合理否?

2810. 在闭区间 $[0,1]$ 上逐项积分级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}}\right)$$

合理否?

2811.1. 设 $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ 是无穷多次可微的函数, 且其导数 $f^{(n)}(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 的序列在每一个有限区间 (a,b) 内一致收敛于函数 $\varphi(x)$. 证明: $\varphi(x)=C\mathrm{e}^x$, 其中 C 为常数. 考察例子 $f_n(x)=e^{-(x-n)^2}, n=1,2,\cdots$.

2811.2. 设函数 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义且有界, 且在任何闭区间 $[a,b]$ 上 $f_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$. 由此是否可知

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x f_n(x) = \sup_x \varphi(x)?$$

§5. 幂级数

1. 收敛区间. 对于每一个幂级数

$$a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$$

都存在封闭的收敛区间: $|x-a| \leqslant R$, 该级数在其内收敛, 而在其外发散. 收敛半径 R 可按柯西–阿达马公式

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$$

来确定. 收敛半径 R 也可按公式

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

来计算 (若此极限存在).

2. 阿贝尔定理. 若幂级数 $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(|x| < R)$ 在收敛区间的端点 $x = R$ 收敛, 则

$$S(R) = \lim_{x\to R-0} S(x).$$

3. 泰勒级数. 在点 a 解析的函数 $f(x)$ 在该点的某邻域内可展开为幂级数

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

此级数的余项

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

可以表示为

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (0<\theta<1)$$

(拉格朗日形式) 或

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta_1(x-a))}{n!}(1-\theta_1)^n(x-a)^{n+1} \quad (0<\theta_1<1)$$

(柯西形式).

必须记住下列五个基本展开式:

I. $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty).$

II. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty).$

III. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty).$

IV. $(1+x)^m = 1 + mx + \dfrac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots$ $(-1 < x < 1).$

V. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \cdots \quad (-1 < x \leqslant 1).$

4. 幂级数的运算. 在公共的收敛区间 $|x-a|<R$ 内有:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \pm \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)(x-a)^n$;

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, 式中 $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0$;

(c) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n\right] = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(x-a)^n$;

(d) $\int\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n\right]\mathrm{d}x = C + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{(n+1)}(x-a)^{n+1}$.

5. 在复数域内的幂级数. 研究级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

式中

$$c_n = a_n + \mathrm{i}b_n, \quad a = \alpha + \mathrm{i}\beta, \quad z = x + \mathrm{i}y, \quad \mathrm{i}^2 = -1.$$

对于每一个这样的级数都有一封闭的收敛圆 $|z-a| \leqslant R$, 该级数在其内收敛 (并且绝对收敛), 而在其外发散. 收敛半径 R 等于幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$$

在实数域内的收敛半径.

求下列幂级数的收敛半径和收敛区间并研究其在收敛区间端点的性质:

2812. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^p}$.

2813. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n + (-2)^n}{n}(x+1)^n$.

2814. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$.

2815. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha^{n^2}x^n$ $(0<\alpha<1)$.

2816. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

2817. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{a^{n^2}}x^n$ $(a>1)$.

2818. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ \cdots\ \cdot(2n)}\right]^p \left(\dfrac{x-1}{2}\right)^n$.

2819. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left[\dfrac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p x^n$.

2820. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n$.

2821. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{a^n}{n} + \dfrac{b^n}{n^2}\right) x^n$ $(a>0, b>0)$.

2822. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{a^n + b^n}$ $(a>0, b>0)$.

2823. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{a^{\sqrt{n}}}$ $(a>0)$.

2824. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^{-\sqrt{n}}x^n}{\sqrt{n^2+1}}$.

2825. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n$.

2826. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n x^n$.

2827. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) x^n$.

2828. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3+(-1)^n]^n}{n} x^n$.

2829. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(1+2\cos\frac{\pi n}{4}\right)^n}{\ln n} x^n$.

2830. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$.

2831. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} x^n$ (普林斯海姆级数).

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{\nu(n)}}{n} (1-x)^n$, 其中 $\nu(n)$ 为数 n 的位数;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{\sin n}\right)^n$.

2832. 求超几何级数

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots$$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1\cdot2\cdots n\cdot\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n+\cdots$$

的收敛域.

求下列广义幂级数的收敛域:

2833. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

2834. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \sin\frac{\pi}{2^n}$.

2835. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n^2}}$.

2836. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} \mathrm{e}^{-nx}$.

2837. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!} \tan^n x$.

2838. 按二项式 $x+1$ 的非负整数次幂展开函数

$$f(x)=x^3.$$

2839. 把函数

$$f(x)=\frac{1}{a-x} \quad (a\neq 0)$$

按以下方式展开为幂级数: (a) 依 x 的幂展开; (b) 依二项式 $x-b$ 的幂展开, 此处 $b\neq a$; (c) 依 $\frac{1}{x}$ 的幂展开. 求出相应的收敛域.

2840. 按差 $x-1$ 的非负整数次幂展开函数 $f(x)=\ln x$, 并说明展开式的收敛区间. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 的和.

写出下列函数按变量 x 的非负整数次幂的展开式, 并求出相应的收敛区间:

2841. $f(x)=\sinh x$.

2842. $f(x)=\cosh x$.

2843. $f(x)=\sin^2 x$.

2844. $f(x)=a^x \quad (a>0, a\neq 1)$.

2845. $f(x)=\sin(\mu\arcsin x)$.

2846. $f(x)=\cos(\mu\arcsin x)$.

2847. 写出函数 $f(x)=x^x$ 按差 $x-1$ 的非负整数次幂展开式的前三项.

2848. 写出函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}(x\neq 0)$ 和 $f(0)=e$ 按变量 x 的非负整数次幂展开式的前三项.

2849. 将函数 $\sin(x+h)$ 和 $\cos(x+h)$ 按变量 h 的非负整数次幂展开.

2850.1. 不进行实际的展开工作而求函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2-5x+6}$ 的幂级数展开式的收敛区间: (a) 依 x 的幂展开; (b) 依二项式 $x-5$ 的幂展开.

2850.2. 能否下结论说: 在 $(-\infty,+\infty)$ 上当 $N\to\infty$ 时

$$\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\rightrightarrows\sin x?$$

利用基本展开式 I — V, 写出下列函数关于 x 的幂级数展开式:

2851. e^{-x^2}.

2852. $\cos^2 x$.

2853. $\sin^3 x$.

2854. $\dfrac{x^{10}}{1-x}$.

2855. $\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

2856. $\dfrac{x}{\sqrt{1-2x}}$.

2857. $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

2858. $\dfrac{x}{1+x-2x^2}$.

提示: 把所给分式分解为简单分式.

2859. $\dfrac{12-5x}{6-5x-x^2}$.

2860. $\dfrac{x}{(1-x)(1-x^2)}$.

2861. $\dfrac{1}{1-x-x^2}$.

2862. (a) $\dfrac{1}{1+x+x^2}$;　(b) $f(x)=\dfrac{1}{1+x+x^2+x^3}$. 计算 $f^{(1000)}(0)$.

2863. $\dfrac{x\cos\alpha-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}$.

2864. $\dfrac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$.

2865. $\dfrac{x\sinh\alpha}{1-2x\cosh\alpha+x^2}$.

2866. $\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

2867. $\ln(1+x+x^2+x^3)$.

2868. $\mathrm{e}^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$.　提示: 运用欧拉公式.

首先展开导数, 然后用逐项积分的方法求下列函数的幂级数展开式.

2869. $f(x)=\arctan x$. 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ 的和.

2870. $f(x)=\arcsin x$.

2871. $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

2872. $f(x)=\ln\left(1-2x\cos\alpha+x^2\right)$.

2873. 利用不同方法, 求下列函数的幂级数展开式:

(a) $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$; (b) $f(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\arctan x$;

(c) $f(x) = \arctan\frac{2-2x}{1+4x}$; (d) $f(x) = \arctan\frac{2x}{2-x^2}$;

(e) $f(x) = x\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2}$; (f) $f(x) = \arccos(1-2x^2)$;

(g) $f(x) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$;

(h) $f(x) = x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2}$.

2874. 利用展开式

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \cdots$$

的唯一性, 求下列函数的 n 阶导数:

(a) $f(x) = e^{x^2}$; (b) $f(x) = e^{\frac{a}{x}}$; (c) $f(x) = \arctan x$.

2875. 依二项式 $x+1$ 的正整数次幂展开函数

$$f(x) = \ln\frac{1}{2+2x+x^2}.$$

2876. 把函数

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

按变量 x 的负整数次幂展开成幂级数.

2877. 把函数

$$f(x) = \ln\ x$$

按分式 $\frac{x-1}{x+1}$ 的正整数次幂展开成幂级数.

2878. 把函数

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

按分式 $\frac{x}{1+x}$ 的正整数次幂展开成幂级数.

2879. 设

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$

直接证明:

$$f(x)f(y) = f(x+y).$$

2880. 若我们定义

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

证明: (a) $\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$; (b) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

2881. 写出函数 $f(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n+1}\right)\right]^{-1}$ 的幂级数展开式中的若干项.

对幂级数进行相应的运算, 从而求出下列函数的幂级数展开式:

2882. $f(x) = (1+x)\mathrm{e}^{-x}$.

2883. $f(x) = (1-x)^2 \cosh\sqrt{x}$.

2884. $f(x) = \ln^2(1-x)$.

2885. $f(x) = (1+x^2)\arctan x$.

2886. $f(x) = \mathrm{e}^x \cos x$.

2887. $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x$.

2888. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

2889. $f(x) = (\arctan x)^2$.

2890. $f(x) = \left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^2$.

将下列函数按变量 x 的正整数次幂展开成幂级数, 写出展开式 (异于零) 的前三项:

2891. $f(x) = \tan x$.

2892. $f(x) = \tanh x$.

2893. $f(x) = \cot x - \dfrac{1}{x}$.

2894. 设 sec x 的展开式写为以下形式:

$$\sec x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} x^{2n},$$

求出系数 E_n (欧拉数)的递推公式.

2895. 把函数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}} \quad (|x|<1)$$

展开成幂级数.

2896. 设 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. 写出函数

$$F(x) = \frac{f(x)}{1-x}$$

的展开式.

2897. 若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 有收敛半径为 R_1, 而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 有收敛半径 R_2, 则级数:

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n; \qquad \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$$

的收敛半径 R 是怎样的?

2898. 设

$$l = \varliminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{和} \quad L = \varlimsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,$$

证明: 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 R 满足不等式

$$l \leqslant R \leqslant L.$$

2899.1. 证明: 若函数 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 且 $|n! a_n| < M (n = 1, 2, \cdots)$, 其中 M 是常数, 则: (1) $f(x)$ 在任何点 a 无穷次可微; (2) 下述展开式成立:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad (|x| < +\infty).$$

2899.2. 设 $f(x) \in C^{(\infty)}(a,b)$, 且当 $x \in (a,b)$ 时 $|f^{(n)}(x)| \leqslant c^n$ $(n = 0,1,2,\cdots)$, 证明: 函数 $f(x)$ 可展开为幂级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (x_0 \in (a,b)),$$

此幂级数在区间 (a,b) 上收敛.

2899.3. 设 $f(x) \in C^{(\infty)}[-1,1]$, 且当 $x \in [-1,1]$ 时 $f^{(n)}(x) \geqslant 0$ $(n = 0,1,2,\cdots)$. 证明: 函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内可展开为幂级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

提示: 对于函数 $f(x)$ 的泰勒级数余项 $R_n(x)$, 利用导数 $f^{(n)}(x)$ 的单调性得到以下估计:

$$|R_n(x)| \leqslant |x|^{n+1} f(1).$$

2900. 证明: 若 1) $a_n \geqslant 0$; 2) 存在

$$\lim_{x \to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S, \quad 则 \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S.$$

将下列函数展开成幂级数:

2901. $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$

2902. $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}.$

2903. $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$

2904. $\displaystyle\int_0^x \frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t.$

2905. $\displaystyle\int_0^x \frac{t\,\mathrm{d}t}{\ln(1+t)}$ (写出四项).

运用逐项微分法计算下列级数的和:

2906. $x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots.$

2907. $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots.$

2908. $1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots.$

2909. $\dfrac{x}{1\cdot 2} + \dfrac{x^2}{2\cdot 3} + \dfrac{x^3}{3\cdot 4} + \cdots.$

2910. $1 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots.$ 提示: 以 $1-x$ 乘级数的导数.

运用逐项积分法计算下列级数的和:

2911. $x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots.$

2912. $x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \cdots.$

2913. $1\cdot 2x + 2\cdot 3x^2 + 3\cdot 4x^3 + \cdots.$

2914. 证明: 级数

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$$

满足方程

$$y^{(4)} = y.$$

2915. 证明: 级数

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$$

满足方程

$$xy''+y'-y=0.$$

求在复数域内 $(z=x+\mathrm{i}y)$ 下列幂级数的收敛半径及收敛圆:

2916. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1-\mathrm{i})^n}{n\cdot 2^n}$.

2917. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\mathrm{i})^n z^n}{(n+1)(n+2)}$.

2918. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!z^n}{(1+\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})\cdots(1+n\mathrm{i})}$.

2919. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^{\alpha+\mathrm{i}\beta}}$.

2920. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-\mathrm{e}^{i\alpha})^n}{n(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})^n}$.

2921. 利用牛顿二项式公式近似地计算 $\sqrt[3]{9}$, 并且估计当只取展开式三项时的误差.

2922. 近似地计算并估计相应误差:

(a) $\arctan 1.2$; (b) $\sqrt[10]{1000}$; (c) $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$; (d) $\ln\ 1.25$.

利用适当的展开式, 计算下列函数的值:

2923. $\sin 18^\circ$, 精确到 10^{-5}.

2924. $\cos 1^\circ$, 精确到 10^{-6}.

2925. $\tan 9^\circ$, 精确到 10^{-3}.

2926. e, 精确到 10^{-6}.

2927. $\ln 1.2$, 精确到 10^{-4}.

2928. 由等式

$$\frac{\pi}{6}=\arcsin\frac{1}{2}$$

求数 π, 精确到 10^{-4}.

2929. 利用等式

$$\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3},$$

计算数 π, 精确到 0.001.

2930. 利用等式

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239},$$

求数 π, 精确到 10^{-9}.

2931. 利用公式

$$\ln(n+1)=\ln n+2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\cdots\right],$$

求 $\ln 2$ 和 $\ln 3$, 精确到 10^{-5}.

2932. 将被积函数展开成级数, 从而计算下列积分之值, 精确到 0.001:

(a) $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$; (b) $\int_2^4 e^{\frac{1}{x}}\,dx$; (c) $\int_0^2 \frac{\sin x}{x}\,dx$;

(d) $\int_0^1 \cos x^2\,dx$; (e) $\int_0^1 \frac{\sinh x}{x}\,dx$; (f) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$;

(g) $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$; (h) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$; (i) $\int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$;

(j) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan x}{x}\,dx$; (k) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{x}\,dx$; (l) $\int_0^1 x^x\,dx$.

2933. 求一段正弦曲线

$$y = \sin x \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi)$$

之弧长, 精确到 0.01.

2934. 椭圆之半轴为 $a = 1$ 及 $b = \frac{1}{2}$, 求椭圆的周长, 并精确到 0.01.

2935. 两根电线杆相距 $2l = 20\,\text{m}$, 电线成抛物线的形状[①]. 若电线下垂高度 $h = 40\,\text{cm}$, 计算电线的长度, 并精确到 1 cm.

§6. 傅里叶级数

1. 展开定理. 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-l, l)$ 内分段连续并有分段连续的导数 $f'(x)$, 并且一切间断点 ξ 是正则的 $\left[\text{即 } f(\xi) = \frac{1}{2}[f(\xi-0)+f(\xi+0)]\right]$, 则函数 $f(x)$ 在此区间上可用傅里叶级数表示:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{1}$$

式中

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots), \tag{2}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = 1, 2, \cdots). \tag{2'}$$

特别是:

(a) 若函数 $f(x)$ 是偶函数, 则有:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}, \tag{3}$$

式中

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots);$$

(b) 若函数 $f(x)$ 是奇函数, 则得:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{4}$$

① 严格地说, 若不计电线的伸长, 电线形状应为悬链线. 请读者研究抛物线近似的误差. —— 译注

式中

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots).$$

一个在区间 $(0,l)$ 中有定义并且具有上述连续性的函数 $f(x)$, 可在该区间内用公式 (3) 及公式 (4) 表示.

2. 完备性条件. 对于任何在区间 $(-l,l)$ 上可积且其平方也可积的函数 $f(x)$, 组成具有系数 (2), (2′) 的级数 (1), 则李雅普诺夫等式成立:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. 傅里叶级数的积分法. 在区间 $(-l,l)$ 内按黎曼意义可积的函数 $f(x)$ 之傅里叶级数 (1) (即使是发散的), 可以在此区间内逐项积分.

2936. 将函数

$$f(x)=\sin^4 x$$

展开成傅里叶级数.

2937. 三角多项式

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}(\alpha_i\cos \mathrm{i}x+\beta_i\sin \mathrm{i}x)$$

的傅里叶级数是怎样的?

2938. 将函数

$$f(x)=\operatorname{sgn}x \quad (-\pi<x<\pi)$$

展开成傅里叶级数. 绘出函数的图像及此函数之傅里叶级数之若干部分和的图像.

利用该展开式, 求莱布尼茨级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

的和.

把下列函数展开为傅里叶级数:

2939. 在区间 $(0,2l)$ 内展开 $f(x)=\begin{cases}A, & 0<x<l,\\ 0, & l<x<2l,\end{cases}$ 其中 A 为常数.

2940. 在区间 $(-\pi,\pi)$ 内展开 $f(x)=x$.

2941. 在区间 $(0,2\pi)$ 内展开 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$.

2942. 在区间 $(-\pi,\pi)$ 内展开 $f(x)=|x|$.

2943. 在区间 $(-\pi,\pi)$ 内展开 $f(x)=\begin{cases}ax, & -\pi<x<0,\\ bx, & 0<x<\pi,\end{cases}$, 其中 a 和 b 为常数.

2944. 在区间 $(-\pi,\pi)$ 内展开 $f(x)=\pi^2-x^2$.

2945. 在区间 $(-\pi,\pi)$ 内展开 $f(x)=\cos ax$ (a 不是整数).

2946. 在区间 $(-\pi,\pi)$ 内展开 $f(x)=\sin ax$ (a 不是整数).

2947. 在区间 $(-\pi,\pi)$ 内展开 $f(x)=\sinh ax$.

2948. 在区间 $(-h,h)$ 内展开 $f(x)=e^{ax}$.

2949. 在区间 $(a,a+2l)$ 内展开 $f(x)=x$.

2950. 在区间 $(-\pi,\pi)$ 内展开 $f(x)=x\sin x$.

2951. 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内展开 $f(x)=x\cos x$.

将下列周期函数展开成傅里叶级数:

2952. $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$.

2953. $f(x)=\arcsin(\sin x)$.

2954. $f(x)=\arcsin(\cos x)$.

2955. $f(x)=x-[x]$.

2956. $f(x)=(x)$, 其中 (x) 是 x 到与它最近的整数的距离.

2957. $f(x)=|\sin x|$.

2958. $f(x)=|\cos x|$.

2959. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha^n\frac{\sin nx}{\sin x}$ $(|\alpha|<1)$.

2960. 把函数

$$f(x)=\sec x \quad \left(\frac{-\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}\right)$$

展开为傅里叶级数.

提示: 推出系数 a_n 与 a_{n-2} 之间的关系.

2961. 将函数 $f(x)=x^2$ 展开成傅里叶级数: (a) 在区间 $(-\pi,\pi)$ 内按倍角的余弦展开; (b) 在区间 $(0,\pi)$ 内按倍角的正弦展开; (c) 在区间 $(0,2\pi)$ 内展开. 给出函数的图像及情形 (a), (b) 与 (c) 的傅里叶级数之和的图像.

利用这些展开式, 求下列级数的和:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\quad 及\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

2962. 由展开式

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}\quad(-\pi<x<\pi)$$

用逐项积分的方法, 求函数 x^2, x^3 和 x^4 在区间 $(-\pi,\pi)$ 内的傅里叶级数.

2963. 写出函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<\alpha,\\ 0, & \alpha<|x|<\pi\end{cases}$$

的李雅普诺夫等式. 利用李雅普诺夫等式, 求下列级数之和:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}\quad 及\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}.$$

2964. 将函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & 1<x<2,\\ 3-x, & 2\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$$

展开成傅里叶级数.

利用公式

$$\cos x=\frac{1}{2}(t+\bar{t}),\quad \sin x=\frac{1}{2\mathrm{i}}(t-\bar{t}),$$

式中 $t=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ 及 $\bar{t}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$.

2965. $\cos^{2m}x$ (m 为正整数).

2966. $\dfrac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}$ $(|q|<1)$.

2967. $\dfrac{1-q^2}{1-2q\cos x+q^2}$ $(|q|<1)$.

2968. $\dfrac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2}$ $(|q|<1)$.

2969. $\ln(1-2q\cos x+q^2)$ $(|q|<1)$.

将下列无界周期函数展开成傅里叶级数:

2970. $f(x)=\ln\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|$.

2971. $f(x)=\ln\left|\cos\dfrac{x}{2}\right|$.

2972. $f(x)=\ln\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|$.

2973. 将函数

$$f(x)=\int_0^x \ln\sqrt{\left|\cot\frac{t}{2}\right|}\,\mathrm{d}t\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$$

展开成傅里叶级数.

2974. 函数

$$x=x(s),\quad y=y(s)\quad(0\leqslant s\leqslant 4a)$$

是正方形 $0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant a$ 的围线的参数方程, 其中 s 为依逆时针方向从点 $O(0,0)$ 起计算的弧长. 试将这两个函数展开成傅里叶级数.

2975. 应当如何把给定在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内的可积函数 $f(x)$ 延拓到区间 $(-\pi,\pi)$ 内, 使得它展开成傅里叶级数后具有以下形式:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2n-1)x\quad(-\pi<x<\pi)?$$

2976. 应当如何把给定在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内的可积函数 $f(x)$ 延拓到区间 $(-\pi,\pi)$ 内, 使得它展开成傅里叶级数后具有以下形式:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(2n-1)x\quad(-\pi<x<\pi)?$$

2977. 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内把函数

$$f(x)=x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

展开: (a) 依角的奇倍数的余弦展开; (b) 依角的奇倍数的正弦展开. 给出情形 (a) 与 (b)

的傅里叶级数之和的图像.

2978. 设 $f(x)$ 是以 π 为周期的反周期函数, 即

$$f(x+\pi) \equiv -f(x).$$

问此函数在区间 $(-\pi,\pi)$ 内的傅里叶级数具有怎样的特性?

2979. 若 $f(x+\pi) \equiv f(x)$, 则函数 $f(x)$ 在区间 $(-\pi,\pi)$ 内的傅里叶级数具有怎样的特性?

2980. 对于一个周期为 2π 的函数 $y=f(x)$, 若函数的图像: (a) 以点 $(0,0)$, $\left(\pm\frac{\pi}{2},0\right)$ 为对称中心; (b) 以坐标原点为对称中心并以 $x=\pm\frac{\pi}{2}$ 为对称轴, 问其傅里叶系数 a_n, b_n $(n=1,2,\cdots)$ 具有怎样的特性?

2981. 若

$$\varphi(-x) \equiv \psi(x),$$

问函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的傅里叶系数 a_n, b_n 与 α_n, β_n $(n=0,1,2,\cdots)$ 之间有何关系?

2982. 若

$$\varphi(-x) \equiv -\psi(x),$$

问函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的傅里叶系数 a_n, b_n 与 α_n, β_n $(n=0,1,2,\cdots)$ 之间有何关系?

2983. 已知周期为 2π 的可积函数 $f(x)$ 的傅里叶系数为 a_n, b_n $(n=0,1,2,\cdots)$, 试计算"平移"后的函数 $f(x+h)$ (h 为常数) 的傅里叶系数 $\overline{a}_n, \overline{b}_n$ $(n=0,1,2,\cdots)$.

2984. 已知周期为 2π 的可积函数 $f(x)$ 的傅里叶系数为 a_n, b_n $(n=0,1,2,\cdots)$, 试计算斯捷克洛夫函数

$$f_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

的傅里叶系数 A_n, B_n $(n=0,1,2,\cdots)$.

2985. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数, 而 a_n, b_n $(n=0,1,2,\cdots)$ 为其傅里叶系数. 求卷积函数

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\,\mathrm{d}t$$

的傅里叶系数 A_n, B_n $(n=0,1,2,\cdots)$.

利用所得的结果, 推出李雅普诺夫等式.

§7. 级数求和法

1. 直接求和法. 若

$$u_n = v_{n+1} - v_n \ (n=1,2,\cdots) \quad 及 \quad \lim_{n\to\infty} v_n = v_\infty,$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = v_\infty - v_1.$$

特别地, 若

$$u_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}\cdots a_{n+m}},$$

其中数 a_i $(i=1,2,\cdots)$ 组成以 d 为公差的等差数列, 则

$$v_n=-\frac{1}{md}\cdot\frac{1}{a_na_{n+1}\cdots a_{n+m-1}}.$$

在某些情形下, 未知级数能表示为下列已知级数的线性组合:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln\ 2;\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12},\ \text{等等.}$$

2. 阿贝尔方法. 若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\lim_{x\to1-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

在最简单的例子中, 借助于逐项微分法或积分法来求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和.

3. 三角级数求和法. 为了求级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx\quad 及\quad \sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$

的和, 通常把前者视为复数域内的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ (其中 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$) 的和的实部, 而把后者视为该幂级数的和的虚部的系数.

在许多情形下级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\ln\frac{1}{1-x}\quad (|z|<1)$$

是有用的.

求下列级数的和:

2986. $\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot7}+\cdots.$

2987. $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\dfrac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots.$

2988. $\dfrac{1}{1\cdot2}-\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}-\dfrac{1}{4\cdot5}+\cdots.$

2989. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$

2990. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+m)}$ (m 为正整数).

2991. $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot6\cdot7}+\cdots.$

2992. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-1}.$

2993. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$

2994. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(2n+1)}.$

2995. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}.$

2996. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n(n+1)}{n!}.$

2997. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2(n+1)^2}.$

2998. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}.$

2999. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^nn}{(2n+1)!}.$

3000. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2}$.

3001. 设 $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n$ 的和.

求下列级数的和:

3002. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n$.

3003. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!} x^n$.

3004. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2+1)}{(2n)!} x^{2n}$.

3005. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(2n+1)!}$.

利用逐项微分法求级数的和:

3006. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

3007. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}$.

3008. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$.

3009. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d \cdot 2d \cdots nd} x^n \ (d > 0)$. 提示: 用 $1-x$ 去乘级数的导数.

3010. $\frac{1}{3} \cdot \frac{x}{2} + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \cdots$.

利用逐项积分法求级数的和:

3011. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$.

3012. $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2) x^n$.

3013. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) x^{2n}}{n!}$.

利用阿贝尔方法, 求下列级数的和:

3014. $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots$.

3015. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$.

3016. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots$.

3017. $1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \cdots$.

求下列三角级数的和:

3018. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

3019. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$.

3020. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha \sin nx}{n}$.

3021. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha \sin nx}{n} \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

3022. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$.

3023. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2-1}$.

3024. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

3025. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n(n+1)}$.

3026. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}$.

3027. 画出曲线 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx\cdot\sin ny}{n^2}=0$.

求下列级数的和:

3028. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}(2x)^{2n}$.

3029. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$.

3030. $\frac{1!}{x+1}+\frac{2!}{(x+1)(x+2)}+\frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)}+\cdots$.

3031. $\frac{a_1}{a_2+x}+\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{a_3+x}+\cdots$, 在 $x>0, a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 发散的条件下.

3032. $\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\frac{x^4}{1-x^8}+\cdots$, 若 (a) $|x|<1$; (b) $|x|>1$.

3033. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$, 若 (a) $|x|<1$; (b) $|x|>1$.

§8. 利用级数求定积分

利用被积函数的级数展开式计算下列积分:

3034. $\int_0^1 \ln\frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$.

3035. $\int_0^1 \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}\,\mathrm{d}x$.

3036. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

3037. $\int_0^1 x^{p-1}\ln(1-x^q)\,\mathrm{d}x\ (p>0, q>0)$.

3038. $\int_0^1 \ln x\cdot\ln(1-x)\,\mathrm{d}x$.

3039. $\int_0^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2\pi x}-1}$.

3040. $\int_0^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x}+1}$.

3041. 按模数 $k\ (0\leqslant k<1)$ 的正整数次幂展开第一类完全椭圆积分

$$F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

3042. 按模数 $k\ (0\leqslant k<1)$ 的正整数次幂展开第二类完全椭圆积分

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi.$$

3043. 利用按椭圆离心率的正整数次幂展开的级数表示椭圆

$$x=a\cos t,\quad x=b\sin t\quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

的弧长.

证明下列等式:

3044. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$. **3045.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin ax\, dx = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!} a^{2n+1}$.

3046. $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos nx\, dx = \frac{\pi}{n!}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$.

求:

3047. $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{a\cos x} \cos(a \sin x - nx)\, dx$ (n 是正整数).

3048. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2} dx$. 提示: 参考习题 2864.

3049. $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2)\, dx$.

3050. 证明公式:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{a+x} dx = \frac{1}{a} - \frac{1!}{a^2} + \frac{2!}{a^3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{a^n} + (-1)^n \frac{\theta_n n!}{a^{n+1}}, \tag{1}$$

其中 $a > 0$ 且 $0 < \theta_n < 1$. 若于公式 (1) 中取两项来表示积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{100+x} dx,$$

其精确程度如何?

§9. 无穷乘积

1. 无穷乘积的收敛性. 若存在有限而且异于零的极限

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} p_i = \lim_{n\to\infty} P_n = P$$

则称无穷乘积

$$p_1 p_2 \cdots p_n \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n \tag{1}$$

是收敛的.

若 $P = 0$ 而因子 p_n 中无一为零, 则称乘积 (1) 发散于零; 在相反的情形下则称无穷乘积收敛于零.

乘积 (1) 的收敛性与级数

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \ln p_n \tag{2}$$

的收敛性是一样的.

收敛性的必要条件为:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 1.$$

若 $p_n = 1 + \alpha_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 且 α_n 不变号, 则乘积 (1) 收敛的充分必要条件为级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - 1) \tag{3}$$

收敛.

在一般的情形下, 当 α_n 不保持固定的符号而级数 (3) 收敛时, 乘积 (1) 与级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}(p_n-1)^2$$

同时收敛或同时发散, 且在发散的情形下, 乘积发散于零.

2. 绝对收敛性. 若级数 (2) 绝对收敛或条件收敛, 则称乘积 (1) 为绝对收敛或条件 (非绝对) 收敛. 级数 (3) 绝对收敛是乘积 (1) 绝对收敛的充分必要条件.

3. 函数的无穷乘积展开. 当 $-\infty<x<+\infty$ 时有展开式

$$\sin x=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),\quad \cos x=\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right].$$

特别是, 由第一式当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时和沃利斯公式

$$\frac{\pi}{2}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}.$$

证明下列等式:

3051. $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}.$

3052. $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{3}.$

3053. $\prod_{n=2}^{\infty}\left[1-\frac{2}{n(n+1)}\right]=\frac{1}{3}.$

3054. $\prod_{n=0}^{\infty}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right]=2.$

3055. $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}=\frac{2}{\pi}.$

3056. $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}.$

3057. $\prod_{n=1}^{\infty}\cosh\frac{x}{2^n}=\frac{\sinh x}{x}.$

3058. $\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+x^{2^n}\right)=\frac{1}{1-x}\ (|x|<1).$

3059. $\frac{\pi}{2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots.$

3060. $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{3n-1}\cdot\frac{3n}{3n+1}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$

试证下列无穷乘积的收敛性并求出其值:

3061. $\prod_{n=3}^{\infty}\frac{n^2-4}{n^2-1}.$

3062. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{1}{n(n+2)}\right].$

3063. $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}.$

3064. $\prod_{n=1}^{\infty}a^{\frac{(-1)^n}{n}}\ (a>0).$

3065. 可否由乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\prod_{n=1}^{\infty}q_n$ 的收敛性得出下列乘积:

(a) $\prod_{n=1}^{\infty}(p_n+q_n)$; (b) $\prod_{n=1}^{\infty}p_n^2$; (c) $\prod_{n=1}^{\infty}p_nq_n$; (d) $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{q_n}$?

的收敛性?

研究下列无穷乘积的收敛性:

3066. $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

3067. $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$.

3068. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$.

3069. $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)$.

3070. $\prod_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p$.

3071. $\prod_{n=n_0}^{\infty}\frac{n^2+a_1n+b_1}{n^2+an+b}$, 其中当 $n\geqslant n_0$ 时 $n^2+an+b>0$.

3072. $\prod_{n=n_0}^{\infty}\frac{(n-a_1)(n-a_2)\cdots(n-a_p)}{(n-b_1)(n-b_2)\cdots(n-b_p)}$, 其中 $n_0>b_i$ $(i=1,2,\cdots,p)$.

3073. $\prod_{n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$.

3074. $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

3075. $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$.

3076. $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n^2]{n}$.

3077. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}$.

3078. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{c+n}\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}$, 其中 $c>0$.

3079. $\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)$.

3080. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)$.

3081. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\right]$.

3082. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{\sqrt{n}}+\frac{x^2}{2n}}$.

3083. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^n}{n^p}\right)\cos\frac{x^n}{n^q}$.

3084. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^p$.

3085. $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{\ln(n+x)-\ln n}$.

3086. 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2$ 收敛, 则乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}\cos x_n$ 收敛.

3087. 证明:若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 绝对收敛,则乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha_n\right)$ $\left(|\alpha_n|<\frac{\pi}{4}\right)$ 收敛.

研究下列无穷乘积的绝对收敛性和条件收敛性:

3088. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right]$.

3089. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right]$.

3090. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right]$.

3091. $\prod_{n=2}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n}}{\ln n}\right]$.

3092. $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

3093. $\prod_{n=1}^{\infty}n^{(-1)^n}$.

3094. $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n^{(-1)^n}}$.

3095. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}\right]$.

3096. $\left(1+\frac{1}{\sqrt{1}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{9}}\right)\cdot$
$\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdots$.

3097. $\left(1+\frac{1}{1^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)^2\left(1+\frac{1}{3^\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{4^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{5^\alpha}\right)^2\left(1+\frac{1}{6^\alpha}\right)\cdots$.

3098. 证明: 乘积

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdots$$

收敛, 尽管级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots$$

发散.

3099. 证明: 乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)$ 收敛, 其中

$$\alpha_n=\begin{cases}\dfrac{-1}{\sqrt{k}}, & n=2k-1,\\[2mm] \dfrac{1}{\sqrt{k}}+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k\sqrt{k}}, & n=2k,\end{cases}$$

尽管级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ 二者发散,

3100. 设

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

(黎曼 ζ 函数), 而 p_n $(n=1,2,\cdots)$ 是素数数列. 证明:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1}=\zeta(x).$$

3101. 设 p_n $(n=1,2,\cdots)$ 是素数数列, 证明: 乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)^{-1}$$

和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$$

发散 (欧拉).

3102. 设 $a_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$, 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{p}{n}+O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)\quad(\varepsilon>0),$$

证明:

$$a_n=O^*\left(\frac{1}{n^p}\right).$$

提示: 研究

$$\lim_{n\to\infty}a_n n^p=a_1\prod_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p.$$

3103. 利用沃利斯公式证明:

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ \cdots\ \cdot(2n)}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

3104. 证明: 表达式

$$a_n=\frac{n!\mathrm{e}^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$$

当 $n\to\infty$ 时有异于零的极限 A. 由此推出斯特林公式

$$n!=An^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}(1+\varepsilon_n),$$

其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$, $A=\sqrt{2\pi}$.

提示: 把所求极限表示为无穷乘积的形式:

$$A=\lim_{n\to\infty}a_n=a_1\prod_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

为了确定常数 A, 可利用沃利斯公式.

3105. 根据欧拉的定义, Γ 函数 $\Gamma(x)$ 由下面的公式来确定:

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

由这个公式出发: (a) 把函数 $\Gamma(x)$ 表示为无穷乘积的形状; (b) 证明: $\Gamma(x)$ 对于不为负整数的一切实数 x 皆有意义; (c) 推出下面这个性质: $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$; (d) 对于正整数 n 求 $\Gamma(n)$ 之值.

3106. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积, 且

$$\delta_n=\frac{b-a}{n},\quad f_{in}=f(a+i\delta_n)\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

证明:

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}(1+\delta_n f_{in})=\mathrm{e}^{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

3107. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{\sum\limits_{i=0}^{n-1}(a+ib)}}{\sum\limits_{i=0}^{n-1}(a+ib)}n=\frac{2}{\mathrm{e}},$$

其中 $a>0$ 和 $b>0$.

3108. 设 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在区间 (a,b) 内为连续函数且 $|f_n(x)|\leqslant c_n$ $(n=1,2,\cdots)$, 其中级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛. 证明: 函数

$$F(x)=\prod_{n=1}^{\infty}[1+f_n(x)]\quad(|f_n(x)|<1)$$

在区间 (a,b) 上是连续的.

3109. 求函数

$$F(x)=\prod_{n=1}^{\infty}[1+f_n(x)]$$

的导数之表达式. $F'(x)$ 存在的充分条件为何?

3110. 证明: 若 $0<x<y$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{y(y+1)\cdots(y+n)}=0.$$

§10. 斯特林公式

斯特林公式

$$n!=\sqrt{2\pi n}n^n\mathrm{e}^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}\quad(0<\theta_n<1),$$

可用来计算当值 n 甚大时的 $n!$.

利用斯特林公式, 近似地计算:

3111. $\lg 100!$.

3112. $1\cdot3\cdot5\cdots1999$.

3113. $\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots99}{2\cdot4\cdot6\cdots100}$.

3114. C_{100}^{40}.

3115. $\dfrac{100!}{20!30!50!}$.

3116. $\displaystyle\int_0^1(1-x^2)^{50}\,\mathrm{d}x$.

3117. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin^{200}x\,\mathrm{d}x$.

3118. 推出乘积

$$(2n-1)!!=1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)$$

的渐近公式.

3119. 若 n 甚大, 近似地计算 C_{2n}^{n}.

3120. 利用斯特林公式求下列极限:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n!}$;　　(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}$;　　(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n!}{\ln n^n}$.

§11. 用多项式逼近连续函数

1. 拉格朗日插值公式. 拉格朗日多项式

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}y_i$$

具有性质 $P_n(x_i)=y_i\ (i=0,1,\cdots,n)$.

2. 伯恩斯坦多项式. 若 $f(x)$ 是闭区间 $[0,1]$ 上的连续函数, 则伯恩斯坦多项式

$$B_n(x)=\sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\mathrm{C}_n^i x^i(1-x)^{n-i}$$

当 $n\to\infty$ 时在闭区间 $[0,1]$ 上一致收敛于函数 $f(x)$.

3121. 求在给定点按下表取值的最低次的 n 次多项式 $P_n(x)$:

x	-2	0	4	5
y	5	1	-3	1

$P_n(-1), P_n(1), P_n(6)$ 近似地等于什么?

3122. 写出经过 $A(x_0-h,y_{-1}), B(x_0,y_0), C(x_0+h,y_1)$ 这三点的抛物线方程

$$y=ax^2+bx+c.$$

3123. 利用数值 $x_0=1, y_0=1$; $x_1=25, y_1=5$; $x_2=100, y_2=10$ 推出开平方根 $y=\sqrt{x}\ (1\leqslant x\leqslant 100)$ 的近似公式.

3124. 利用数值

$$\sin 0^\circ=0,\quad \sin 30^\circ=\frac{1}{2},\quad \sin 90^\circ=1$$

推出如下形式的近似公式:

$$\sin x^\circ\approx ax+bx^3\quad (0\leqslant x\leqslant 90; x=\operatorname{arc} x^\circ)$$

利用这个公式, 近似地求:

$$\sin 20^\circ,\quad \sin 40^\circ,\quad \sin 80^\circ$$

3125. 取点 $x_i=0,\pm\dfrac{1}{2},\pm 1$ 为拉格朗日多项式的插值节点, 对函数 $f(x)=|x|$ 作出在闭区间 $[-1,1]$ 上的拉格朗日插值多项式.

3126. 以拉格朗日多项式代换函数 $y(x)$, 近似地计算

$$\int_0^2 y(x)\,\mathrm{d}x$$

其中

x	0	0.5	1	1.5	2
$y(x)$	5	4.5	3	2.5	5

3127. 对于函数 x, x^2, x^3, 试在闭区间 $[0,1]$ 上作出伯恩斯坦多项式 $B_n(x)$.

3128. 对于在闭区间 $[a,b]$ 上的已知函数 $f(x)$ 写出伯恩斯坦多项式 $B_n(x)$ 的公式.

3129. 在闭区间 $[-1,1]$ 上用伯恩斯坦多项式 $B_4(x)$ 逼近函数 $f(x)=\dfrac{|x|+x}{2}$. 作出函数 $y=\dfrac{|x|+x}{2}$ 和 $y=B_4(x)$ 的图像.

3130. 在 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 时用偶数次伯恩斯坦多项式逼近函数,

$$f(x)=|x|.$$

3131. 对于函数

$$f(x)=\mathrm{e}^{kx} \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

写出伯恩斯坦多项式 $B_n(x)$.

3132. 在闭区间 $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$上, 对于函数 $f(x)=\cos x$ 计算多项式 $B_n(x)$.

3133.1. 证明: 在闭区间 $[-1,1]$ 上 $|x|=\lim\limits_{n\to\infty} P_n(x)$, 其中

$$P_n(x)=1-\frac{1-x^2}{2}-\sum_{i=2}^{n}\frac{1\cdot 3\cdots(2i-3)}{2\cdot 4\cdots(2i)}(1-x^2)^i.$$

3133.2. 设 $f(x)\in C[a,b]$, 且

$$M_k=\int_a^b x^k f(x)\,\mathrm{d}x=0 \quad (k=0,1,2,\cdots),$$

证明: 当 $x\in[a,b]$ 时有 $f(x)\equiv 0$.

提示: 利用关于用多项式逼近连续函数的魏尔斯特拉斯定理.

3134. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 并且在闭区间 $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ 上连续, 而 $a_n, b_n (n=0,1,2,\cdots)$ 是它的傅里叶系数. 证明: 费耶尔三角多项式

$$\sigma_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)(a_i\cos ix+b_i\sin ix)$$

在区间 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于函数 $f(x)$.

3135. 对于函数

$$-\pi \leqslant x \leqslant \pi$$

作出费耶尔多项式 $\sigma_{2n-1}(x)$.

第二部分

多元函数

第六章　多元函数微分学

§1. 函数的极限. 连续性

1. 函数的极限. 设函数 $f(P)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在以 P_0 为极限点的集合 E 上有定义. 若对于任何 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon,P_0)>0$, 使得只要 $P\in E$ 及 $0<\rho(P,P_0)<\delta$, 其中 $\rho(P,P_0)$ 为 P 和 P_0 二点间的距离, 则有

$$|f(P)-A|<\varepsilon,$$

我们就说

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A.$$

2. 连续性. 若

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0),$$

则称函数 $f(P)$ 在 P_0 点是连续的.

若函数 $f(P)$ 在所给区域内的每一点连续, 则称函数 $f(P)$ 在此区域内是连续的.

3. 一致连续性. 若对于每一个 $\varepsilon>0$ 都存在仅与 ε 有关的 $\delta>0$, 使得对于区域 G 中的任何点 P',P'', 只要

$$\rho(P',P'')<\delta,$$

便成立不等式

$$|f(P')-f(P'')|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(P)$ 在区域 G 内是一致连续的.

有界闭区域内的连续函数在此区域内是一致连续的.

确定并画出下列函数的存在域:

3136. $u=x+\sqrt{y}$.

3137. $u=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$.

3138. $u=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

3139. $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$.

3140. $u=\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$.

3141. $u=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.

3142. $u=\sqrt{1-(x^2+y^2)}$.

3143. $u=\ln(-x-y)$.

3144. $u=\arcsin\dfrac{y}{x}$.

3145. $u=\arccos\dfrac{x}{x+y}$.

3146. $u=\arcsin\dfrac{x}{y^2}+\arcsin(1-y)$.

3147. $u=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$.

3148. $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3149. $u=\ln(xyz)$.

3150. $u=\ln(-1-x^2-y^2+z^2)$.

作出下列函数的等值线:

3151. $z=x+y$.

3152. $z=x^2+y^2$.

3153. $z=x^2-y^2$.

3154. $z=(x+y)^2$.

3155. $z=\dfrac{y}{x}$.

3156. $z=\dfrac{1}{x^2+2y^2}$.

3157. $z=\sqrt{xy}$.

3158. $z=|x|+y$.

3159. (a) $z=|x|+|y|-|x+y|$; (b) $z=\min(x,y)$;

(c) $z=\max(|x|,|y|)$; (d) $z=\min(x^2,y)$.

3160. $z=\mathrm{e}^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$.

3161. $z=x^y\ (x>0)$.

3162. $z=x^y\mathrm{e}^{-x}\ (x>0)$.

3163. $z=\ln\sqrt{\dfrac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}}\ (a>0)$.

3164. $z=\arctan\dfrac{2ay}{x^2+y^2-a^2}\ (a>0)$.

3165. $z=\operatorname{sgn}(\sin x\sin y)$.

求下列函数的等值面:

3166. $u=x+y+z$.

3167. $u=x^2+y^2+z^2$.

3168. $u=x^2+y^2-z^2$.

3169. $u=(x+y)^2+z^2$.

3170. $u=\operatorname{sgn}\sin(x^2+y^2+z^2)$.

根据曲面的已知方程研究其性质:

3171. $z=f(y-ax)$.

3172. $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$.

3173. $z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

3174. $z=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

3175. 作出函数

$$F(t)=f(\cos t,\sin t)$$

的图像, 式中

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & y\geqslant x,\\ 0, & y<x.\end{cases}$$

3176. 若

$$f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2},$$

求 $f\left(1,\dfrac{y}{x}\right)$.

3177. 若

$$f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\quad (x>0),$$

求 $f(x)$.

3178. 设

$$z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1).$$

若当 $y=1$ 时 $z=x$, 求函数 f 和 z.

3179. 设

$$z=x+y+f(x-y).$$

若当 $y=0$ 时 $z=x^2$, 求函数 f 和 z.

3180. 若 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$, 求 $f(x,y)$.

3181. 证明: 对于函数

$$f(x,y)=\frac{x-y}{x+y},$$

有

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0}f(x,y)\right\}=1,\qquad \lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0}f(x,y)\right\}=-1,$$

从而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 不存在.

3182. 证明: 对于函数

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2},$$

有

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0}f(x,y)\right\}=\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0}f(x,y)\right\}=0,$$

然而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 不存在.

3183.1. 证明: 对于函数

$$f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y},$$

累次极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)\right\}$ 和 $\lim\limits_{y\to 0}\left\{\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)\right\}$ 不存在, 但存在 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0$.

3183.2. 是否存在极限

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2xy}{x^2+y^2}?$$

3183.3. 当 $t\to+\infty$ 时, 函数

$$f(x,y)=x^2\mathrm{e}^{-(x^2-y)}$$

沿任意射线 $x=t\cos\alpha, y=t\sin\alpha$ $(0\leqslant t<+\infty)$ 的极限等于什么? 当 $x\to+\infty, y\to+\infty$ 时, 可否称此函数为无穷小量?

3184. 求 $\lim\limits_{x\to a}\left\{\lim\limits_{y\to b}f(x,y)\right\}$ 及 $\lim\limits_{y\to b}\left\{\lim\limits_{x\to a}f(x,y)\right\}$, 设:

(a) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}, a=\infty, b=\infty$; (b) $f(x,y)=\dfrac{x^y}{1+x^y}, a=\infty, b=+0$;

(c) $f(x,y)=\sin\dfrac{\pi x}{2x+y}, a=\infty, b=\infty$;

(d) $f(x,y)=\dfrac{1}{xy}\tan\dfrac{xy}{1+xy}, a=0, b=\infty$; (e) $f(x,y)=\log_x(x+y), a=1, b=0$.

求下列二重极限:

3185. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

3186. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

3187. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}$.

3188. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}$.

3189. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

3190. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

3191. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

3192. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\y\to 0}}\dfrac{\ln(x+\mathrm{e}^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3193. 若 $x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi$, 问沿怎样的方向 φ 存在有限的极限值:

(a) $\lim\limits_{\rho\to+0}\mathrm{e}^{\frac{x}{x^2+y^2}}$; (b) $\lim\limits_{\rho\to+\infty}\mathrm{e}^{x^2-y^2}\cdot\sin 2xy$.

求下列函数的间断点:

3194. $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3195. $u=\dfrac{xy}{x+y}$.

3196. $u=\dfrac{x+y}{x^3+y^3}$.

3197. $u=\sin\dfrac{1}{xy}$.

3198. $u=\dfrac{1}{\sin x\sin y}$.

3199. $u=\ln(1-x^2-y^2)$.

3200. $u=\dfrac{1}{xyz}$.

3201. $u=\ln\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$.

3202. 证明: (a) 函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

分别对每一个变量 x 或 y (当另一变量的值固定时) 是连续的, 但对这些变量的总体不是连续的;

(b) 函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^4}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点 $O(0,0)$ 处沿过此点的每一射线

$$x=t\cos\alpha,\quad y=t\sin\alpha\quad(0\leqslant t<+\infty)$$

连续, 即存在

$$\lim_{t\to 0} f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = f(0,0),$$

但此函数在点 $(0,0)$ 并非连续的.

3203.1. 研究线性函数

$$u = 2x - 3y + 5$$

在平面 $E^2 = \{|x| < +\infty, |y| < +\infty\}$ 上的一致连续性.

3203.2. 研究函数

$$u = \sqrt{x^2 + y^2}$$

在平面 $E^2 = \{|x| < +\infty, |y| < +\infty\}$ 上的一致连续性.

3203.3. 函数

$$f(x,y) = \sin\frac{\pi}{1 - x^2 - y^2}$$

在区域 $x^2 + y^2 < 1$ 内是否一致连续?

3203.4. 给定函数

$$u = \arcsin\frac{x}{y}.$$

此函数在其定义域 E 内是否连续? 是否一致连续?

3204. 证明: 函数

$$f(x,y) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

的间断点的集合不是闭集.

3205. 证明: 若函数 $f(x,y)$ 在某区域 G 内对变量 x 是连续的, 而关于 x 对变量 y 是一致连续的, 则此函数在该区域内是连续的.

3206. 证明: 若在某区域 G 内函数 $f(x,y)$ 对变量 x 是连续的, 并满足对变量 y 的利普希茨条件, 即

$$|f(x,y') - f(x,y'')| \leqslant L\,|y' - y''|,$$

式中 $(x,y') \in G, (x,y'') \in G$, 而 L 为常数, 则此函数在该区域内是连续的.

3207. 证明: 若函数 $f(x,y)$ 分别对每一个变量 x 和 y 是连续的, 并对其中的一个是单调的, 则此函数对两个变量的总体是连续的 (*杨定理*).

3208. 设函数 $f(x,y)$ 在区域 $a \leqslant x \leqslant A, b \leqslant y \leqslant B$ 上是连续的, 而函数序列 $\varphi_n(x)$ $(n = 1,2,\cdots)$ 在 $[a,A]$ 上一致收敛并满足条件 $b \leqslant \varphi_n(x) \leqslant B$. 证明: 函数序列

$$F_n(x) = f(x,\varphi_n(x)) \quad (n = 1,2,\cdots)$$

也在 $[a,A]$ 上一致收敛.

3209. 设: 1) 函数 $f(x,y)$ 在区域 R $(a < x < A; b < y < B)$ 内连续; 2) 函数 $\varphi(x)$ 在区间 (a,A) 内连续, 且函数值属于区间 (b,B). 证明: 函数

$$F(x) = f(x,\varphi(x))$$

在区间 (a,A) 内连续.

3210. 设: 1) 函数 $f(x,y)$ 在区域 R $(a < x < A; b < y < B)$ 内连续; 2) 函数 $x=\varphi(u,v)$ 及 $y=\psi(u,v)$ 在区域 R' $(a' < u < A'; b' < v < B')$ 内连续, 且函数值分别属于区间 (a,A) 和 (b,B). 证明: 函数

$$F(u,v)=f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$$

在区域 R' 内连续.

§2. 偏导数. 函数的微分

1. 偏导数. 在求多元函数的偏导数时, 若计算中出现的所有偏导数均连续, 则求导的结果与求导的次序无关.

2. 函数的微分. 若自变量 x,y,z 的函数 $f(x,y,z)$ 的全增量可写为以下形式:

$$\Delta f(x,y,z)=A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z+o(\rho),$$

式中 A,B,C 与 $\Delta x,\Delta y,\Delta z$ 无关而 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$, 则称函数 $f(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) **可微**, 而增量的线性部分 $A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z$, 即

$$\mathrm{d}f(x,y,z)=f'_x(x,y,z)\,\mathrm{d}x+f'_y(x,y,z)\,\mathrm{d}y+f'_z(x,y,z)\,\mathrm{d}z \tag{1}$$

(其中 $\mathrm{d}x=\Delta x$, $\mathrm{d}y=\Delta y$, $\mathrm{d}z=\Delta z$), 称为此函数的微分.

当变量 x,y,z 是其他自变量的可微函数时, 公式 (1) 仍有其意义.

若 x,y,z 为自变量, 且函数 $f(x,y,z)$ 有连续的直至 n 阶的偏导数, 则对于高阶的微分, 有符号公式

$$\mathrm{d}^n f(x,y,z)=\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}+\mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f(x,y,z).$$

3. 复合函数的导数. 若 $w=f(x,y,z)$ 可微, 其中 $x=\varphi(u,v), y=\psi(u,v), z=\chi(u,v)$, 且函数 φ,ψ,χ 可微, 则

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u},$$
$$\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

计算函数 w 的二阶导数时最好用下列符号公式:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\left(P_1\frac{\partial}{\partial x}+Q_1\frac{\partial}{\partial y}+R_1\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 w+\frac{\partial P_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial Q_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial R_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial z},$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=\left(P_1\frac{\partial}{\partial x}+Q_1\frac{\partial}{\partial y}+R_1\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(P_2\frac{\partial}{\partial x}+Q_2\frac{\partial}{\partial y}+R_2\frac{\partial}{\partial z}\right)w$$
$$+\frac{\partial P_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial Q_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial R_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial z},$$

其中

$$P_1=\frac{\partial x}{\partial u},\quad Q_1=\frac{\partial y}{\partial u},\quad R_1=\frac{\partial z}{\partial u};$$
$$P_2=\frac{\partial x}{\partial v},\quad Q_2=\frac{\partial y}{\partial v},\quad R_2=\frac{\partial z}{\partial v}.$$

4. 方向导数. 若用方向余弦 $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ 表示 $Oxyz$ 空间内的方向 l, 且函数 $u = f(x, y, z)$ 可微, 则沿方向 l 的导数按下式来计算:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

函数在给定点的最大增长速度的大小与方向可用一个向量 —— 函数的梯度

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

给出, 它的大小等于

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

3211.1. 证明:

$$f'_x(x, b) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x, b)].$$

3211.2. 设

$$f(x, y) = x + (y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}},$$

求 $f'_x(x, 1)$.

3212.1. 设 $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$, 求 $f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$. 此函数在点 $O(0,0)$ 是否可微?

3212.2. 函数 $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ 在点 $O(0,0)$ 是否可微?

3212.3. 研究函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在点 $O(0,0)$ 的可微性.

求下列函数的一阶和二阶偏导数:

3213. $u = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$.

3214. $u = xy + \dfrac{x}{y}$.

3215. $u = \dfrac{x}{y^2}$.

3216. $u = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

3217. $u = x\sin(x + y)$.

3218. $u = \dfrac{\cos x^2}{y}$.

3219. $u = \tan\dfrac{x^2}{y}$.

3220. $u = x^y$.

3221. $u = \ln(x + y^2)$.

3222. $u = \arctan\dfrac{y}{x}$.

3223. $u = \arctan\dfrac{x + y}{1 - xy}$.

3224. $u = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

3225. $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

3226. $u = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z$.

3227. $u = x^{\frac{y}{z}}$.

3228. $u = x^{y^z}$.

3229. 设 (a) $u = x^2 - 2xy - 3y^2$; (b) $u = x^{y^2}$; (c) $u = \arccos\sqrt{\dfrac{x}{y}}$,

3256. $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}, \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$, 若

$$u = x - y + x^2 + 2xy + y^2 + x^3 - 3x^2y - y^3 + x^4 - 4x^2y^2 + y^4.$$

3257. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, 若 $u = x\ln(xy)$. **3258.** $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3}$, 若 $u = x^3 \sin y + y^3 \sin x$.

3259. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, 若 $u = \arctan \dfrac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}$.

3260. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, 若 $u = \mathrm{e}^{xyz}$.

3261. $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial \xi \partial \eta}$, 若 $u = \ln \dfrac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}$.

3262. $\dfrac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q}$, 若 $u = (x - x_0)^p (y - y_0)^q$.

3263. $\dfrac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$, 若 $u = \dfrac{x+y}{x-y}$. **3264.** $\dfrac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$, 若 $u = (x^2 + y^2)\mathrm{e}^{x+y}$.

3265. $\dfrac{\partial^{p+q+r} u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}$, 若 $u = xyz\mathrm{e}^{x+y+z}$.

3266. 若 $f(x, y) = \mathrm{e}^x \sin y$, 求 $f_{x^m y^n}^{(m+n)}(0, 0)$.

3267. 证明: 若 $u = f(xyz)$, 则 $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = F(t)$, 式中 $t = xyz$, 并求函数 F.

3268. 设

$$u = x^4 - 2x^3y - 2xy^3 + y^4 + x^3 - 3x^2y - 3xy^2 + y^3 + 2x^2 - xy + 2y^2 + x + y + 1,$$

求 $\mathrm{d}^4 u$. 导数 $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}, \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}, \dfrac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3}$ 和 $\dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}$ 等于什么?

在下列各题中求所指出的阶的全微分:

3269. $\mathrm{d}^3 u$, 若 $u = x^3 + y^3 - 3xy(x - y)$. **3270.** $\mathrm{d}^3 u$, 若 $u = \sin(x^2 + y^2)$.

3271. $\mathrm{d}^{10} u$, 若 $u = \ln(x + y)$. **3272.** $\mathrm{d}^6 u$, 若 $u = \cos x \cosh y$.

3273. $\mathrm{d}^3 u$, 若 $u = xyz$. **3274.** $\mathrm{d}^4 u$, 若 $u = \ln(x^x y^y z^z)$.

3275. $\mathrm{d}^n u$, 若 $u = \mathrm{e}^{ax+by}$. **3276.** $\mathrm{d}^n u$, 若 $u = X(x)Y(y)$.

3277. $\mathrm{d}^n u$, 若 $u = f(x + y + z)$. **3278.** $\mathrm{d}^n u$, 若 $u = \mathrm{e}^{ax+by+cz}$.

3279. 设 $P_n(x, y, z)$ 为 n 次齐次多项式. 证明:

$$\mathrm{d}^n P_n(x, y, z) = n! P_n(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z).$$

3280. 设

$$Au = x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}.$$

求 Au 和 $A^2 u = A(Au)$, 若 (a) $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$; (b) $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$.

3281. 设

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

(a) $(1+x)^m(1+y)^n$; (b) $\ln(1+x)\cdot\ln(1+y)$; (c) $\arctan\dfrac{x+y}{1+xy}$.

3245. 用微分来代替函数的增量, 近似地计算:

(a) $1.002\cdot 2.003^2\cdot 3.004^3$; (b) $\dfrac{1.03^2}{\sqrt[3]{0.98\cdot\sqrt[4]{1.05^3}}}$;

(c) $\sqrt{1.02^3+1.97^3}$; (d) $\sin 29^\circ\cdot\tan 46^\circ$; (e) $0.97^{1.05}$.

3246. 设矩形的边 $x = 6\,\mathrm{m}$和 $y = 8\,\mathrm{m}$, 若第一个边增加 $2\,\mathrm{mm}$, 而第二个边减少 $5\,\mathrm{mm}$, 则矩形的对角线和面积变化多少?

3247. 扇形的中心角 $\alpha = 60^\circ$ 增加 $\Delta\alpha = 1^\circ$, 为了使扇形的面积仍然不变, 则应当把扇形的半径 $R = 20\,\mathrm{cm}$ 减少多少?

3248. 证明: 乘积的相对误差近似地等于乘数的相对误差之和.

3249. 当测量圆柱的底半径 R 和高 H 时得到以下结果:

$$R = 2.5\,\mathrm{m}\ \pm 0.1\,\mathrm{m};\quad H = 4.0\,\mathrm{m}\ \pm 0.2\ \mathrm{m},$$

则所计算出的圆柱体积会有怎样的绝对误差 Δ 和相对误差 δ?

3250. 三角形的边 $a = 200\,\mathrm{m}\pm 2\,\mathrm{m}$, $b = 300\,\mathrm{m}\pm 5\,\mathrm{m}$, 它们之间的角 $C = 60^\circ\pm 1^\circ$. 则所计算出的三角形第三边 c 会有怎样的绝对误差?

3251. 证明: 在点 $(0,0)$ 连续的函数

$$f(x,y)=\sqrt{|xy|},$$

在点 (0,0) 有两个偏导数 $f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$, 但在点 (0,0) 并非可微的.

说明导数 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的邻域中的性质.

3252. 证明: 函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 的邻域中连续且有有界的偏导数 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$, 但此函数在点 $(0,0)$ 不可微.

3253. 证明: 函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2\neq 0\end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 的邻域中有偏导数 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$, 这些偏导数在点 $(0,0)$ 是不连续的, 且在此点的任何邻域中是无界的; 然而, 此函数在点 $(0,0)$ 可微.

3254. 证明: 在某凸区域 E 内具有有界偏导数 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$ 的函数 $f(x,y)$ 在此区域 E 内一致连续.

3255. 证明: 若函数 $f(x,y)$ 对变量 x 连续 (对每一个固定的值 y) 且有对变量 y 的有界的导数 $f'_y(x,y)$, 则此函数对变量 x 和 y 的总体是连续的.

在下列问题中求所列偏导数:

验证等式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

3230.1. 设

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

证明:

$$f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0).$$

3230.2. 设

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 > 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

是否存在 $f''_{xy}(0,0)$?

3231. 设 $u = f(x,y,z)$ 为 n 次齐次函数, 就下列各题验证关于齐次函数的欧拉定理:

(a) $u = (x-2y+3z)^2$; (b) $u = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; (c) $u = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{y}{x}}$.

3232. 证明: 若可微函数 $u = f(x,y,z)$ 满足方程

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = nu,$$

则它为 n 次齐次函数.

提示: 研究辅助函数

$$F(t) = \frac{f(tx,ty,tz)}{t^n}.$$

3233. 证明: 若 $f(x,y,z)$ 是可微的 n 次齐次函数, 则其偏导数 $f'_x(x,y,z)$, $f'_y(x,y,z)$, $f'_z(x,y,z)$ 是 $n-1$ 次齐次函数.

3234. 设 $u = f(x,y,z)$ 是二阶可微的 n 次齐次函数, 证明:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = n(n-1)u.$$

求下列函数的一阶和二阶微分 (x, y, z 为自变量):

3235. $u = x^m y^n$.

3236. $u = \dfrac{x}{y}$.

3237. $u = \sqrt{x^2+y^2}$.

3238. $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$.

3239. $u = \mathrm{e}^{xy}$.

3240. $u = xy+yz+zx$.

3241. $u = \dfrac{z}{x^2+y^2}$.

3242. 设 $f(x,y,z) = \sqrt[z]{\dfrac{x}{y}}$, 求 $\mathrm{d}f(1,1,1)$ 及 $\mathrm{d}^2 f(1,1,1)$.

3243. 证明: 若 $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 则 $\mathrm{d}^2 u \geqslant 0$.

3244. 假设 x, y 的绝对值很小, 对下列各式推出近似公式:

求 Δu, 若 (a) $u=\sin x\cosh y$; (b) $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

3282. 设

$$\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2,\quad \Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

求 $\Delta_1 u$ 和 $\Delta_2 u$, 若 (a) $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$; (b) $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

求下列复合函数的一阶和二阶导数:

3283. $u=f(x^2+y^2+z^2)$.

3284. $u=f\left(x,\dfrac{x}{y}\right)$.

3285. $u=f(x,xy,xyz)$.

3286. 设 $u=f(x+y,xy)$, 求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

3287. 设 $u=f(x+y+z,x^2+y^2+z^2)$, 求 $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

求下列复合函数的一阶和二阶全微分 (x,y 及 z 为自变量):

3288. $u=f(t)$, 其中 $t=x+y$.

3289. $u=f(t)$, 其中 $t=\dfrac{y}{x}$.

3290. $u=f(\sqrt{x^2+y^2})$.

3291. $u=f(t)$, 其中 $t=xyz$.

3292. $u=f(x^2+y^2+z^2)$.

3293. $u=f(\xi,\eta)$, 其中 $\xi=ax,\eta=by$.

3294. $u=f(\xi,\eta)$, 其中 $\xi=x+y,\eta=x-y$.

3295. $u=f(\xi,\eta)$, 其中 $\xi=xy,\eta=\dfrac{x}{y}$.

3296. $u=f(x+y,z)$.

3297. $u=f(x+y+z,x^2+y^2+z^2)$.

3298. $u=f\left(\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{z}\right)$.

3299. $u=f(x,y,z)$, 其中 $x=t,y=t^2,z=t^3$.

3300. $u=f(\xi,\eta,\zeta)$, 其中 $\xi=ax,\eta=by,\zeta=cz$.

3301. $u=f(\xi,\eta,\zeta)$, 其中 $\xi=x^2+y^2,\eta=x^2-y^2,\zeta=2xy$.

求 $\mathrm{d}^n u$, 设:

3302. $u=f(ax+by+cz)$.

3303. $u=f(ax,by,cz)$.

3304. $u=f(\xi,\eta,\zeta)$, 其中

$$\xi=a_1x+b_1y+c_1z,\quad \eta=a_2x+b_2y+c_2z,\quad \zeta=a_3x+b_3y+c_3z.$$

3305. 设 $u=f(r)$, 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 和 f 为二阶可微的函数. 证明:

$$\Delta u=F(r),$$

其中 $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, Δ 为拉普拉斯算子, 并求函数 F.

3306. 设 u 和 v 为二阶可微的函数, Δ 为拉普拉斯算子 (参阅习题 3305). 证明:

$$\Delta(uv)=u\Delta v+v\Delta u+2\Delta(u,v),$$

其中

$$\Delta(u,v)=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}.$$

3307. 证明: 函数

$$u = \ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

(a 和 b 为常数) 满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

3308. 证明: 若函数 $u=u(x,y)$ 满足拉普拉斯方程 (参阅习题 3307), 则函数

$$v = u\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

也满足此方程.

3309. 证明: 函数

$$u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$$

(a 和 b 为常数) 满足热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

3310. 证明: 若函数 $u=u(x,t)$ 满足热传导方程 (参阅 3309 题), 则函数

$$v=\frac{1}{a\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}u\left(\frac{x}{a^2t}, -\frac{1}{a^4t}\right)\ (t>0)$$

也满足该方程.

3311. 证明: 函数

$$u=\frac{1}{r}\quad (\text{式中 } r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2})$$

当 $r\neq 0$ 时满足拉普拉斯方程

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

3312. 证明: 若函数 $u=u(x,y,z)$ 满足拉普拉斯方程 (参阅 3311 题), 则函数

$$v=\frac{1}{r}u\left(\frac{k^2x}{r^2}, \frac{k^2y}{r^2}, \frac{k^2z}{r^2}\right)$$

(式中 k 为常数, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$) 也满足该方程.

3313. 证明: 函数

$$u=\frac{C_1\mathrm{e}^{-ar}+C_2\mathrm{e}^{ar}}{r}$$

(式中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, C_1, C_2 为常数) 满足亥姆霍兹方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=a^2u.$$

3314. 设函数 $u_1=u_1(x,y,z)$ 及 $u_2=u_2(x,y,z)$ 满足拉普拉斯方程 $\Delta u=0$. 证明: 函数

$$v=u_1(x,y,z)+(x^2+y^2+z^2)u_2(x,y,z)$$

满足双调和方程

$$\Delta(\Delta v)=0.$$

3315. 设 $f(x,y,z)$ 是 m 阶可微的 n 次齐次函数. 证明:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(x,y,z)=n(n-1)\cdots(n-m+1)f(x,y,z).$$

3316. 若

$$z = \sin y + f(\sin x - \sin y),$$

其中 f 为可微函数, 试简化表达式

$$\sec x \frac{\partial z}{\partial x} + \sec y \frac{\partial z}{\partial y}.$$

3317. 证明: 函数

$$z = x^n f\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

(其中 f 为任意的可微函数) 满足方程

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = nz.$$

3318. 证明:

$$z = yf(x^2 - y^2)$$

(其中 f 为任意的可微函数) 满足方程

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = xz.$$

3319. 若

$$u = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3(y+z) + \frac{1}{2}x^2yz + f(y-x, z-x),$$

其中 f 为可微函数, 试简化表达式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}.$$

3320. 设

$$x^2 = vw, \quad y^2 = uw, \quad z^2 = uv,$$

$$f(x,y,z) = F(u,v,w),$$

证明:

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = uF'_u + vF'_v + wF'_w.$$

假定任意函数 φ, ψ 等为足够多次可微的函数, 验证下列等式:

3321. $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, 若 $z = \varphi(x^2+y^2)$.

3322. $x^2\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$, 若 $z = \frac{y^2}{3x} + \varphi(xy)$.

3323. $(x^2-y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = xyz$, 若 $z = \mathrm{e}^y\varphi\left(y\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$.

3324. $x\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha y\frac{\partial u}{\partial y} + \beta z\frac{\partial u}{\partial z} = nu$, 若 $u = x^n\varphi\left(\frac{y}{x^\alpha}, \frac{z}{x^\beta}\right)$.

3325. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = u + \frac{xy}{z}$, 若 $u = \frac{xy}{z}\ln x + x\varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$.

3326. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, 若 $u = \varphi(x-at) + \psi(x+at)$.

3327. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, 若 $u=x\varphi(x+y)+y\psi(x+y)$.

3328. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, 若 $u=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+x\psi\left(\frac{y}{x}\right)$.

3329. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=n(n-1)u$, 若 $u=x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+x^{1-n}\psi\left(\frac{y}{x}\right)$.

3330. $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, 若 $u=\varphi\left[x+\psi(y)\right]$.

用逐次微分的方法消去任意函数 φ 和 ψ:

3331. $z=x+\varphi(xy)$.

3332. $z=x\varphi\left(\frac{x}{y^2}\right)$.

3333. $z=\varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

3334. $u=\varphi(x-y,y-z)$.

3335. $u=\varphi\left(\frac{x}{y},\frac{y}{x}\right)$.

3336. $z=\varphi(x)+\psi(y)$.

3337. $z=\varphi(x)\psi(y)$.

3338. $z=\varphi(x+y)+\psi(x-y)$.

3339. $z=x\varphi\left(\frac{x}{y}\right)+y\psi\left(\frac{x}{y}\right)$.

3340. $z=\varphi(xy)+\psi\left(\frac{x}{y}\right)$.

3341. 求函数

$$z=x^2-y^2$$

在点 $M(1,1)$ 沿与 Ox 轴的正向组成角 $\alpha=60^\circ$ 的方向 l 的导数.

3342. 求函数

$$z=x^2-xy+y^2$$

在点 $M(1,1)$ 沿与 Ox 轴的正向组成 α 角的方向 l 的导数. 在怎样的方向上此导数: (a) 有最大值; (b) 有最小值; (c) 等于 0.

3343. 求函数

$$z=\ln(x^2+y^2)$$

在点 $M(x_0,y_0)$ 沿与过此点的等值线垂直方向的导数.

3344. 求函数

$$z=1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$$

在点 $M\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 沿曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在此点的内法线方向的导数.

3345. 求函数

$$u=xyz$$

在点 $M(1,1,1)$ 沿方向 $l\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 的导数. 函数在该点的梯度的大小是什么?

3346. 求函数

$$u=\frac{1}{r}$$

(式中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$) 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的梯度的大小和方向.

3347. 求函数

$$u = x^2 + y^2 - z^2$$

在点 $A(\varepsilon, 0, 0)$ 及 $B(0, \varepsilon, 0)$ 二点的梯度之间的角度.

3348. 函数

$$u = x + y + z$$

和

$$v = x + y + z + 0.001\sin\left(10^6\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

的梯度的大小相差多少?

3349. 证明: 函数

$$u = ax^2 + by^2 + cz^2$$

和

$$v = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2mx + 2ny + 2pz$$

(a, b, c, m, n, p 为常数且 $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$) 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的梯度之间的角度当点 M_0 无限远移时趋于零.

3350. 设 $u = f(x, y, z)$ 为二阶可微的函数. 若 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为方向 l 的方向余弦, 求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial l^2} = \dfrac{\partial}{\partial l}\left(\dfrac{\partial u}{\partial l}\right)$.

3351. 设 $u = f(x, y, z)$ 为二阶可微的函数,

$$l_1\{\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1\}, \quad l_2\{\cos\alpha_2, \cos\beta_2, \cos\gamma_2\}, \quad l_3\{\cos\alpha_3, \cos\beta_3, \cos\gamma_3\}$$

为三个互相垂直的方向. 证明:

(a) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2$;

(b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial l_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial l_2^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial l_3^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

3352. 设 $u = u(x, y)$ 为可微的函数, 且当 $y = x^2$ 时有

$$u(x, y) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = x,$$

求当 $y = x^2$ 时的 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

3353. 设函数 $u = u(x, y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

以及下列条件:

$$u(x, 2x) = x, \quad u'_x(x, 2x) = x^2.$$

求 $u''_{xx}(x, 2x), u''_{xy}(x, 2x), u''_{yy}(x, 2x)$.

假设 $z = z(x, y)$, 解下列方程:

3354. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$. **3355.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$. **3356.** $\dfrac{\partial^n z}{\partial y^n} = 0$.

3357. 假定 $u=u(x,y,z)$ 解方程

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=0.$$

3358. 求方程

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y$$

的解 $z=z(x,y)$, 使它满足条件 $z(x,x^2)=1$.

3359. 求方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$$

的解 $z=z(x,y)$, 使它满足条件 $z(x,0)=1, z'_y(x,0)=x$.

3360. 求方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$$

的解 $z=z(x,y)$, 使它满足条件 $z(x,0)=x, z(0,y)=y^2$.

§3. 隐函数的微分法

1. 存在定理. 设: 1) 函数 $F(x,y,z)$ 在某点 $\widetilde{A}_0(x_0,y_0,z_0)$ 等于零; 2) $F(x,y,z)$ 和 $F'_x(x,y,z)$ 在点 $\widetilde{A}_0$ 的邻域内有定义并且是连续的; 3) $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$, 则在点 $A_0(x_0,y_0)$ 的某充分小邻域内存在唯一的单值连续函数

$$z=f(x,y), \tag{1}$$

它满足方程

$$F(x,y,z)=0$$

而且 $z_0=f(x_0,y_0)$.

2. 隐函数的可微性. 若除了上述条件, 还有 4) 函数 $F(x,y,z)$ 在点 $\widetilde{A}_0(x_0,y_0,z_0)$ 的邻域内可微, 则函数 (1) 在点 $A_0(x_0,y_0)$ 的邻域内也可微, 并且它的导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 可从方程

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0 \tag{2}$$

求得. 若函数 $F(x,y,z)$ 任意多次可微, 则采用对方程 (2) 逐次微分的方法也可计算函数 z 的高阶导数.

3. 由方程组定义的隐函数. 设函数 $F_i(x_1,\cdots,x_m;y_1,\cdots,y_n)(i=1,2,\cdots,n)$ 满足下列条件:

(1) 在点 $\widetilde{A}_0(x_{10},\cdots,x_{m0};y_{10},\cdots,y_{n0})$ 等于零;

(2) 在点 $\widetilde{A}_0$ 的邻域内可微;

(3) 在点 $\widetilde{A}_0$ 函数行列式 $\dfrac{\partial(F_1,\cdots,F_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)}\neq 0$.

在这种情况下, 方程组

$$F_i(x_1,\cdots,x_m;y_1,\cdots,y_n)=0\quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{3}$$

在点 $A_0(x_{10},\cdots,x_{m0})$ 的某邻域内唯一地确定出一组单值可微函数

$$y_i=f(x_1,\cdots,x_m)\quad (i=1,2,\cdots,n),$$

它们满足方程 (3) 及初始条件

$$f_i(x_{10},\cdots,x_{m0})=y_{i0}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

这些隐函数的微分可由以下方程组求得[①]:

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial y_k}\,\mathrm{d}y_k=0\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

3361. 证明: 在每一点都不连续的狄利克雷函数

$$y(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

满足方程 $y^2-y=0$.

3362. 设函数 $f(x)$ 定义于区间 (a,b) 内. 在怎样的情况下, 方程

$$f(x)y=0$$

在 $a<x<b$ 时有唯一连续的解 $y=0$?

3363. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义且连续. 在怎样的情况下, 方程

$$f(x)y=g(x)$$

在区间 (a,b) 内有唯一连续的解?

3364. 已知方程

$$x^2+y^2=1,\tag{1}$$

设

$$y=y(x)\quad(-1\leqslant x\leqslant 1)\tag{2}$$

为满足方程 (1) 的单值函数.

1) 有多少单值函数 (2) 满足方程 (1)?

2) 有多少单值连续函数 (2) 满足方程 (1)?

3) 设: (a) $y(0)=1$; (b) $y(1)=0$, 则有多少单值连续函数 (2) 满足方程 (1)?

3365. 已知方程

$$x^2=y^2,\tag{1}$$

设

$$y=y(x)\quad(-\infty<x<+\infty)\tag{2}$$

是满足方程 (1) 的单值函数.

1) 有多少单值函数 (2) 满足方程 (1)?

2) 有多少单值连续函数 (2) 满足方程 (1)?

3) 有多少单值可微函数 (2) 满足方程 (1)?

4) 设: (a) $y(1)=1$; (b) $y(0)=0$, 则有多少单值连续函数 (2) 满足方程 (1)?

[①] 在陈述本节大多数题目时, 无条件地假定隐函数和它们的相应导数存在的条件满足.

5) 设 $y(1)=1$, 且 δ 为充分小的数, 则有多少单值连续函数 $y=y(x)$ $(1-\delta<x<1+\delta)$ 满足方程 (1)?

3366. 方程

$$x^2+y^2=x^4+y^4$$

定义出多值函数 $y(x)$. 函数在怎样的区域内: 1) 单值, 2) 有二个值, 3) 有三个值, 4) 有四个值? 求此函数的分支点及单值连续的各分支.

3367. 求由方程

$$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$$

定义的多值函数 y 的分支点和单值连续的各分支 $y=y(x)(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

3368. 设函数 $f(x)$ 当 $a<x<b$ 时连续, 函数 $\varphi(y)$ 当 $c<y<d$ 时单调增加而且连续. 在怎样的条件下, 方程

$$\varphi(y)=f(x)$$

定义出单值函数

$$y=\varphi^{-1}(f(x))?$$

研究例子: (a) $\sin y+\sinh y=x$; (b) $\mathrm{e}^{-y}=-\sin^2 x$.

3369. 设

$$x=y+\varphi(y), \tag{1}$$

其中 $\varphi(0)=0$, 且当 $-a<y<a$ 时 $|\varphi'(y)|\leqslant k<1$. 证明: 当 $-\varepsilon<x<\varepsilon$ 时存在唯一的可微函数 $y=y(x)$ 满足方程 (1) 且 $y(0)=0$.

3370. 设 $y=y(x)$ 为由方程

$$x=ky+\varphi(y)$$

定义的隐函数, 其中常数 $k\neq 0$, $\varphi(y)$ 为以 ω 为周期的周期函数, 且 $|\varphi'(y)|<|k|$. 证明:

$$y=\frac{x}{k}+\psi(x),$$

其中 $\psi(x)$ 为以 $|k|\omega$ 为周期的周期函数.

对于由下列各方程定义的函数 y, 求 y' 和 y'':

3371. $x^2+2xy-y^2=a^2$.

3372. $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$.

3373. $y-\varepsilon\sin y=x$ $(0<\varepsilon<1)$.

3374. $x^y=y^x$ $(x\neq y)$.

3375. $y=2x\arctan\dfrac{y}{x}$.

3376. 证明: 若

$$1+xy=k(x-y),$$

式中 k 为常数, 则成立等式

$$\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}.$$

3377. 证明: 若

$$x^2y^2+x^2+y^2-1=0,$$

则当 $xy>0$ 时成立等式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}+\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^4}}=0.$$

3378. 证明: 方程

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\ (a\neq 0)$$

在点 $x=0, y=0$ 的邻域中定义出两个可微函数: $y=y_1(x)$ 和 $y=y_2(x)$. 求 $y_1'(0)$ 及 $y_2'(0)$.

3379. 设

$$(x^2+y^2)^2=3x^2y-y^3,$$

求 y' 当 $x=0$ 和 $y=0$ 时的值.

3380. 设 $x^2+xy+y^2=3$, 求 y', y'' 及 y'''.

3381. 设

$$x^2-xy+2y^2+x-y-1=0,$$

求 y', y'' 及 y''' 当 $x=0, y=1$ 时的值.

3382. 证明: 对于二次曲线

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$$

成立等式

$$\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\left[(y'')^{-\frac{2}{3}}\right]=0.$$

求函数 $z=z\ (x,y)$ 的一阶和二阶偏导数, 设:

3383. $x^2+y^2+z^2=a^2$.

3384. $z^3-3xyz=a^3$.

3385. $x+y+z=\mathrm{e}^z$.

3386. $z=\sqrt{x^2-y^2}\cdot\tan\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

3387. $x+y+z=\mathrm{e}^{-(x+y+z)}$.

3388. 设

$$x^2+y^2+z^2-3xyz=0 \tag{1}$$

且

$$f(x,y,z)=xy^2z^3.$$

求 $f_x'(1,1,1)$, 若: (a) $z=z(x,y)$ 是由方程 (1) 定义的隐函数, (b) 若 $y=y(x,z)$ 是由方程 (1) 定义的隐函数. 说明为什么这些导数相异.

3389. 设 $x^2+2y^2+3z^2+xy-z-9=0$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 当 $x=1, y=-2, z=1$ 时的值.

求 $\mathrm{d}z$ 和 d^2z, 设

3390. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

3391. $xyz=x+y+z$.

3392. $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}+1$.

3393. $z=x+\arctan\dfrac{y}{z-x}$.

3394. 设 $u^3-3(x+y)u^2+z^3=0$, 求 $\mathrm{d}u$.

3395. 设 $F(x+y+z,x^2+y^2+z^2)=0$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

3396. 设 $F(x-y,y-z,z-x)=0$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

3397. 设 $F(x,x+y,x+y+z)=0$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

3398.1. 设 $F(xz,yz)=0$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

3398.2. 设 (a) $F(x+z,y+z)=0$; (b) $F\left(\dfrac{x}{z},\dfrac{y}{z}\right)=0$, 求 d^2z.

3399. 设 $z=z(x,y)$ 为由方程 $z^3-xz+y=0$ 定义的可微函数, 且当 $x=3,y=-2$ 时 $z=2$. 求 $\mathrm{d}z(3,-2)$ 和 $\mathrm{d}^2z(3,-2)$.

3400. 设 $x=x(y,z),y=y(x,z),z=z(x,y)$ 为由方程 $F(x,y,z)=0$ 定义的函数. 证明:

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=-1.$$

3401. 设 $x+y+z=0,x^2+y^2+z^2=1$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$.

3402. (a) 设 $x^2+y^2=\dfrac{1}{2}z^2,x+y+z=2$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z},\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z},\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}z^2}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}$ 当 $x=1,y=-1,z=2$ 时的值.

(b) 设 $xu-yv=0,yu+xv=1$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

3403. 设由方程组

$$\begin{cases} x\mathrm{e}^{u+v}+2uv=1,\\ y\mathrm{e}^{u-v}-\dfrac{u}{1+v}=2x \end{cases}$$

定义的可微函数 $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$ 满足 $u(1,2)=0$ 和 $v(1,2)=0$, 求 $\mathrm{d}u(1,2)$ 和 $\mathrm{d}v(1,2)$.

3404. 设 $u+v=x+y$, $\dfrac{\sin u}{\sin v}=\dfrac{x}{y}$, 求 $\mathrm{d}u,\mathrm{d}v,\mathrm{d}^2u$ 和 d^2v.

3405. 设

$$\mathrm{e}^{\frac{u}{x}}\cos\frac{v}{y}=\frac{x}{\sqrt{2}},\quad \mathrm{e}^{\frac{u}{x}}\sin\frac{v}{y}=\frac{y}{\sqrt{2}},$$

求 $\mathrm{d}u,\mathrm{d}v,\mathrm{d}^2u$ 和 d^2v 当 $x=1,y=1,u=0,v=\dfrac{\pi}{4}$ 时的表达式.

3406. 设

$$x=t+t^{-1},\quad y=t^2+t^{-2},\quad z=t^3+t^{-3},$$

求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 和 $\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}$.

3407. 在 Oxy 平面上怎样的区域内, 方程组

$$x = u + v, \quad y = u^2 + v^2, \quad z = u^3 + v^3$$

(式中参数 u 和 v 取一切可能的实数值) 定义 z 为变量 x 和 y 的函数? 求导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

3408. (a) 设

$$\begin{cases} x = u + \ln v, \\ y = v - \ln u, \\ z = 2u + v, \end{cases}$$

求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial x}{\partial y}$ 在点 $u = 1, v = 1$ 的值.

(b) 设

$$\begin{cases} x = u + v^2, \\ y = u^2 - v^3, \\ z = 2uv, \end{cases}$$

求 $\frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y}$ 在点 $u = 2, v = 1$ 的值.

(c) 设 $x = \cos\varphi\cos\psi, y = \cos\varphi\sin\psi, z = \sin\varphi$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

3409. 设 $x = u\cos v, y = u\sin v, z = v$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

3410. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程组

$$\begin{cases} x = \mathrm{e}^{u+v}, \\ y = \mathrm{e}^{u-v}, \\ z = uv \end{cases}$$

(u 及 v 为参数) 定义, 求当 $u = 0$ 及 $v = 0$ 时的 $\mathrm{d}z$ 及 d^2z.

3411. 设 $z = x^2 + y^2$, 其中 $y = y(x)$ 为由方程 $x^2 - xy + y^2 = 1$ 定义的函数, 求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 及 $\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}$.

3412. 设 $u = \frac{x+z}{y+z}$, 其中 z 为由方程 $z\mathrm{e}^z = x\mathrm{e}^x + y\mathrm{e}^y$ 定义的函数, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

3413. 设方程

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v)$$

定义 z 为 x 和 y 的函数. 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

3414. 设

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v),$$

求反函数 $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$ 的一阶和二阶偏导数.

3415. 设 (a) $x=u\cos\dfrac{v}{u}, y=u\sin\dfrac{v}{u}$; (b) $x=e^u+u\sin v, y=e^u-u\cos v$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

3416. 函数 $u=u(x)$ 由方程组

$$\begin{cases} u=f(x,y,z), \\ g(x,y,z)=0, \\ h(x,y,z)=0 \end{cases}$$

定义, 求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}$.

3417. 函数 $u=u(x,y)$ 由方程组

$$\begin{cases} u=f(x,y,z,t), \\ g(y,z,t)=0, \\ h(z,t)=0 \end{cases}$$

定义, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

3418. 设

$$x=f(u,v,w), \quad y=g(u,v,w), \quad z=h(u,v,w),$$

求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

3419. 设函数 $z=z(x,y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} f(x,y,z,t)=0, \\ g(x,y,z,t)=0, \end{cases}$$

式中 t 为参变量, 求 $\mathrm{d}z$.

3420. 设 $u=f(z)$, 其中 $z=z(x,y)$ 为由方程 $z=x+y\varphi(z)$ 定义的隐函数. 证明拉格朗日公式:

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left\{[\varphi(z)]^n\frac{\partial u}{\partial x}\right\}.$$

提示: 对 $n=1$ 证明公式并运用数学归纳法.

3421. 证明: 由方程

$$\Phi(x-az,y-bz)=0 \tag{1}$$

(其中 $\Phi(u,v)$ 是变量 u,v 的任意可微函数, a 和 b 为常数) 定义的函数 $z=z(x,y)$ 为方程

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$$

的解. 说明曲面 (1) 的几何性质.

3422. 证明: 由方程

$$\Phi\left(\frac{x-x_0}{z-z_0}, \frac{y-y_0}{z-z_0}\right)=0 \tag{2}$$

(其中 $\Phi(u,v)$ 是变量 u 和 v 的任意可微函数) 定义的函数 $z=z(x,y)$ 满足方程

$$(x-x_0)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial z}{\partial y}=z-z_0.$$

说明曲面 (2) 的几何性质.

3423. 证明: 由方程

$$ax+by+cz=\Phi(x^2+y^2+z^2) \tag{3}$$

(其中 $\Phi(u)$ 是变量 u 的任意可微函数, a,b 和 c 为常数) 定义的函数 $z=z(x,y)$ 满足方程

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay.$$

说明曲面 (3) 的几何性质.

3424. 函数 $z=z(x,y)$ 由方程

$$x^2+y^2+z^2=yf\left(\frac{z}{y}\right)$$

给出, 证明:

$$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz.$$

3425. 函数 $z=z(x,y)$ 由方程

$$F(x+zy^{-1},y+zx^{-1})=0$$

给出. 证明:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy.$$

3426. 证明: 由方程组

$$\begin{cases}x\cos\alpha+y\sin\alpha+\ln z=f(\alpha),\\ -x\sin\alpha+y\cos\alpha=f'(\alpha)\end{cases}$$

(其中 $\alpha=\alpha(x,y)$ 为参变量, $f(\alpha)$ 为任意可微函数) 定义的函数 $z=z(x,y)$ 满足方程

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=z^2.$$

3427. 证明: 由方程组

$$\begin{cases}z=\alpha x+\dfrac{y}{\alpha}+f(\alpha),\\ 0=x-\dfrac{y}{\alpha^2}+f'(\alpha)\end{cases}$$

给出的函数 $z=z(x,y)$ 满足方程

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=1.$$

3428. 证明: 由方程组

$$\begin{cases}[z-f(\alpha)]^2=x^2(y^2-\alpha^2),\\ [z-f(\alpha)]\,f'(\alpha)=\alpha x^2\end{cases}$$

给出的函数 $z=z(x,y)$ 满足方程

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=xy.$$

3429. 证明: 由方程组

$$\begin{cases} z = \alpha x + y\varphi(\alpha) + \psi(\alpha), \\ 0 = x + y\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha) \end{cases}$$

给出的函数 $z = z(x, y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0.$$

3430. 证明: 由方程

$$y = x\varphi(z) + \psi(z)$$

定义的隐函数 $z = z(x, y)$ 满足方程

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

§4. 变量代换

1. 在含有导数的表达式中的变量代换. 设在微分表达式

$$A = \Phi(x, y, y'_x, y''_{xx}, \cdots)$$

中需要把 x, y 换为新的变量 t (自变量) 及 u (函数), 这些变量与旧变量 x, y 之间的关系由方程

$$x = f(t, u), \quad y = g(t, u) \tag{1}$$

给出. 把方程 (1) 微分, 便有

$$y'_x = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial t} + \dfrac{\partial g}{\partial u}u'_t}{\dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial u}u'_t}.$$

类似地可表示出高阶导数 $y''_{xx}, \cdots$ 结果得

$$A = \Phi_1(t, u, u'_t, u''_{tt}, \cdots).$$

2. 在含有偏导数的表达式中自变量的代换. 若在表达式

$$B = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \cdots\right)$$

中令

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \tag{2}$$

其中 u 和 v 为新的自变量, 则偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \cdots$ 由下列方程确定:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v}, \quad \cdots$$

3. 在含有偏导数的表达式中自变量和函数的代换. 在更一般的情况下, 设有方程

$$x = f(u, v, w), \quad y = g(u, v, w), \quad z = h(u, v, w), \tag{3}$$

其中 u, v 为新的自变量, $w = w(u, v)$ 为新的函数, 则对于偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \cdots$ 得到这样的方程:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right) = \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right) = \frac{\partial h}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}, \quad \cdots$$

在某些情况下, 使用全微分法进行变量代换是方便的.

3431. 把 y 看作新的自变量, 变换方程

$$y'y''' - 3y''^2 = x.$$

3432. 用同样的方法变换方程

$$y'^2y^{(4)} - 10y'y''y''' + 15y''^3 = 0.$$

3433. 把 x 看作函数, 把 $t = xy$ 看作自变量, 变换方程

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0.$$

引入新变量, 变换下列常微分方程:

3434. $x^2y'' + xy' + y = 0$, 若 $x = \mathrm{e}^t$.

3435. $y''' = \dfrac{6y}{x^3}$, 若 $t = \ln|x|$.

3436. $(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$, 若 $x = \cos t$.

3437. $y'' + y'\tanh x + \dfrac{m^2}{\cosh^2 x}y = 0$, 若 $x = \ln\tan\dfrac{t}{2}$.

3438. $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, 若 $y = u\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(\xi)\,\mathrm{d}\xi}$, 其中 $p(x) \in C^{(1)}$.

3439. $x^4y'' + xyy' - 2y^2 = 0$, 若 $x = \mathrm{e}^t$, $y = u\mathrm{e}^{2t}$, 其中 $u = u(t)$.

3440. $(1+x^2)^2y'' = y$, 若 $x = \tan t, y = \dfrac{u}{\cos t}$, 其中 $u = u(t)$.

3441. $(1-x^2)^2y'' = -y$, 若 $x = \tanh t, y = \dfrac{u}{\cosh t}$, 其中 $u = u(t)$.

3442. $y'' + (x+y)(1+y')^3 = 0$, 若 $x = u+t, y = u-t$, 其中 $u = u(t)$.

3443. $y''' - x^3y'' + xy' - y = 0$, 若 $x = \dfrac{1}{t}, y = \dfrac{u}{t}$, 其中 $u = u(t)$.

3444. 令

$$u = \frac{y}{x-b}, \quad t = \ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|,$$

并把 u 看作变量 t 的函数, 以变换斯托克斯方程

$$y'' = \frac{Ay}{(x-a)^2(x-b)^2}.$$

3445. 证明: 若方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + q(x)y = 0$$

由代换 $x = \varphi(\xi)$ 变换为方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\xi^2} + P(\xi)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} + Q(\xi)y = 0,$$

即

$$[2P(\xi)Q(\xi) + Q'(\xi)]\,[Q(\xi)]^{-\frac{3}{2}} = [2p(x)q(x) + q'(x)]\,[q(x)]^{-\frac{3}{2}}.$$

3446. 在方程

$$\Phi(y, y', y'') = 0$$

(其中 Φ 为变量 y, y', y'' 的齐次函数) 中令 $y = \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} u\,\mathrm{d}x}$.

3447. 在方程

$$F(x^2y'', xy', y) = 0$$

(其中 F 为其自变量的齐次函数) 中令 $u = x\dfrac{y'}{y}$.

3448. 证明: 方程 $y'''(1+y'^2) - 3y'y''^2 = 0$ 的形式在单应变换

$$x = \frac{a_1\xi + b_1\eta + c_1}{a\xi + b\eta + c}, \quad y = \frac{a_2\xi + b_2\eta + c_2}{a\xi + b\eta + c}$$

下保持不变.

提示: 该变换是由以下最简单的变换构成的:

$$x = \alpha X + \beta Y + \gamma, \quad y = Y;$$
$$X = \frac{1}{X_1}, \quad Y = \frac{Y_1}{X_1};$$
$$X_1 = a\xi + b\eta + c, \quad Y_1 = a_2\xi + b_2\eta + c_2.$$

3449. 证明: 施瓦茨函数

$$S[x(t)] = \frac{x'''(t)}{x'(t)} - \frac{3}{2}\left[\frac{x''(t)}{x'(t)}\right]^2$$

的值在分式线性变换

$$y = \frac{ax(t)+b}{cx(t)+d} \quad (ad - bc \neq 0)$$

下保持不变.

令 $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, 写出下列方程在极坐标 r, φ 下的形式:

3450. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x+y}{x-y}$.

3451. $(xy'-y)^2 = 2xy(1+y'^2)$.

3452. $(x^2+y^2)^2y'' = (x+yy')^3$.

3453. 写出表达式 $\dfrac{x+yy'}{xy'-y}$ 在极坐标下的形式.

3454. 把平面曲线的曲率

$$K = \frac{|y''_{xx}|}{(1+y'^2_x)^{\frac{3}{2}}}$$

用极坐标 r 和 φ 表示出来.

3455. 写出方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y + kx(x^2+y^2), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x + ky(x^2+y^2)$$

在极坐标下的形式.

3456. 引入新函数 $r = \sqrt{x^2+y^2}, \varphi = \arctan\dfrac{y}{x}$, 以便变换表达式

$$W = x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - y\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}.$$

3457. 在勒让德变换中, 曲线 $y = y(x)$ 的每一点 (x, y) 对应于点 (X, Y), 其中

$$X = y', \quad Y = xy' - y.$$

求 Y', Y'' 及 Y'''.

引入新变量 ξ 及 η, 解下列方程:

3458. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}$, 令 $\xi=x+y$ 和 $\eta=x-y$.

3459. $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, 令 $\xi=x$, $\eta=x^2+y^2$.

3460. $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=1\ (a\neq 0)$, 令 $\xi=x,\eta=y-bz$.

3461. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$, 令 $\xi=x$ 及 $\eta=\dfrac{y}{x}$.

把 u 与 v 看作新的自变量, 变换下列方程:

3462. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{1+y^2}\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy$, 若 $u=\ln x, v=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$.

3463. $(x+y)\dfrac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, 若 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v=\arctan\dfrac{y}{x}$.

3464. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 若 $u=\dfrac{y}{x}$, $v=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

3465. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{z}$, 若 $u=2x-z^2, v=\dfrac{y}{z}$.

3466. $(x+z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(y+z)\dfrac{\partial z}{\partial y}=x+y+z$, 若 $u=x+z, v=y+z$.

3467. 取

$$\xi=y+z\mathrm{e}^{-x},\quad \eta=x+z\mathrm{e}^{-y}$$

作为新的自变量, 变换表达式

$$(z+\mathrm{e}^x)\frac{\partial z}{\partial x}+(z+\mathrm{e}^y)\frac{\partial z}{\partial y}-(z^2-\mathrm{e}^{x+y}).$$

3468. 令

$$x=uv,\quad y=\frac{1}{2}(u^2-v^2),$$

变换表达式

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

3469. 令 $\xi=x,\eta=y-x,\zeta=z-x$, 变换方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

3470. 取 x 作为函数, 而 y 和 z 作为自变量, 变换方程

$$(x-z)\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

3471. 取 x 作为函数, 而 $u=y-z, v=y+z$ 作为自变量, 变换方程

$$(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y+z)\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

3472. 取 x 作为函数, 而 $u=xz, v=yz$ 作为自变量, 变换表达式

$$A=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

3473. 令 $e^{\xi}=x-u, e^{\eta}=y-u, e^{\zeta}=z-u$, 变换方程

$$(y+z+u)\frac{\partial u}{\partial x}+(x+z+u)\frac{\partial u}{\partial y}+(x+y+u)\frac{\partial u}{\partial z}=x+y+z.$$

在下列方程中, 代入新的变量 u, v, w, 其中 $w=w(u,v)$:

3474. $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z$, 令 $u=x^2+y^2, v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}, w=\ln z-(x+y)$.

3475. $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$, 令 $u=x, v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}, w=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$.

3476. $(xy+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(1-y^2)\frac{\partial z}{\partial y}=x+yz$, 令 $u=yz-x, v=xz-y, w=xy-z$.

3477. $\left(x\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(y\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=z^2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$, 令 $x=ue^{w}, y=ve^{w}, z=we^{w}$.

3478. 令 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}, v=\arctan z, w=x+y+z$, 其中 $w=w(u,v)$, 变换表达式

$$\frac{x-y}{\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}}.$$

3479. 令 $u=xe^{z}, v=ye^{z}, w=ze^{z}$, 其中 $w=w(u,v)$, 变换表达式

$$A=\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}.$$

3480. 令 $\xi=\frac{x}{z}, \eta=\frac{y}{z}, \zeta=z, w=\frac{u}{z}$, 其中 $w=w(\xi,\eta,\zeta)$, 变换方程

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=u+\frac{xy}{z}.$$

令 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$, 写出下列各式在极坐标 r 和 φ 下的形式:

3481. $w=x\frac{\partial u}{\partial y}-y\frac{\partial u}{\partial x}$.

3482. $w=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$.

3483. $w=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$.

3484. $w=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

3485. $w=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

3486. $w=y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)$.

3487. 令 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$, 变换表达式

$$I=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

3488. 引入新的自变量

$$\xi=x-at, \quad \eta=x+at,$$

解方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

取 u 及 v 作新的自变量, 变换下列方程:

3489. $2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$, 设 $u=x+2y+2$ 及 $v=x-y-1$.

3490. $(1+x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(1+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$, 设 $u=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ 及 $v=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$.

3491. $ax^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2bxy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+cy^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ (a,b,c 为常数), 设 $u=\ln x, v=\ln y$.

3492. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, 设 $u=\frac{x}{x^2+y^2}, v=-\frac{y}{x^2+y^2}$.

3493. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+m^2z=0$, 设 $x=\mathrm{e}^u\cos v, y=\mathrm{e}^u\sin v$.

3494. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}$ $(y>0)$, 设 $u=x-2\sqrt{y}$ 及 $v=x+2\sqrt{y}$.

3495. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, 设 $u=xy, v=\frac{x}{y}$.

3496. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, 设 $u=x+y, v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

3497. $xy\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+xy\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0$, 设 $u=\frac{1}{2}(x^2+y^2), v=xy$.

3498. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2x\sin y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\sin^2 y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, 设 $u=x\tan\frac{y}{2}, v=x$.

3499. $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ $(x>0, y>0)$, 设 $x=(u+v)^2$ 及 $y=(u-v)^2$.

3500. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)^3$, 设 $u=x$ 及 $v=y+z$.

3501. 利用线性变换

$$\xi=x+\lambda_1 y,\quad \eta=x+\lambda_2 y,$$

把方程

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

(其中 A,B 和 C 为常数, 且 $AC-B^2<0$) 变换为以下形式:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0.$$

求满足方程 (1) 的函数的一般形式.

3502. 证明: 拉普拉斯方程

$$\Delta z\equiv\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

的形式在满足条件

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{\partial\psi}{\partial v},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial v}=-\frac{\partial\psi}{\partial u}$$

的任何非退化变换

$$x = \varphi(u,v), \quad y = \psi(u,v)$$

下保持不变.

3503. 令 $u = f(r)$, 其中 $r = \sqrt{x^2+y^2}$, 变换方程:

(a) $\Delta u \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$;　　(b) $\Delta(\Delta u) = 0$.

3504. 若令

$$w = f(u)$$

其中 $u = (x-x_0)(y-y_0)$, 则方程

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + cw = 0$$

化为何种形式?

3505. 令

$$x + y = X, \quad y = XY,$$

变换表达式

$$A = x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}.$$

3506. 证明: 方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy^2\frac{\partial z}{\partial x} + 2(y-y^3)\frac{\partial z}{\partial y} + x^2y^2z = 0$$

的形式在变换

$$x = uv, \quad y = \frac{1}{v}$$

下保持不变.

3507. 证明: 方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

的形式在变换

$$u = x + z, \quad v = y + z$$

下保持不变.

3508. 令

$$x = \eta\zeta, \quad y = \xi\zeta, \quad z = \xi\eta,$$

变换方程

$$xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + yz\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + xz\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0.$$

3509. 令

$$y_1 = x_2 + x_3 - x_1, y_2 = x_1 + x_3 - x_2, y_3 = x_1 + x_2 - x_3,$$

变换方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_3} = 0.$$

3510. 令

$$\xi = \frac{y}{x}, \quad \eta = \frac{z}{x}, \quad \zeta = y - z,$$

变换方程

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2xz\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+2yz\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=0.$$

提示: 把方程写为 $A^2u-Au=0$ 的形式, 其中

$$A=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}.$$

3511. 令

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta,$$

把表达式

$$\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2,\quad \Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

变换为球坐标下的形式.

提示: 变换由两个特殊的变换构成:

$$x=R\cos\varphi,\quad y=R\sin\varphi,\quad z=z;$$
$$R=r\sin\theta,\quad \varphi=\varphi,\quad z=r\cos\theta.$$

3512. 引入新函数 w, 令 $w=z^2$, 变换方程

$$z\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

取 u 和 v 为新的自变量, 而 $w=w(u,v)$ 为新函数, 变换下列方程:

3513. $y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2}{x}$, 设 $u=\dfrac{x}{y}, v=x, w=xz-y$.

3514. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, 设 $u=x+y, v=\dfrac{y}{x}, w=\dfrac{z}{x}$.

3515. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, 设 $u=x+y, v=x-y, w=xy-z$.

3516. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial x}=z$, 设 $u=\dfrac{x+y}{2}, v=\dfrac{x-y}{2}, w=ze^y$.

3517. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(1+\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, 设 $u=x, v=x+y, w=x+y+z$.

3518. $(1-x^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(1-y^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$, 设 $x=\sin u, y=\sin v, z=e^w$.

3519. $(1-x^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2x\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{1}{4}z=0\ (|x|<1)$, 设

$$u=\frac{1}{2}(y+\arccos x),\quad v=\frac{1}{2}(y-\arccos x),\quad w=z\sqrt[4]{1-x^2}.$$

3520. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\dfrac{x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}}{x^2-y^2}-\dfrac{3(x^2+y^2)z}{(x^2-y^2)^2}\ (|x|>|y|)$, 设

$$u=x+y,\quad v=x-y,\quad w=\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

3521. 证明: 任何方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}+cz=0$$

(a, b, c 为常数) 用代换

$$z = u\mathrm{e}^{\alpha x+\beta y}$$

(其中 α 与 β 为常量, $u=u(x,y)$) 可以化为以下形式:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c_1u=0 \quad (c_1 \text{ 为常数}).$$

3522. 证明: 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial y}$$

的形式在变换

$$x'=\frac{x}{y},\quad y'=-\frac{1}{y},\quad u'=\frac{u}{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4y}}$$

(u' 为变量 x' 与 y' 的函数) 下保持不变.

3523. 令 $u=x+z, v=y+z, w=x+y+z$, 且认为 $w=w(u,v)$, 变换方程

$$q(1+q)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(1+p+q+2pq)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+p(1+p)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

其中 $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}, q=\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

3524. 令 $x=e^{\xi}, y=e^{\eta}, z=e^{\zeta}, u=e^{w}$, 其中 $w=w(\xi,\eta,\xi)$, 变换方程

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(y\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(z\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2.$$

3525. 证明: 方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0$$

的形式与变量 x,y 和 z 所分别但任的角色无关.

3526. 取 x 作为变量 y 和 z 的函数, 解方程

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

3527. 运用勒让德变换

$$X=\frac{\partial z}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial z}{\partial y},\quad Z=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z,$$

其中 $Z=Z(X,Y)$, 变换方程

$$A\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

§5. 几何上的应用

1. 切线和法平面. 曲线

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t)$$

在其上一点 $M(x,y,z)$ 的切线方程为

$$\frac{X-x}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{Y-y}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}=\frac{Z-z}{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}}.$$

在此点的法平面方程为:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(X-x)+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(Y-y)+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(Z-z)=0.$$

2. 切平面和法线. 曲面 $z=f(x,y)$ 在其上一点 $M(x,y,z)$ 的切平面方程为

$$Z-z=\frac{\partial z}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial z}{\partial y}(Y-y).$$

在点 M 处的法线方程为

$$\frac{X-x}{\dfrac{\partial z}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\dfrac{\partial z}{\partial y}}=\frac{Z-z}{-1}.$$

若曲面方程以隐函数的形式 $F(x,y,z)=0$ 给出, 则切平面方程为

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0,$$

法线方程为

$$\frac{X-x}{\dfrac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

3. 平面曲线族的包络线. 含一个参数的曲线族 $f(x,y,\alpha)=0$ (α 为参数) 的包络线满足方程组

$$f(x,y,\alpha)=0,\quad f'_\alpha(x,y,\alpha)=0.$$

4. 曲面族的包络面. 含一个参数的曲面族 $F(x,y,z,\alpha)=0$ 的包络面满足方程组

$$F(x,y,z,\alpha)=0,\quad F'_\alpha(x,y,z,\alpha)=0.$$

含两个参数的曲面族 $\Phi(x,y,z,\alpha,\beta)=0$ 的包络面满足方程组:

$$\Phi(x,y,z,\alpha,\beta)=0,\quad \Phi'_\alpha(x,y,z,\alpha,\beta)=0,\quad \Phi'_\beta(x,y,z,\alpha,\beta)=0.$$

写出下列曲线在已知点的切线和法平面方程:

3528. $x=a\cos\alpha\cos t, y=a\sin\alpha\cos t, z=a\sin t$; 在点 $t=t_0$.

3529. $x=a\sin^2 t, y=b\sin t\cos t, z=c\cos^2 t$; 在点 $t=\dfrac{\pi}{4}$.

3530. $y=x, z=x^2$; 在点 $M(1,1,1)$.

3531. $x^2+z^2=10, y^2+z^2=10$; 在点 $M(1,1,3)$.

3532. $x^2+y^2+z^2=6, x+y+z=0$; 在点 $M(1,-2,1)$.

3533. 在曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上求一点, 此处的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

3534. 证明: 螺旋线 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt$ 的切线与 Oz 轴形成定角.

3535. 证明: 曲线 $x=a\mathrm{e}^t\cos t, y=a\mathrm{e}^t\sin t, z=a\mathrm{e}^t$ 与锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的各母线相交的角度相同.

3536. 证明: 斜驶线

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)=\mathrm{e}^{k\varphi}\quad (k=\text{常数})$$

(其中 φ 是地球上点的经度, ψ 是地球上点的纬度) 与地球的一切子午线相交成定角.

3537. 求曲线

$$z=f(x,y),\quad \frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\sin\alpha}$$

(其中 f 为可微函数) 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 的切线与 Oxy 平面所成角的正切.

3538. 求函数

$$u=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

在点 $M(1,2,-2)$ 沿曲线

$$x=t,\quad y=2t^2,\quad z=-2t^4$$

在此点的切线方向的导数.

写出下列曲面在点 M_0 的切面和法线方程:

3539. $z=x^2+y^2; M_0(1,2,5)$.　　**3540.** $x^2+y^2+z^2=169; M_0(3,4,12)$.

3541. $z=\arctan\dfrac{y}{x};\ M_0\left(1,1,\dfrac{\pi}{4}\right)$.　　**3542.** $ax^2+by^2+cz^2=1;\ M_0(x_0,y_0,z_0)$.

3543. $z=y+\ln\dfrac{x}{z};\ M_0(1,1,1)$.　　**3544.** $2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}=8;\ M_0(2,2,1)$.

3545. $x=a\cos\psi\cos\varphi, y=b\cos\psi\sin\varphi, z=c\sin\psi;\ M_0(\varphi_0,\psi_0)$.

3546. $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi, z=r\cot\alpha;\ M_0(\varphi_0,r_0)$.

3547. $x=u\cos v, y=u\sin v, z=av;\ M_0(u_0,v_0)$.

3548. 求曲面

$$x=u+v,\quad y=u^2+v^2,\quad z=u^3+v^3$$

的切平面当切点 $M(u,v)(u\neq v)$ 无限接近于曲面的边界线 $u=v$ 上的点 $M_0(u_0,v_0)$ 时的极限位置.

3549. 在曲面

$$x^2+2y^2+3z^2+2xy+2xz+4yz=8$$

上求出切平面平行于坐标平面的诸切点.

3550. 在椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

上怎样的点, 椭球面的法线与各坐标轴成等角?

3551. 求曲面

$$x^2+2y^2+3z^2=21$$

的平行于平面 $x+4y+6z=0$ 的各切平面.

3552. 证明: 曲面 $xyz=a^3\ (a>0)$ 的切平面与坐标面形成体积一定的四面体.

3553. 证明: 曲面

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\ \ (a>0)$$

的切平面在坐标轴上割下的诸线段, 其和为常量.

3554. 证明: 锥面

$$z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$$

的切平面经过其顶点.

3555. 证明: 旋转面

$$z = f(\sqrt{x^2+y^2}) \quad (f' \neq 0)$$

的法线与旋转轴相交.

3556. 求椭球面

$$x^2+y^2+z^2-xy=1$$

在坐标面上的投影.

3557. 分正方形 $\{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ 为直径不大于 δ 的有限个部分 σ. 若曲面

$$z = 1-x^2-y^2$$

在属于同一部分 σ 的任何两点 $P(x,y)$ 及 $P_1(x_1,y_1)$ 的法线方向相差小于 $1°$, 求数 δ 的上界.

3558. 设

$$z = f(x,y), \quad 其中\ (x,y) \in D \tag{1}$$

为曲面的方程, $\varphi(P_1,P)$ 为曲面 (1) 在点 $P(x,y) \in D$ 及 $P_1(x_1,y_1) \in D$ 二点的法线之间的夹角. 证明: 若 D 为有界闭区域, 函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内具有有界的二阶导数, 则李雅普诺夫不等式

$$\varphi(P_1,P) < C\rho(P_1,P) \tag{2}$$

成立, 其中 C 为常数, $\rho(P_1,P)$ 为点 P 与 P_1 之间的距离.

3559. 圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 与曲面 $bz=xy$ 在公共点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 相交成怎样的角?

3560. 证明: 球坐标的坐标面 $x^2+y^2+z^2=r^2, y=x\tan\varphi, x^2+y^2=z^2\tan^2\theta$ 两两正交.

3561. 证明: 球面

$$x^2+y^2+z^2=2ax, \quad x^2+y^2+z^2=2by, \quad x^2+y^2+z^2=2cz$$

形成三重正交坐标系.

3562. 当 $\lambda=\lambda_1, \lambda=\lambda_2, \lambda=\lambda_3$ 时, 经过每一点 $M(x,y,z)$ 有三个二次曲面:

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda^2}+\frac{y^2}{b^2-\lambda^2}+\frac{z^2}{c^2-\lambda^2}=-1 \quad (a>b>c>0).$$

证明: 这些曲面是正交的.

3563. 求函数 $u=x+y+z$ 沿球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的外法线方向的导数. 在球面上怎样的点, 函数 u 的上述法向导数有: (a) 最大值, (b) 最小值, (c) 等于零?

3564. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 沿椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的外法线方向的导数.

3565. 设 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 和 $\dfrac{\partial v}{\partial n}$ 为函数 u 和 v 在曲面 $F(x,y,z)=0$ 上的点的法向导数. 证

明:

$$\frac{\partial}{\partial n}(uv) = u\frac{\partial v}{\partial n} + v\frac{\partial u}{\partial n}.$$

求含一个参变量的平面曲线族的包络线:

3566. $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ ($p =$ 常数).

3567. $(x-a)^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}$.

3568. $y = kx + \frac{a}{k}$ ($a =$ 常数).

3569. $y^2 = 2px + p^2$.

3570. 设有长为 l 的线段, 其两端点沿坐标轴滑动, 求如此产生的线段族的包络线.

3571. 求面积 S 为常数的椭圆族 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的包络线.

3572. 炮弹在真空中以初速度 v_0 射出, 当投射角 α 在竖直平面中变化时, 求炮弹轨迹的包络线.

3573. 证明: 平面曲线的法线的包络线是此曲线的渐屈线.

3574. 研究下列曲线族的判别曲线的性质 (c 是参变量):

(a) 立方抛物线 $y = (x-c)^3$;

(b) 半立方抛物线 $y^2 = (x-c)^3$;

(c) 尼尔抛物线 $y^3 = (x-c)^2$;

(d) 环索线 $(y-c)^2 = x^2\frac{a-x}{a+x}$.

3575. 求半径为 r, 中心在圆周 $x = R\cos t, y = R\sin t, z = 0$ (t 是参数, $R > r$) 上的球族的包络面.

3576. 求球族

$$(x - t\cos\alpha)^2 + (y - t\cos\beta)^2 + (z - t\cos\gamma)^2 = 1$$

(其中 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, t 是参变量) 的包络面.

3577. 求相应体积 V 是常数的椭球面族 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的包络面.

3578. 求半径为 ρ, 中心在圆锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 上的球族的包络面.

3579. 有一发光点位于坐标原点. 若 $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > R^2$, 求由球

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \leqslant R^2$$

投影所生成的阴影圆锥.

3580. 若参量 p 和 q 满足方程

$$p^2 + q^2 = 1,$$

求平面族

$$z - z_0 = p(x-x_0) + q(y-y_0)$$

的包络面.

§6. 泰勒公式

1. 泰勒公式. 若函数 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 的某邻域内有直到 $n+1$ 阶 (包括 $n+1$ 阶) 的连

续偏导数, 则在此邻域内成立公式

$$f(x,y)=f(a,b)+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{i}f(a,b)+R_n(x,y), \tag{1}$$

其中

$$R_n(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1}f(a+\theta_n(x-a),b+\theta_n(y-b))$$
$$(0<\theta_n<1).$$

2. 泰勒级数. 若函数 $f(x,y)$ 无穷次可微且 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x,y)=0$, 则此函数可表示成幂级数的形式:

$$f(x,y)=f(a,b)+\sum_{i+j\geqslant 1}^{\infty}\frac{1}{i!j!}f^{(i+j)}_{x^iy^j}(a,b)(x-a)^i(y-b)^j. \tag{2}$$

在 $a=b=0$ 的特殊情形下, 公式 (1) 和 (2) 分别称为*麦克劳林公式*和*麦克劳林级数*.

对于多于两个变量的函数有类似的公式.

3. 平面曲线的奇点. 若可微曲线 $F(x,y)=0$ 上的点 $M_0(x_0,y_0)$ 满足下列条件:

$$F(x_0,y_0)=0,\quad F'_x(x_0,y_0)=0,\quad F'_y(x_0,y_0)=0,$$

则称此点为奇点. 设 $M_0(x_0,y_0)$ 是属于光滑曲线类 $C^{(2)}$ 的曲线的奇点, 且数

$$A=F''_{xx}(x_0,y_0),\quad B=F''_{xy}(x_0,y_0),\quad C=F''_{yy}(x_0,y_0)$$

不全为零. 于是, 若

(1) $AC-B^2>0$, 则 M_0 是*孤立点*;

(2) $AC-B^2<0$, 则 M_0 是*二重点* (*节点*);

(3) $AC-B^2=0$, 则 M_0 是*上升点*或*孤立点*.

在 $A=B=C=0$ 的情形, 奇点的种类可能更复杂. 至于不属于光滑曲线类 $C^{(2)}$ 的曲线, 奇点还可能有更复杂的本质: *中断点*, *角点*等等.

3581. 在点 $A(1,-2)$ 的邻域内根据泰勒公式展开函数

$$f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5.$$

3582. 在点 $A(1,1,1)$ 的邻域内根据泰勒公式展开函数

$$f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

3583. 当自变量值从 $x=1,y=-1$ 变到 $x_1=1+h,y_1=-1+k$ 时, 求函数 $f(x,y)=x^2y+xy^2-2xy$ 的增量.

3584. 设

$$f(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz,$$

按数 h,k 和 l 的正整数次幂展开 $f(x+h,y+k,z+l)$.

3585. 写出函数

$$f(x,y)=x^y$$

在点 $A(1,1)$ 的邻域内的展开式, 到二次项为止.

3586. 根据麦克劳林公式展开函数

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2},$$

到四次项为止.

3587. 若 $|x|$ 和 $|y|$ 同 1 比较为很小的量, 对于下列表达式

(a) $\dfrac{\cos x}{\cos y}$; (b) $\arctan\dfrac{1+x+y}{1-x+y}$

推出精确到二次项的近似公式.

3588. 假定 x,y,z 的绝对值是很小的量, 简化表达式

$$\cos(x+y+z)-\cos x\cos y\cos z.$$

3589. 按 h 的幂次展开函数

$$F(x,y)=\frac{1}{4}\left[f(x+h,y)+f(x,y+h)+f(x-h,y)+f(x,y-h)\right]-f(x,y),$$

精确到 h^4.

3590. 已知中心在点 $P(x,y)$ 半径为 ρ 的圆周, 设 $f(P)=f(x,y)$ 及 $P_i(x_i,y_i)$ $(i=1,2,3)$ 为该圆周的内接正三角形的顶点, 并且 $x_1=x+\rho, y_1=y$. 按 ρ 的正整数次幂展开函数

$$F(\rho)=\frac{1}{3}\left[f(P_1)+f(P_2)+f(P_3)\right],$$

精确到 ρ^2.

3591. 按 h 与 k 的幂次展开函数

$$\Delta_{xy}f(x,y)=f(x+h,y+k)-f(x+h,y)-f(x,y+k)+f(x,y).$$

3592. 依 ρ 的幂次展开函数

$$F(\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x+\rho\cos\varphi,y+\rho\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

将下列函数展开成麦克劳林级数:

3593. $f(x,y)=(1+x)^m(1+y)^n$.

3594. $f(x,y)=\ln(1+x+y)$.

3595. $f(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y$.

3596. $f(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y$.

3597. $f(x,y)=\sin x\sinh y$.

3598. $f(x,y)=\cos x\cosh y$.

3599. $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$.

3600. $f(x,y)=\ln(1+x)\ln(1+y)$.

3601. 写出函数

$$f(x,y)=\int_0^1(1+x)^{t^2y}\,\mathrm{d}t$$

的麦克劳林级数的前三项.

3602. 按二项式 $x-1$ 和 $y+1$ 的正整数次幂将函数 e^{x+y} 展开成幂级数.

3603. 写出函数 $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ 在点 $M(1,1)$ 的邻域内的泰勒级数展开式.

3604. 设 z 为由方程 $z^3-2xz+y=0$ 定义的 x 和 y 的隐函数, 且当 $x=1$ 和 $y=1$ 时 $z=1$. 写出函数 z 按二项式 $x-1$ 和 $y-1$ 的升幂排列的展开式中的若干项.

研究下列曲线的奇点的种类并大略地画出这些曲线:

3605. $y^2=ax^2+x^3$.

3606. $x^3+y^3-3xy=0$.

3607. $x^2+y^2=x^4+y^4$.

3608. $x^2+y^4=x^6$.

3609. $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

3610. $(y-x^2)^2=x^5$.

3611. $(a+x)y^2=(a-x)x^2$.

3612. 研究参变量 a,b,c $(a\leqslant b\leqslant c)$ 的值与曲线 $y^2=(x-a)(x-b)(x-c)$ 的形状之关系.

研究超越曲线的奇点:

3613. $y^2=1-\mathrm{e}^{-x^2}$.

3614. $y^2=1-\mathrm{e}^{-x^3}$.

3615. $y=x\ln x$.

3616. $y=\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$.

3617. $y=\arctan\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

3618. $y^2=\sin\dfrac{\pi}{x}$.

3619. $y^2=\sin x^2$.

3620. $y^2=\sin^3 x$.

§7. 多元函数的极值

1. 极值的定义. 若函数 $f(P)=f(x_1,\cdots,x_n)$ 在点 P_0 的邻域内有定义, 并且当 $0<\rho(P_0,P)<\delta$ 时, $f(P_0)>f(P)$ 或 $f(P_0)<f(P)$, 则说, 函数 $f(P)$ 在点 P_0 有极值 (相应地为极大值或极小值).

2. 极值的必要条件. 可微函数 $f(P)$ 仅在临界点 P_0, 即 $\mathrm{d}f(P_0)=0$ 的点 P_0 能达到极值. 所以, 函数 $f(P)$ 的极值点满足方程组 $f'_{x_i}(x_1,\cdots,x_n)=0$ $(i=1,\cdots,n)$.

3. 极值的充分条件. 函数 $f(P)$ 在点 P_0 有:

(a) 极大值, 若 $\mathrm{d}f(P_0)=0$, 且当 $\sum\limits_{i=1}^{n}|\mathrm{d}x_i|\neq 0$ 时 $\mathrm{d}^2f(P_0)<0$,

(b) 极小值, 若 $\mathrm{d}f(P_0)=0$, 且当 $\sum\limits_{i=1}^{n}|\mathrm{d}x_i|\neq 0$ 时 $\mathrm{d}^2f(P_0)>0$.

为了研究二阶微分 $\mathrm{d}^2f(P_0)$ 的符号, 可采用相应二次型为标准形式的方法.

特别是, 对于两个自变量 x 和 y 的函数 $f(x,y)$, 若在临界点 (x_0,y_0) $(\mathrm{d}f(x_0,y_0)=0)$ 成立条件 $D=AC-B^2\neq 0$, 其中 $A=f''_{xx}(x_0,y_0), B=f''_{xy}(x_0,y_0), C=f''_{yy}(x_0,y_0)$, 则那里有:

(1) 极小值, 若 $D>0, A>0$ $(C>0)$;

(2) 极大值, 若 $D>0, A<0$ $(C<0)$;

(3) 极值不存在, 若 $D<0$.

4. 条件极值. 在关系式 $\varphi_i(P)=0$ $(i=1,\cdots,m;m<n)$ 存在的条件下, 求函数 $f(P_0)=f$ $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的极值的问题, 可归结为求拉格朗日函数

$$L(P)=f(P)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i(P)$$

的普通极值的问题, 其中 $\lambda_i(i=1,\cdots,m)$ 为常数因子①. 关于条件极值的存在和性质的问题, 在最简单的情况下, 可根据对函数 $L(P)$ 在临界点 P_0 的二阶微分 $\mathrm{d}^2L(P_0)$ 的符号的研究来解决,

① 此方法称为拉格朗日乘子法, 因子 λ_i 称为拉格朗日乘子. —— 译注

此时变量 $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \cdots, \mathrm{d}x_n$ 满足以下限制条件:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j = 0 \quad (i = 1, \cdots, m).$$

5. 绝对极值. 有界闭区域内的可微函数 $f(P)$ 在此区域内或于临界点, 或于区域的边界点达到自己的最大值和最小值.

研究下列多元函数的极值:

3621. $z = x^2 + (y-1)^2$.

3622. $z = x^2 - (y-1)^2$.

3623. $z = (x - y + 1)^2$.

3624. $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$.

3625. $z = x^2y^3(6 - x - y)$.

3626. $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

3627. (a) $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$; (b) $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$.

3628. $z = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y} \quad (x > 0, y > 0)$.

3629. $z = xy\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}} \quad (a > 0, b > 0)$.

3630. $z = \dfrac{ax + by + c}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \quad (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$.

3631. $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

3632. $z = \mathrm{e}^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$.

3633. $z = \mathrm{e}^{x^2 - y}(5 - 2x + y)$.

3634. $z = (5x + 7y - 25)\mathrm{e}^{-(x^2+xy+y^2)}$.

3635. $z = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$.

3636. $z = \sin x + \cos y + \cos(x - y) \quad \left(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}; 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$.

3637. $z = \sin x \sin y \sin(x + y) \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi; 0 \leqslant y \leqslant \pi)$.

3638. $z = x - 2y + \ln\sqrt{x^2 + y^2} + 3\arctan\dfrac{y}{x}$.

3639. $z = xy\ln(x^2 + y^2)$.

3640. $z = x + y + 4\sin x \sin y$.

3641. $z = (x^2 + y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$.

3642. $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$.

3643. $u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$.

3644. $u = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{2}{x} \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$.

3645. $u = xy^2z^3(a - x - 2y - 3z) \quad (a > 0)$.

3646. $u = \dfrac{a^2}{x} + \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{z} + \dfrac{z^2}{b} \quad (x > 0, y > 0, z > 0, a > 0, b > 0)$.

3647. $u = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z) \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi; 0 \leqslant y \leqslant \pi; 0 \leqslant z \leqslant \pi)$.

3648. $u = x_1x_2^2 \cdots x_n^n\,(1 - x_1 - 2x_2 - \cdots - nx_n) \quad (x_1 > 0, x_2 > 0, \cdots, x_n > 0)$.

3649. $u = x_1 + \dfrac{x_2}{x_1} + \dfrac{x_3}{x_2} + \cdots + \dfrac{x_n}{x_{n-1}} + \dfrac{2}{x_n} \quad (x_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n)$.

3650. 惠更斯问题. 在 a 和 b 二正数间插入 n 个数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 使分数

$$u = \frac{x_1x_2\cdots x_n}{(a + x_1)(x_1 + x_2)\cdots(x_n + b)}$$

的值最大.

求变量 x 和 y 的隐函数 z 的极值:

3651. $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$.

3652. $x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2=0$.

3653. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$.

求下列函数的条件极值点:

3654. $z=xy$, 若 $x+y=1$.

3655. $z=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}$, 若 $x^2+y^2=1$.

3656. $z=x^2+y^2$, 若 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

3657. (a) $z=Ax^2+2Bxy+Cy^2$, 若 $x^2+y^2=1$;

(b) $z=x^2+12xy+2y^2$, 若 $4x^2+y^2=25$.

3658. $z=\cos^2 x+\cos^2 y$, 若 $x-y=\dfrac{\pi}{4}$.

3659. $u=x-2y+2z$, 若 $x^2+y^2+z^2=1$.

3660. $u=x^m y^n z^p$, 若 $x+y+z=a$ $(m>0,n>0,p>0,a>0)$.

3661. $u=x^2+y^2+z^2$, 若 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ $(a>b>c>0)$.

3662. $u=xy^2z^3$, 若 $x+2y+3z=a$ $(x>0,y>0,z>0,a>0)$.

3663. (a) $u=xyz$, 若 $x^2+y^2+z^2=1, x+y+z=0$;

(b) $u=xy+yz$, 若 $x^2+y^2=2, y+z=2$ $(x>0,y>0,z>0)$.

3664. $u=\sin x\sin y\sin z$, 若 $x+y+z=\dfrac{\pi}{2}$ $(x>0,y>0,z>0)$.

3665. $u=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$, 若 $x^2+y^2+z^2=1, x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0$ $(a>b>c>0,\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1)$.

3666. $u=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2$, 若 $Ax+By+Cz=0, x^2+y^2+z^2=R^2, \dfrac{\xi}{\cos\alpha}=\dfrac{\eta}{\cos\beta}=\dfrac{\zeta}{\cos\gamma}$, 其中 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

3667. $u=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$, 若 $\dfrac{x_1}{a_1}+\dfrac{x_2}{a_2}+\cdots+\dfrac{x_n}{a_n}=1$ $(a_i>0;i=1,2,\cdots,n)$.

3668. $u=x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p$ $(p>1)$, 若 $x_1+x_2+\cdots+x_n=a$ $(a>0)$.

3669. $u=\dfrac{\alpha_1}{x_1}+\dfrac{\alpha_2}{x_2}+\cdots+\dfrac{\alpha_n}{x_n}$, 若 $\beta_1x_1+\beta_2x_2+\cdots+\beta_nx_n=1$ $(\alpha_i>0,\beta_i>0,x_i>0;i=1,2,\cdots,n)$.

3670. $u=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$, 若 $x_1+x_2+\cdots+x_n=a$ $(a>0,\alpha_i>1,i=1,2,\cdots,n)$.

3671. 在 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=1$ 的条件下, 求二次型 $u=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ $(a_{ij}=a_{ji})$ 的极值.

3672. 若 $n\geqslant 1$ 及 $x\geqslant 0, y\geqslant 0$, 证明不等式: $\dfrac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$.

提示: 在 $x+y=S$ 的条件下, 求函数 $z=\frac{1}{2}(x^n+y^n)$ 的极小值.

3673. 证明赫尔德不等式:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}$$

$$\left(a_i \geqslant 0, x_i \geqslant 0, i=1,2,\cdots,n; k>1, \frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1\right).$$

提示: 在 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i = A$ 的条件下, 求函数

$$u=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}$$

的极小值.

3674. 对于 n 阶行列式 $A=|a_{ij}|$, 证明阿达马不等式:

$$A^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right).$$

提示: 在关系式

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = S_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

存在的条件下, 研究行列式 $A=|a_{ij}|$ 的极值.

求下列函数在指定区域内的上确界 (sup) 和下确界 (inf):

3675. $z=x-2y-3$, 若 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant x+y\leqslant 1$.

3676. $z=x^2+y^2-12x+16y$, 若 $x^2+y^2\leqslant 25$.

3677. $z=x^2-xy+y^2$, 若 $|x|+|y|\leqslant 1$.

3678. $u=x^2+2y^2+3z^2$, 若 $x^2+y^2+z^2\leqslant 100$.

3679. $u=x+y+z$, 若 $x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1$.

3680. 求函数

$$u=(x+y+z)\mathrm{e}^{-(x+2y+3z)}$$

在区域 $x>0, y>0, z>0$ 内的下确界 (inf) 与上确界 (sup).

3681. 证明: 函数 $z=(1+\mathrm{e}^y)\cos x - y\mathrm{e}^y$ 有无穷多个极大值而无一极小值.

3682. 函数 $f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 有极小值的充分条件是否为此函数在通过点 M_0 的每一条直线上有极小值呢? 研究例子 $f(x,y)=(x-y^2)(2x-y^2)$.

3683. 分解已知正数 a 为 n 个正的因数, 使得它们的倒数的和为最小.

3684. 分解已知正数 a 为 n 个相加数, 使得它们的平方和为最小.

3685. 分解已知正数 a 为 n 个正的因数, 使得它们的已知正数次幂的和为最小.

3686. 已知在平面上的 n 个质点 $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2),\cdots,P_n(x_n,y_n)$, 其质量分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_n$.

点 $P(x, y)$ 位于何处时, 该质点系对此点的转动惯量为最小?

3687. 容积为 V 的无盖长方浴盆在何种尺寸下有最小的表面积?

3688. 横截面为半圆形的无盖柱形浴盆, 其表面积等于 S, 在何种尺寸下此盆有最大的容积?

3689. 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上求一点, 这点到 n 个已知点 $M_i(x_i, y_i, z_i)(i = 1, 2, \cdots, n)$ 距离的平方和为最小.

3690. 底面相同的直圆柱体与直圆锥体拼接在一起构成一个物体, 其总表面积 Q 取给定值. 为了使此物体的体积为最大, 求其尺寸大小.

3691. 一长方体的上下两底均为正方形, 分别与同样的两个正四角锥体拼接在一起构成一个物体, 其体积 V 取给定值. 当四角锥的侧面对它们的底成怎样的倾角时, 该物体的总表面积为最小?

3692. 将周长为 $2p$ 的矩形绕其一边旋转, 矩形所扫过的区域构成一旋转体, 求使该旋转体体积为最大的那个矩形.

3693. 将周长为 $2p$ 的三角形绕其一边旋转, 三角形所扫过的区域构成一旋转体, 求使该旋转体体积为最大的那个三角形.

3694. 在半径为 R 的半球内作出具有最大体积的内接长方体.

3695. 在已知的直圆锥内作出具有最大体积的内接长方体.

3696. 在椭球

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

内作出具有最大体积的内接长方体.

3697. 直圆锥的母线 l 与底面成倾角 α, 试在此直圆锥中作出具有最大全表面积的内接长方体.

3698. 在椭圆抛物面 $\dfrac{z}{c} = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ 和 $z = c$ 所围区域内作出具有最大体积的内接长方体.

3699. 求点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 至平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 上的点的最短距离.

3700. 求空间二直线

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

之间的最短距离.

3701. 求抛物线 $y = x^2$ 和直线 $x - y - 2 = 0$ 之间的最短距离.

3702. 求有心二次曲线

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$$

的半轴.

3703. 求有心二次曲面

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fxz = 1$$

的半轴.

3704. 求用平面

$$Ax + By + Cz = 0$$

与柱体

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$$

相交所成椭圆的面积.

3705. 求用平面

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0$$

(其中 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$) 与椭球

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$$

相交所成截面的面积.

3706. 根据费马原理, 光在最短时间内从一点传播至另一点.

假定这两点位于交界面为平面的不同的光介质中, 并且光的传播速度在第一种介质中等于 v_1, 而在第二种介质中等于 v_2, 试推出光的折射定律.

3707. 一折射棱镜的折射角[①]为 α, 折射率为 n. 光线以怎样的入射角射向此棱镜侧面, 其偏向角 (即入射线与出射线之间的角) 为最小? 求此最小偏向角.

3708. 变量 x 和 y 满足系数待定的线性方程

$$y = ax + b.$$

经过一系列精度相同的测量, 对于量 x 和 y 得到值 $x_i, y_i (i = 1, 2, \cdots, n)$. 利用最小二乘法, 求系数 a 和 b 的最可靠数值.

提示: 根据最小二乘法, 系数 a 和 b 的最可靠数值所对应的误差的平方和

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

为最小.

3709. 在平面上已知 n 个点 $M_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 直线

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

在怎样的位置时, 这些点与此直线的偏差的平方和为最小?

3710. 在区间 (1, 3) 内用线性函数 $ax + b$ 来近似地代替函数 x^2, 使得绝对偏差

$$\Delta = \sup|x^2 - (ax + b)| \quad (1 \leqslant x \leqslant 3)$$

为最小.

[①] 折射棱镜的折射角指两折射面之间的二面角. —— 译注

第七章　带参数的积分

§1. 带参数的常义积分

1. 积分的连续性. 若函数 $f(x,y)$ 在有界区域 $R[a \leqslant x \leqslant A; b \leqslant y \leqslant B]$ 内有定义并且是连续的, 则

$$F(y) = \int_a^A f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

是在闭区间 $b \leqslant y \leqslant B$ 上连续的函数.

2. 积分符号下的微分法. 若除在 1 中所列条件之外, 偏导数 $f'_y(x,y)$ 在区域 R 内连续, 则当 $b < y < B$ 时成立莱布尼茨公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^A f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_a^A f'_y(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

在更一般的情况下, 若积分的下限和上限为参数 y 的可微函数 $\varphi(y)$ 和 $\psi(y)$, 并且当 $b < y < B$ 时 $a \leqslant \varphi(y) \leqslant A, a \leqslant \psi(y) \leqslant A$, 则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x = f(\psi(y),y)\psi'(y) - f(\varphi(y),y)\varphi'(y) + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,y)\,\mathrm{d}x, \quad b < y < B.$$

3. 积分符号下的积分法. 在 1 的条件下有:

$$\int_b^B \mathrm{d}y \int_a^A f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_a^A \mathrm{d}x \int_b^B f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

3711. 证明: 不连续函数 $f(x,y) = \operatorname{sgn}(x-y)$ 的积分

$$F(y) = \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

为连续函数. 作出函数 $u = F(y)$ 的图像.

3712. 研究函数

$$F(y) = \int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x$$

的连续性, 其中 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上是正的连续函数.

3713. 求:

(a) $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0}\int_\alpha^{1+\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}$;　　　(b) $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}x$;

(c) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^2 x^2\cos\alpha x\,\mathrm{d}x$; (d) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{1+\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n}$;

(e) $\lim\limits_{R\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$.

3714.1. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[A,B]$ 上连续. 证明:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^x [f(t+h)-f(t)]\,\mathrm{d}t = f(x)-f(a)\quad (A<a<x<B).$$

3714.2. 设: (1) 在 $[-1,1]$ 上 $\varphi_n(x)\geqslant 0\ (n=1,2,\cdots)$; (2) 对于 $0<\varepsilon\leqslant |x|\leqslant 1$, 当 $n\to\infty$ 时 $\varphi_n(x)\rightrightarrows 0$; (3) 当 $n\to\infty$ 时 $\int_{-1}^1 \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x\to 1$. 证明: 若 $f(x)\in C[-1,1]$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^1 f(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = f(0).$$

3715. 在表达式

$$\lim_{y\to 0}\int_0^1 \frac{x}{y^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{y^2}}\,\mathrm{d}x$$

中, 可否在积分符号下完成极限运算?

3716. 当 $y=0$ 时可否根据莱布尼茨法则计算函数

$$F(y)=\int_0^1 \ln\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x$$

的导数?

3717. 若

$$F(x)=\int_x^{x^2} \mathrm{e}^{-xy^2}\,\mathrm{d}y,$$

计算 $F'(x)$.

3718. 设:

(a) $F(\alpha)=\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} \mathrm{e}^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$; (b) $F(\alpha)=\int_{a+\alpha}^{b+\alpha} \dfrac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x$;

(c) $F(\alpha)=\int_0^{\alpha} \dfrac{\ln(1+\alpha x)}{x}\,\mathrm{d}x$; (d) $F(\alpha)=\int_0^{\alpha} f(x+\alpha,x-\alpha)\,\mathrm{d}x$;

(e) $F(\alpha)=\int_0^{\alpha^2}\mathrm{d}x\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}\sin(x^2+y^2-\alpha^2)\,\mathrm{d}y$.

求 $F'(\alpha)$.

3719. 若

$$F(x)=\int_0^x (x+y)f(y)\,\mathrm{d}y,$$

其中 $f(x)$ 为可微函数, 求 $F''(x)$.

3720. 设

$$F(x)=\int_a^b f(y)|x-y|\,\mathrm{d}y,$$

其中 $a<b$, $f(y)$ 为可微函数, 求 $F''(x)$.

3721.1. 设

$$F(x)=\frac{1}{h^2}\int_0^h \mathrm{d}\xi\int_0^h f(x+\xi+\eta)\,\mathrm{d}\eta \quad (h>0),$$

其中 $f(x)$ 为连续函数, 求 $F''(x)$.

3721.2. 设

$$F(x)=\int_0^x f(t)(x-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t,$$

求 $F^{(n)}(x)$.

3722. 证明公式:

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x y^n\cos\left(y+\frac{n\pi}{2}\right)\mathrm{d}y \quad (n=1,2,\cdots). \tag{1}$$

利用公式 (1) 获得以下估计:

$$\left|\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right|\leqslant\frac{1}{n+1},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

3723. 在区间 $1\leqslant x\leqslant 3$ 上用线性函数 $a+bx$ 近似地代替函数 $f(x)=x^2$, 使得

$$\int_1^3 (a+bx-x^2)^2\,\mathrm{d}x=\min.$$

3724. 依条件: 函数 $a+bx$ 及 $\sqrt{1+x^2}$ 在已知区间 $[0,1]$ 上的均方偏差为最小, 求近似公式

$$\sqrt{1+x^2}\approx a+bx \quad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

3725. 求完全椭圆积分

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi,$$

$$F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad (0<k<1)$$

的导数, 并把它们用函数 $E(k)$ 和 $F(k)$ 表示出来.

证明: $E(k)$ 满足微分方程

$$E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}=0.$$

3726. 证明: 阶数 n 为整数的贝塞尔函数

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

满足贝塞尔方程

$$x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+(x^2-n^2)J_n(x)=0.$$

3727. 设

$$I(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{\varphi(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\alpha-x}},$$

其中函数 $\varphi(x)$ 及其导数 $\varphi'(x)$ 在闭区间 $0\leqslant x\leqslant a$ 上连续. 证明: 当 $0<\alpha<a$ 时有

$$I'(\alpha)=\frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}}+\int_0^{\alpha}\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}\,\mathrm{d}x.$$

提示: 令 $x=\alpha t$.

3728. 设

$$u(x) = \int_0^1 K(x,y)v(y)\,\mathrm{d}y,$$

其中

$$K(x,y) = \begin{cases} x(1-y), & x \leqslant y, \\ y(1-x), & x > y, \end{cases}$$

及 $v(y)$ 都是连续的, 证明: 函数 $u(x)$ 满足方程

$$u''(x) = -v(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

3729. 设

$$F(x,y) = \int_{\frac{x}{y}}^{xy} (x - yz)f(z)\,\mathrm{d}z,$$

其中 $f(z)$ 为可微函数, 求 $F''_{xy}(x,y)$.

3730. 设 $f(x)$ 为二阶可微函数, $F(x)$ 为可微函数. 证明: 函数

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x-at) + f(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,\mathrm{d}z$$

满足弦的振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

及初始条件: $u(x,0) = f(x), u'_t(x,0) = F(x)$.

3731. 证明: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,l]$ 上连续, 且当 $0 \leqslant \xi \leqslant l$ 时 $(x-\xi)^2 + y^2 + z^2 \neq 0$, 则函数

$$u(x,y,z) = \int_0^l \frac{f(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2 + z^2}}$$

满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

应用对参数的微分法, 计算下列积分:

3732. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\,\mathrm{d}x.$　　**3733.** $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1 - 2a\cos x + a^2)\,\mathrm{d}x.$

3734. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}\,\mathrm{d}x.$　　**3735.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}\ (|a|<1).$

3736. 利用公式

$$\frac{\arctan x}{x} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+x^2y^2},$$

计算积分

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3737. 应用积分号下的积分法, 计算积分

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x \quad (a>0, b>0).$$

3738. 计算积分:

(a) $\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x$; (b) $\int_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x$ $(a>0, b>0)$.

3739. 设 $F(k)$ 和 $E(k)$ 为完全椭圆积分 (参阅习题 3725). 证明公式:

(a) $\int_0^k F(k)k\,\mathrm{d}k = E(k) - k_1^2F(k)$;

(b) $\int_0^k E(k)k\,\mathrm{d}k = \frac{1}{3}[(1+k^2)E(k) - k_1^2F(k)]$,

其中 $k_1^2 = 1-k^2$.

3740. 证明公式:

$$\int_0^x xJ_0(x)\,\mathrm{d}x = xJ_1(x),$$

其中 $J_0(x)$ 及 $J_1(x)$ 为阶数是 0 与 1 的贝塞尔函数 (参阅习题 3726).

§2. 带参数的广义积分. 积分的一致收敛性

1. 一致收敛性的定义. 设函数 $f(x,y)$ 在区域 $a \leqslant x < +\infty, y_1 < y < y_2$ 内是连续的. 若对于任何 $\varepsilon > 0$ 都存在数 $B = B(\varepsilon)$, 使得在 $b \geqslant B$ 的条件下有

$$\left|\int_b^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon \quad (y_1 < y < y_2),$$

则称广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

在区间 (y_1, y_2) 内一致收敛.

积分 (1) 的一致收敛与形如

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x,y)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

(其中 $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$) 的一切级数的一致收敛等价.

若积分 (1) 在区间 (y_1, y_2) 中一致收敛, 则在这个区间内它是参数 y 的连续函数.

2. 柯西准则. 积分 (1) 在区间 (y_1, y_2) 内一致收敛的充分必要条件为: 对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在数 $B = B(\varepsilon)$, 使得只要 $b' > B$ 及 $b'' > B$ 则

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon \quad (y_1 < y < y_2).$$

3. 魏尔斯特拉斯准则. 积分 (1) 一致收敛的充分条件为: 存在与参数 y 无关的强函数 $F(x)$, 使得 (1) 当 $a \leqslant x < +\infty$ 时 $|f(x,y)| \leqslant F(x)$, (2) $\int_a^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$.

4. 对于不连续函数的广义积分有类似的定理.

求积分的收敛域:

3741. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

3742. $\displaystyle\int_\pi^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^p+x^q}\,\mathrm{d}x.$

3743. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^q}{x^p}\,\mathrm{d}x.$

3744. $\displaystyle\int_0^{2}\frac{\mathrm{d}x}{|\ln x|^p}.$

3745. $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\cos\dfrac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

3746. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\,\mathrm{d}x\ (p>0).$

利用与级数比较的方法研究下列积分的收敛性:

3747. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}\,\mathrm{d}x.$

3748. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^n\sin^2 x}\ (n>0).$

3749. $\displaystyle\int_\pi^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}.$

3750. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}\,\mathrm{d}x.$

3751. 用肯定的方式陈述, 什么是积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

在已知区间 (y_1,y_2) 内不一致收敛?

3752. 证明: 若 1) 积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

收敛, 2) 函数 $\varphi(x,y)$ 有界, 且关于 x 是单调的, 则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x$$

一致收敛 (在相应区域内).

3753. 证明: 一致收敛的积分

$$I=\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\quad(0<y<1)$$

不能以与参数无关的收敛积分为强函数.

3754. 证明: 积分

$$I=\int_0^{+\infty}\alpha\mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x$$

(a) 在任何区间 $0<a\leqslant\alpha\leqslant b$ 内一致收敛; (b) 在区间 $0\leqslant\alpha\leqslant b$ 内非一致收敛.

3755.1. 证明: 狄利克雷积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x$$

(a) 在每一个不含数值 $\alpha=0$ 的闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛, (b) 在含数值 $\alpha=0$ 的每一个闭区间 $[a,b]$ 上非一致收敛.

3755.2. 研究积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ 在以下区间上的一致收敛性:

(a) $1<\alpha_0\leqslant\alpha<+\infty$; (b) $1<\alpha<+\infty$.

3755.3. 证明: 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha + 1}$$

在区间 $1 < \alpha < +\infty$ 上一致收敛.

研究下列积分在所指定区间内的一致收敛性:

3756. (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$; (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x} \sin x \,\mathrm{d}x$ $(0 < \alpha_0 \leqslant \alpha < +\infty)$.

3757. $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x$ $(a \leqslant \alpha \leqslant b)$. **3758.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1 + x^2} \,\mathrm{d}x$ $(-\infty < \alpha < +\infty)$.

3759. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x + \alpha)^2 + 1}$ $(0 \leqslant \alpha < +\infty)$.

3760. (a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{e}^{-\alpha x} \,\mathrm{d}x$ $(0 \leqslant \alpha < +\infty)$; (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$ $(0 \leqslant p \leqslant 10)$.

3761. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x} \frac{\cos x}{x^p} \,\mathrm{d}x$ $(0 \leqslant \alpha < +\infty)$, 其中 $p > 0$ 是常数.

3762. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha} \mathrm{e}^{-\alpha x^2} \,\mathrm{d}x$ $(0 \leqslant \alpha < +\infty)$.

3763. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x-\alpha)^2} \,\mathrm{d}x$; (a) $a < \alpha < b$; (b) $-\infty < \alpha < +\infty$.

3764. (a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2(1+y^2)} \sin x \,\mathrm{d}y$ $(-\infty < x < +\infty)$; (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1 + x^p} \,\mathrm{d}x$ $(p \geqslant 0)$.

3765. 选取数 $b > 0$, 使得在 $1.1 \leqslant p \leqslant 10$ 时

$$\int_b^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^p} < \varepsilon,$$

式中 $\varepsilon = 10^{-6}$.

3766. $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$; (a) $p \geqslant p_0 > 0$; (b) $p > 0$ $(q > -1)$.

3767. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1 - x^2}} \,\mathrm{d}x$ $(0 \leqslant n < +\infty)$. **3768.** $\displaystyle\int_0^1 \sin \frac{1}{x} \frac{\mathrm{d}x}{x^n}$ $(0 < n < 2)$.

3769. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^\alpha \,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}$ $\left(|\alpha| < \dfrac{1}{2}\right)$. **3770.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{|x - \alpha|}} \,\mathrm{d}x$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$.

3771. 若积分在参数的已知值的某邻域内一致收敛, 则称此积分对参数的已知值一致收敛.

证明: 积分

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha \,\mathrm{d}x}{1 + \alpha^2 x^2}$$

对每一个 $\alpha \neq 0$ 的值一致收敛, 而对 $\alpha = 0$ 非一致收敛.

3772. 在下式中

$$\lim_{\alpha \to +0} \int_0^{+\infty} \alpha \mathrm{e}^{-\alpha x} \,\mathrm{d}x$$

把极限移到积分符号内合理吗?

3773. 函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内可积, 证明公式:

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3774.1. 证明: 若 $f'(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上绝对可积, 则存在 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.

3774.2. 证明: 若 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内绝对可积, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=0.$$

3775. 证明: 若 (1) 在每一个有限区间 (a,b) 内 $f(x,y)\rightrightarrows f(x,y_0)$; (2) $|f(x,y)|\leqslant F(x)$, 其中 $\int_a^{+\infty}F(x)\,\mathrm{d}x<+\infty$, 则

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\lim_{y\to y_0}f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

3776.1. 利用积分号与极限号互换, 计算积分

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\right]\mathrm{d}x.$$

3776.2. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且有界. 证明:

$$\lim_{y\to0}\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x=f(0).$$

3777.1. 求

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^n+1}.$$

3777.2. 证明: 积分

$$F(a)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-a)^2}\,\mathrm{d}x$$

是参数 a 的连续函数.

3778.1. 证明:

$$F(\alpha)=\int_0^1\frac{\sin\dfrac{\alpha}{x}}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

在区间 $0<\alpha<1$ 上是连续函数.

3778.2. 求函数

$$F(a)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1-a^2)x}{x}\,\mathrm{d}x$$

的间断点. 作出函数 $y=F(a)$ 的图像.

研究下列函数在所指定区间内的连续性:

3779. $F(\alpha)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{2+x^\alpha}$, 当 $\alpha>2$.

3780. $F(\alpha)=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$, 当 $\alpha>0$.

3781. $F(\alpha)=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x$, 当 $0<\alpha<2$.

3782. $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{|\sin x|^{\alpha}}\,\mathrm{d}x$, 当 $0<\alpha<1$.

3783. $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\alpha\mathrm{e}^{-x\alpha^2}\,\mathrm{d}x$, 其中 $-\infty<\alpha<+\infty$.

§3. 广义积分号下的微分法和积分法

1. 对参数的微分法. 若 1) 函数 $f(x,y)$ 及其导数 $f'_y(x,y)$ 在区域 $a\leqslant x<+\infty, y_1<y<y_2$ 内是连续的; 2) $\int_a^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 收敛; 3) $\int_a^{+\infty}f'_y(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在区间 (y_1,y_2) 内一致收敛, 则当 $y_1<y<y_2$ 时

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}f'_y(x,y)\,\mathrm{d}x$$

(莱布尼茨法则).

2. 对参数积分的公式. 若 1) 函数 $f(x,y)$ 当 $x\geqslant a$ 及 $y_1\leqslant y\leqslant y_2$ 时是连续的; 2) $\int_a^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在有限区间 (y_1,y_2) 内一致收敛, 则

$$\int_{y_1}^{y_2}\mathrm{d}y\int_a^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{y_1}^{y_2}f(x,y)\,\mathrm{d}y. \tag{1}$$

若 $f(x,y)\geqslant 0$, 同时假定等式 (1) 中两个内侧的积分连续, 并且等式 (1) 的一端有意义, 则公式 (1) 对于无穷区间 (y_1,y_2) 也正确.

3784. 利用公式

$$\int_0^1 x^{n-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\quad(n>0)$$

计算积分

$$I=\int_0^1 x^{n-1}\ln^m x\,\mathrm{d}x,\quad \text{其中 } m \text{ 为正整数}.$$

3785. 利用公式

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a}=\frac{\pi}{2\sqrt{a}}\quad(a>0)$$

计算积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a)^{n+1}},\quad \text{其中 } n \text{ 为正整数}.$$

3786. 证明: 狄利克雷积分

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x$$

当 $\alpha\neq 0$ 时有导数, 但是不能利用莱布尼茨法则来求它.

提示: 令 $\alpha x=y$.

3787. 证明: 函数

$$F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\,\mathrm{d}x$$

在区域 $-\infty < \alpha < +\infty$ 内连续并且可微.

3788. 从等式

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xy}\,dy$$

出发, 计算积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx \quad (a > 0, b > 0).$$

3789. 证明傅茹兰公式:

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,dx = f(0)\ln\frac{b}{a} \quad (a > 0, b > 0),$$

式中 $f(x)$ 为连续函数, 积分 $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx$ 对任何 $A > 0$ 都有意义.

利用傅茹兰公式, 计算积分:

3790. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,dx \ (a > 0, b > 0).$

3791. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax - \sin bx}{x}\,dx \ (a > 0, b > 0).$

3792. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan ax - \arctan bx}{x}\,dx \ (a > 0, b > 0).$

利用对参数的微分法计算下列积分:

3793. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}\,dx \ (\alpha > 0, \beta > 0).$

3794. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\right)^2 dx \ (\alpha > 0, \beta > 0).$

3795. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx \ (\alpha > 0, \beta > 0).$

3796. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\cos mx\,dx \ (\alpha > 0, \beta > 0).$

计算下列积分:

3797. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{x^2\sqrt{1 - x^2}}\,dx \ (|\alpha| \leqslant 1).$

3798. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx \quad (|\alpha| \leqslant 1).$

3799. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan \alpha x}{x^2\sqrt{x^2 - 1}}\,dx.$

3800. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\beta^2 + x^2}\,dx.$

3801. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan \alpha x \arctan \beta x}{x^2}\,dx.$

3802. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + \alpha^2 x^2)\ln(1 + \beta^2 x^2)}{x^4}\,dx.$

3803. 从公式

$$I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \int_0^{+\infty} x e^{-x^2 y^2}\,dy$$

出发, 计算欧拉–泊松积分

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

利用欧拉–泊松积分, 求下列积分:

3804. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)}\,dx \quad (a>0, ac-b^2>0)$.

3805. $\int_{-\infty}^{+\infty} (a_1x^2+2b_1x+c_1)e^{-(ax^2+2bx+c)}\,dx \quad (a>0, ac-b^2>0)$.

3806. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\cosh bx\,dx\ (a>0)$.

3807. $\int_{0}^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\,dx \quad (a>0)$.

3808. $\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}\,dx \quad (\alpha>0, \beta>0)$.

3809. $\int_{0}^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx \quad (a>0)$.

3810. (a) $\int_{0}^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin bx\,dx \quad (a>0)$;

(b) $\int_{0}^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}\cos 2bx\,dx$ (n 为正整数).

3811. 证明:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\int_{-\delta}^{\delta} e^{-axt^2}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a>0, \delta>0).$$

3812.1. 从积分

$$I(\alpha)=\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\,dx\ (\alpha\geqslant 0)$$

出发, 计算狄利克雷积分

$$D(\beta)=\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}\,dx.$$

3812.2. 积分正弦被定义为

$$\operatorname{Si} x=\int_{0}^{x}\frac{\sin t}{t}\,dt.$$

函数 $y=\operatorname{Si} x$ 的图像大致具有怎样的形状?

利用狄利克雷积分和傅茹兰积分, 求下列积分:

3813. $\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}\,dx \quad (\alpha>0)$.

3814. $\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x}\,dx\ (|\alpha|\neq|\beta|)$.

3815. $\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin\alpha x\cos\beta x}{x}\,dx$.

3816. $\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin^3\alpha x}{x}\,dx$.

3817. $\int_{0}^{+\infty} \left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2 dx$.

3818. $\int_{0}^{+\infty} \left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^3 dx$.

3819. $\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2}\,dx$.

3820. $\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin^4\alpha x-\sin^4\beta x}{x}\,dx\ (\alpha\beta\neq 0)$.

3821. $\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x}\,dx$.

3822. $\int_{0}^{+\infty} e^{-kx}\frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x^2}\,dx\ (k\geqslant 0, \alpha>0, \beta>0)$.

3823. 对于不同的 x 值, 求狄利克雷间断乘子

$$D(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \sin\lambda\cos\lambda x \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

作出函数 $y = D(x)$ 的图像.

3824. 计算积分:

(a) $\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x+b}\,dx$;　　(b) $\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x+b}\,dx$.

3825. 利用公式

$$\frac{1}{1+x^2} = \int_0^{+\infty} e^{-y(1+x^2)}\,dy$$

计算拉普拉斯积分

$$L = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx.$$

3826. 计算积分

$$L_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x\sin ax}{1+x^2}\,dx.$$

计算积分:

3827. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2}\,dx$.　　**3828.** $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{(1+x^2)^2}\,dx$.

3829. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{ax^2+2bx+c}\,dx \ (a>0, ac-b^2>0)$.

3830. 利用公式

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-xy^2}\,dy \ (x>0)$$

计算菲涅尔积分

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx,$$
$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx.$$

求下列积分:

3831. $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^2+2bx+c)\,dx \ (a \neq 0)$.

3832. $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 \cdot \cos 2ax\,dx$.　　**3833.** $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x^2 \cdot \cos 2ax\,dx$.

3834. 证明公式:

1) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{a^2-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}\sin a\alpha$;　　2) $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin\alpha x}{a^2-x^2}\,dx = -\frac{\pi}{2}\cos a\alpha$,

这里 $a \neq 0$, 积分应理解为在柯西主值的意义上.

3835. 对于函数 $f(t)$, 求拉普拉斯变换

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt \quad (p>0),$$

设:

(a) $f(t)=t^n$ (n 为正整数); (b) $f(t)=\sqrt{t}$; (c) $f(t)=\mathrm{e}^{\alpha t}$;

(d) $f(t)=t\mathrm{e}^{-\alpha t}$; (e) $f(t)=\cos t$; (f) $f(t)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}$;

(g) $f(t)=\sin\alpha\sqrt{t}$.

3836. 证明公式: (利普希茨积分)

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-at}J_0(bt)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\quad (a>0),$$

其中 $J_0(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos(x\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$ 为 0 阶贝塞尔函数 (参阅习题 3726).

3837. 求魏尔斯特拉斯变换

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-y)^2}f(y)\,\mathrm{d}y,$$

设: (a) $f(y)=1$; (b) $f(y)=y^2$; (c) $f(y)=\mathrm{e}^{2ay}$; (d) $f(y)=\cos ay$.

3838. 切比雪夫–埃尔米特多项式由公式

$$H_n(x)=(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\mathrm{e}^{-x^2})\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

定义, 证明:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}H_m(x)H_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ 2^n n!\sqrt{\pi}, & m=n.\end{cases}$$

3839. 计算在概率论中有重要意义的积分

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\xi^2}{\sigma_1^2}+\frac{(x-\xi)^2}{\sigma_2^2}\right]}\,\mathrm{d}\xi\quad (\sigma_1>0,\sigma_2>0).$$

3840. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续且绝对可积. 证明: 积分

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,\mathrm{d}\xi$$

满足热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\mathrm{d}x^2}$$

及初始条件

$$\lim_{t\to+0}u(x,t)=f(x).$$

§4. 欧拉积分

1. Γ 函数. 设 $x>0$ 时有:

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Γ 函数的基本性质可由以下递推公式表达:

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x).$$

若 n 为正整数, 则

$$\Gamma(n)=(n-1)!;\quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

2. 延拓公式. 当 x 不等于整数时有:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

此公式可用来求自变量为负值的 Γ 函数.

3. β **函数.** 当 $x>0$ 且 $y>0$ 时有

$$\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t.$$

成立公式

$$\beta(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

3841. 证明: Γ 函数 $\Gamma(x)$ 在区域 $x>0$ 内连续, 并且有各阶连续导数.

3842. 证明: β 函数 $\beta(x,y)$ 在区域 $x>0, y>0$ 内连续, 并且有各阶连续导数.

利用欧拉积分计算下列积分:

3843. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}x.$

3844. $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\ \ (a>0).$

3845. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x.$

3846. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}.$

3847. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^4}.$

3848. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\cdot\cos^4 x\,\mathrm{d}x.$

3849. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{1-x^n}}\ \ (n>0).$

3850. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{2n}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ (n 为正整数).

求下列积分的存在域, 并用欧拉积分表示这些积分:

3851. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x\ \ (n>0).$

3852. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{(1+x)^n}\,\mathrm{d}x.$

3853. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^m\,\mathrm{d}x}{(a+bx^n)^p}\ \ (a>0,b>0,n>0).$

3854. $\displaystyle\int_a^b \frac{(x-a)^m(b-x)^n}{(x+c)^{m+n+2}}\,\mathrm{d}x\ \ (0<a<b,c>0).$

3855. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{1-x^m}}\ \ (m>0).$

3856. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^n x\,\mathrm{d}x.$

3857. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^n x\,\mathrm{d}x.$

3858. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin^{n-1}x}{(1+k\cos x)^n}\,\mathrm{d}x\ \ (0<|k|<1).$

3859. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x\ \ (n>0).$

3860. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^m\mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x.$

3861. $\displaystyle\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p\mathrm{d}x.$

3862. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^p\mathrm{e}^{-ax}\ln x\,\mathrm{d}x\ \ (a>0).$

3863. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\,\mathrm{d}x\ \ (p>0).$

3864. (a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln^2 x}{1+x}\,\mathrm{d}x\ \ (p>0);$ (b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\ln x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x;$ (c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x.$

3865. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1+x)\ln x}\,\mathrm{d}x.$ **3866.** $\displaystyle\int_0^1\frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\,\mathrm{d}x\quad(0<p<1).$

提示: 此积分可看作 $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}[\beta(p,\varepsilon)-\beta(1-p,\varepsilon)]$.

3867. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sinh\alpha x}{\sinh\beta x}\,\mathrm{d}x\quad(0<\alpha<\beta).$ **3868.** $\displaystyle\int_0^1\ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x.$

3869. $\displaystyle\int_a^{a+1}\ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x\quad(a>0).$ **3870.** $\displaystyle\int_0^1\ln\Gamma(x)\sin\pi x\,\mathrm{d}x.$

3871. $\displaystyle\int_0^1\ln\Gamma(x)\cos 2n\pi x\,\mathrm{d}x$ (n 为正整数).

证明等式:

3872. $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}\cdot\int_0^1\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{\pi}{4}.$

3873. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^4}\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x^4}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$

3874. $\displaystyle\prod_{m=1}^{n}\int_0^{+\infty}x^{m-1}\mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.$

3875. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x=1.$

利用等式 $\displaystyle\frac{1}{x^m}=\frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^{+\infty}t^{m-1}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ $(x>0)$, 求积分:

3876. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{x^m}\,\mathrm{d}x\ (0<m<1).$ **3877.** $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x^m}\,\mathrm{d}x\ (0<m<2).$

3878. 证明欧拉公式:

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha)\,\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\cos\alpha x;$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)\,\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\sin\alpha x$

$\left(\lambda>0,x>0,-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right).$

3879. 求曲线

$$r^n=a^n\cos n\varphi\quad(a>0,n\ \text{为正整数})$$

的弧长.

3880. 求曲线

$$|x|^n+|y|^n=a^n\quad(n>0,a>0)$$

所围的面积.

§5. 傅里叶积分公式

1. 用傅里叶积分表示函数. 若 1) 函数 $f(x)$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 内有定义, (2) 在每一个有限区间内此函数和它的导数 $f'(x)$ 皆是分段连续, (3) $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内绝对可积, 则在函数连续的一切点, 可把函数表示成傅里叶积分的形式:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x]\,\mathrm{d}\lambda, \tag{1}$$

式中

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi \quad 及 \quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi.$$

在函数 $f(x)$ 的各间断点, 公式 (1) 的左端应改为 $\dfrac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$.

对于偶函数 $f(x)$, 公式 (1) 给出:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} a(\lambda)\cos\lambda x\,\mathrm{d}\lambda, \tag{2}$$

其中

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi,$$

并且对间断点也有同样的说明.

类似地, 对于奇函数 $f(x)$ 可得:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} b(\lambda)\sin\lambda x\,\mathrm{d}\lambda, \tag{3}$$

其中

$$b(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi.$$

2. 在区间 $(0, +\infty)$ 内用傅里叶积分表示函数. 若 (1) 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上有定义, (2) 此函数及其导数 $f'(x)$ 在每一个有限区间 $(a, b) \subset (0, +\infty)$ 内皆是分段连续, (3) $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上绝对可积, 则在该区间内可按我们的愿望用公式 (2) (偶式延拓) 或公式 (3) (奇式延拓) 来表示出函数 $f(x)$.

用傅里叶积分表示下列函数:

3881. $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$

3882. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$

3883. $f(x) = \operatorname{sgn}(x-a) - \operatorname{sgn}(x-b) \quad (b > a)$.

3884. $f(x) = \begin{cases} h\left(1 - \dfrac{|x|}{a}\right), & |x| \leqslant a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$

3885. $f(x) = \dfrac{1}{a^2 + x^2} \quad (a > 0)$.

3886. $f(x) = \dfrac{x}{a^2 + x^2} \quad (a > 0)$.

3887. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leqslant \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$

3888. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

3889. $f(x)=\begin{cases} A\sin\omega x, & |t|\leqslant\dfrac{2\pi n}{\omega}, \\ 0, & |t|>\dfrac{2\pi n}{\omega} \end{cases}$ (n 为正整数).

3890. $f(x)=\mathrm{e}^{-\alpha|x|}\ (\alpha>0)$.

3891. $f(x)=\mathrm{e}^{-\alpha|x|}\cos\beta x\ (\alpha>0)$.

3892. $f(x)=\mathrm{e}^{-\alpha|x|}\sin\beta x\ (\alpha>0)$.

3893. $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$.

3894. $f(x)=x\mathrm{e}^{-x^2}$.

3895. 用傅里叶积分来表示函数

$$f(x)=\mathrm{e}^{-x}\ (0<x<+\infty),$$

(a) 用偶式延拓;　(b) 用奇式延拓.

对于下列函数 $f(t)$, 求傅里叶变换

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-itx}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{l\to+\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\mathrm{e}^{-itx}\,\mathrm{d}t:$$

3896. $f(x)=\mathrm{e}^{-\alpha|x|}\ (\alpha>0)$.

3897. $f(x)=x\mathrm{e}^{-\alpha|x|}\ (\alpha>0)$.

3898. $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

3899. $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\cos\alpha x$.

3900. 求函数 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$, 设:

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi(y)\cos xy\,\mathrm{d}y=\frac{1}{1+x^2}$;

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\psi(y)\sin xy\,\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-x}\ (x>0)$.

第八章　多重积分和曲线积分

§1. 二重积分

1. 二重积分的直接计算法. 所谓连续函数 $f(x,y)$ 在有限封闭可求积二维区域 Ω 上的二重积分, 指的是

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{\substack{\max|\Delta x_i|\to 0\\ \max|\Delta y_j|\to 0}} \sum_i \sum_j f(x_i,y_j)\Delta x_i \Delta y_j,$$

其中 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$, 而求和是对所有使 $(x_i, y_j) \in \Omega$ 的那些 i, j 值进行的.

若区域 Ω 由以下不等式给出:

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x),$$

其中 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 则相应二重积分可按以下公式来计算:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

2. 二重积分中的变量代换. 若连续可微函数

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v)$$

给出平面 Oxy 上的有限闭区域 Ω 与平面 Ouv 上的区域 Ω' 之间的一一映射, 且雅可比行列式

$$I = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$$

的符号在 Ω 内保持不变 (可能在零测度集上有例外), 则成立以下公式:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega'} f(x(u,v), y(u,v))|I|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

例如, 根据公式 $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ 变换为极坐标 r 和 φ 时, 有

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi.$$

3901. 把积分 $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 当作积分和的极限, 用直线

$$x=\frac{i}{n},\quad y=\frac{j}{n}\quad (i,j=1,2,\cdots,n-1)$$

把积分域分为许多正方形, 并选取被积函数在这些正方形之右顶点的值, 计算此积分.

3902. 用直线

$$x=1+\frac{i}{n},\quad y=1+\frac{2j}{n}\quad (i,j=0,1,\cdots,n)$$

把区域 $1\leqslant x\leqslant 2, 1\leqslant y\leqslant 3$ 分为许多矩形, 列出函数 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在此区域内的下积分和 $\underline{S}$ 与上积分和 $\overline{S}$.

当 $n\to\infty$ 时, 上积分和与下积分和的极限等于什么?

3903. 用一组顶点 A_{ij} 位于整数点的正方形作为积分域的近似域, 并取被积函数在每个正方形距原点最远的顶点之值, 近似地计算积分

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{24+x^2+y^2}},$$

并与精确值加以比较.

3904. 用直线 $x=$ 常数, $y=$ 常数, $x+y=$ 常数把积分域 S 分为四个相同的三角形, 并取被积函数在每个三角形的质心之值, 近似地计算积分

$$\iint\limits_{S}\sqrt{x+y}\,\mathrm{d}S.$$

其中 S 是以直线 $x=0, y=0$ 及 $x+y=1$ 为边的三角形.

3905. 把积分域 S : $\{x^2+y^2\leqslant 1\}$ 分为有限个直径小于 δ 的可求积的子区域 ΔS_i $(i=1,2,\cdots,n)$. 怎样的值 δ 能保证不等式

$$\left|\iint\limits_{S}\sin(x+y)\,\mathrm{d}S-\sum_{i=1}^{n}\sin(x_i+y_i)\Delta S_i\right|<0.001$$

成立? 其中 $(x_i,y_i)\in\Delta S_i$.

计算积分:

3906. $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x+y)\,\mathrm{d}y.$

3907. $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}xy^2\,\mathrm{d}y.$

3908. $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^2\sin^2\varphi\,\mathrm{d}r.$

3909. 设 R 为矩形

$$a\leqslant x\leqslant A,\quad b\leqslant y\leqslant B,$$

函数 $X(x)$ 和 $Y(y)$ 在相应区间上连续, 证明等式:

$$\iint\limits_{R}X(x)Y(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_a^A X(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_b^B Y(y)\,\mathrm{d}y.$$

3910. 设

$$f(x,y)=F''_{xy}(x,y),$$

计算

$$I = \int_a^A \mathrm{d}x \int_b^B f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

3911. 设 $f(x)$ 为区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 内的连续函数. 证明不等式:

$$\left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

且仅当 $f(x) =$ 常数时等号成立.

提示: 研究积分

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_a^b [f(x)-f(y)]^2\,\mathrm{d}y.$$

3912. 下列积分有怎样的符号?

(a) $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} \ln(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$;　　(b) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$;

(c) $\displaystyle\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 1-x}} \arcsin(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

3913. 求函数

$$f(x,y) = \sin^2 x \sin^2 y$$

在正方形 $0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant \pi$ 内的平均值.

3914. 利用中值定理估计积分

$$I = \iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}.$$

3915. 求圆 $(x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant R^2$ 上的点到原点的距离之平方的平均值.

在问题 3916—3922 中, 对二重积分 $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 按所给区域 Ω 依两个不同的顺序安置积分的上下限.

3916. Ω — 以 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$ 为顶点的三角形.

3917. Ω — 以 $O(0,0)$, $A(2,1)$, $B(-2,1)$ 为顶点的三角形.

3918. Ω — 以 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,2)$, $C(0,1)$ 为顶点的梯形.

3919. Ω — 圆 $x^2+y^2 \leqslant 1$.

3920. Ω — 圆 $x^2+y^2 \leqslant y$.

3921. Ω — 被曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所包围的区域.

3922. Ω — 圆环 $1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4$.

3923. 证明狄利克雷公式:

$$\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^a \mathrm{d}y \int_y^a f(x,y)\,\mathrm{d}x \quad (a>0).$$

在下列积分中改变积分的顺序:

3924. $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^{2x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.　　**3925.** $\displaystyle\int_{-6}^2 \mathrm{d}x \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

3926. $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$ **3927.** $\int_{-1}^1 \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$

3928. $\int_1^2 \mathrm{d}x \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$ **3929.** $\int_0^{2a} \mathrm{d}x \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \quad (a>0).$

3930. $\int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{d}x \int_0^{\ln x} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$ **3931.** $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \int_0^{\sin x} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$

计算下列积分:

3932. $\iint\limits_{\Omega} xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Ω 是被抛物线 $y^2=2px$ 和直线 $x=\dfrac{p}{2}$ $(p>0)$ 所包围的区域.

3933. $\iint\limits_{\Omega} \dfrac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{2a-x}}$ $(a>0)$, 其中 Ω 是以圆心在点 (a,a) 半径为 a 的圆周 (它与坐标轴相切) 的较短弧和坐标轴为界的区域.

3934. $\iint\limits_{\Omega} |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Ω 是以 a 为半径, 以坐标原点为圆心的圆.

3935. $\iint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Ω 是以 $y=x, y=x+a, y=a$ 和 $y=3a$ $(a>0)$ 为边的平行四边形.

3936. $\iint\limits_{\Omega} y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Ω 是被横轴和摆线

$$x=a(t-\sin\ t), \quad y=a(1-\cos t) \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

的第一拱所包围的区域.

在二重积分

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

中, 令 $x=r\cos\varphi$ 和 $y=r\sin\varphi$, 变换为极坐标 r 和 φ, 并配置积分的上下限, 设:

3937. Ω — 圆 $x^2+y^2\leqslant a^2$.

3938. Ω — 圆 $x^2+y^2\leqslant ax$ $(a>0)$.

3939. Ω — 环 $a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2$.

3940. Ω — 三角形 $0\leqslant x\leqslant 1; 0\leqslant y\leqslant 1-x$.

3941. Ω — 区域 $-a\leqslant x\leqslant a$; $\dfrac{x^2}{a}\leqslant y\leqslant a$.

3942. 在怎样的情况下, 当变换为极坐标之后, 积分的上下限是常数?

在下列积分中, 令 $x=r\cos\varphi$ 和 $y=r\sin\varphi$, 变换为极坐标 r 和 φ, 并依两种不同的顺序配置积分的上下限:

3943. $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

3944. $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

3945. $\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}y$.

3946. $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

3947. $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中区域 Ω 由曲线 $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)\ (x \geqslant 0)$ 围成.

令 r 和 φ 为极坐标, 在下列积分中变更积分的顺序:

3948. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{a\cos\varphi} f(\varphi,r)\,\mathrm{d}r \quad (a>0)$.

3949. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi,r)\,\mathrm{d}r \quad (a>0)$.

3950. $\int_0^{a} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\varphi} f(\varphi,r)\,\mathrm{d}r \quad (0<a<2\pi)$.

变换成极坐标, 把二重积分化为一重积分:

3951. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

3952. $\iint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $\Omega = \{|y| \leqslant |x|; |x| \leqslant 1\}$.

3953. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x} f\left(\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

变换成极坐标, 计算下列二重积分:

3954. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

3955. $\iint\limits_{\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

3956. 利用函数组

$$u = \frac{y^2}{x}, \quad v = \sqrt{xy}$$

把正方形 $S\{a<x<a+h, b<y<b+h\}(a>0, b>0)$ 变换为区域 S'. 求区域 S' 的面积与区域 S 的面积之比. 当 $h \to 0$ 时, 此比值的极限等于什么?

引入新的变量 u, v 来代替 x, y, 并确定下列二重积分中的积分限:

3957. $\int_a^b \mathrm{d}x \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \quad (0<a<b; 0<\alpha<\beta)$, 令 $u = x, v = \dfrac{y}{x}$.

3958. $\int_0^2 \mathrm{d}x \int_{1-x}^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$, 令 $u = x+y, v = x-y$.

3959. $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Ω 是被曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}, x=0, y=0\ (a>0)$ 所

包围的区域, 令

$$x = u\cos^4 v, \quad y = u\sin^4 v.$$

3960. 证明: 变量代换

$$x + y = \xi, \quad y = \xi\eta$$

把三角形 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1 - x$ 变为单位正方形 $0 \leqslant \xi \leqslant 1, 0 \leqslant \eta \leqslant 1$.

3961. 在怎样的变量代换下, 由曲线 $xy = 1, xy = 2, x - y + 1 = 0, x - y - 1 = 0$ $(x > 0, y > 0)$ 围成的曲线四边形被变换成矩形, 且其边平行于坐标轴?

进行适当的变量代换, 把二重积分化为一重积分:

3962. $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} f(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. **3963.** $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(ax+by+c)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad (a^2+b^2 \neq 0)$.

3964. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} f(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中区域 Ω 由曲线 $xy = 1, xy = 2, y = x, y = 4x \quad (x > 0, y > 0)$ 围成.

计算下列二重积分:

3965. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中区域 Ω 由曲线 $x^2 + y^2 = x + y$ 围成.

3966. $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} (|x|+|y|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

3967. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其积分域 Ω 是椭圆区域 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1$.

3968. $\displaystyle\iint\limits_{x^4+y^4\leqslant 1} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

3969. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其积分域 Ω 由曲线 $y^2 = 2x, x + y = 4, x + y = 12$ 围成.

3970. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Ω 是由曲线 $xy = 1, x + y = \dfrac{5}{2}$ 围成的区域.

3971. $\displaystyle\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi \\ 0\leqslant y\leqslant\pi}} |\cos(x+y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. **3972.** $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \left|\frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

3973. $\displaystyle\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1 \\ 0\leqslant y\leqslant 2}} \sqrt{|y - x^2|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

计算不连续函数的积分:

3974. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$ **3975.** $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 2\\0\leqslant y\leqslant 2}} [x+y]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

3976. $\iint\limits_{x^2\leqslant y\leqslant 4} \sqrt{[y-x^2]}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

3977. 设 m 及 n 为正整数且其中至少有一个是奇数, 证明:

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^m y^n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

3978. 求

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 $f(x,y)$ 为连续函数.

3979. 设

$$F(t)=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\0\leqslant y\leqslant t}} \mathrm{e}^{\frac{tx}{y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

求 $F'(t)$.

3980. 设

$$F(t)=\iint\limits_{(x-t)^2+(y-t)^2\leqslant 1} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

求 $F'(t)$.

3981. 设

$$F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad (t>0),^{①}$$

求 $F'(t)$.

3982. 证明: 若 $f(x,y)$ 连续, 则函数

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\int_0^x \mathrm{d}\xi\int_{\xi-x+y}^{x+y-\xi} f(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\eta$$

满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y).$$

3983. 设函数 $f(x,y)$ 的等值线是简单封闭曲线, 区域 $S(v_1,v_2)$ 由曲线 $f(x,y)=v_1$ 及 $f(x,y)=v_2$ 围成. 证明:

$$\iint\limits_{S(v_1,v_2)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{v_1}^{v_2} vF'(v)\,\mathrm{d}v,$$

其中 $F(v)$ 为曲线 $f(x,y)=v_1$ 与 $f(x,y)=v_2$ 所包围的面积.

提示: 用函数 $f(x,y)$ 的无限接近的等值线把积分域分为许多部分.

①要求 f 在有关区域上连续. —— 译注

§2. 面积的计算法

Oxy 平面上区域 S 的面积由以下公式给出:

$$S = \iint\limits_S \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

求下列曲线所围的面积:

3984. $xy = a^2, x + y = \frac{5}{2}a \quad (a > 0)$.

3985. $y^2 = 2px + p^2, y^2 = -2qx + q^2 \quad (p > 0, q > 0)$.

3986. $(x - y)^2 + x^2 = a^2 \quad (a > 0)$.

变换为极坐标, 计算下列曲线所围的面积:

3987. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2), \quad x^2 + y^2 \geqslant a^2$.

3988. $(x^3 + y^3)^2 = x^2 + y^2, \quad x \geqslant 0, y \geqslant 0$.

3989. $(x^2 + y^2)^2 = a(x^3 - 3xy^2) \quad (a > 0)$.

3990. $(x^2 + y^2)^2 = 8a^2xy, (x - a)^2 + (y - a)^2 \leqslant a^2 \quad (a > 0)$.

根据以下公式引入广义极坐标 r 和 φ:

$$x = ar\cos^\alpha\varphi, \quad y = br\sin^\alpha\varphi \quad (r \geqslant 0),$$

其中 a, b 和 α 为以适当的方法选出的常数, 且考虑到 $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \alpha abr\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi$, 求由下列曲线所围的面积 (假定参数是正的):

3991. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{x}{h} + \dfrac{y}{k}$.

3992. $\dfrac{x^3}{a^3} + \dfrac{y^3}{b^3} = \dfrac{x^2}{h^2} + \dfrac{y^2}{k^2}; \quad x = 0, y = 0$.

3993. $\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right)^4 = \dfrac{x^2}{h^2} + \dfrac{y^2}{k^2} \quad (x > 0, y > 0)$.

3994. (a) $\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right)^4 = \dfrac{x^2}{h^2} - \dfrac{y^2}{k^2} \quad (x > 0, y > 0)$; (b) $\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right)^5 = \dfrac{x^2y^2}{c^4}$.

3995. $\sqrt[4]{\dfrac{x}{a}} + \sqrt[4]{\dfrac{y}{b}} = 1; \quad x = 0, y = 0$.

进行适当的变量代换, 求下列曲线所围的面积:

3996. $x + y = a, x + y = b, y = \alpha x, y = \beta x \quad (0 < a < b, 0 < \alpha < \beta)$.

3997. $xy = a^2, xy = 2a^2, y = x, y = 2x \quad (x > 0, y > 0)$.

3998. (a) $y^2 = 2px, y^2 = 2qx, x^2 = 2ry, x^2 = 2sy \quad (0 < p < q, 0 < r < s)$;

(b) $x^2 = ay, x^2 = by, x^3 = cy^2, x^3 = dy^2 \quad (0 < a < b, 0 < c < d)$;

(c) $y = ax^p, y = bx^p, y = cx^q, y = dx^q \quad (0 < p < q, 0 < a < b, 0 < c < d)$.

3999. (a) $\sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{\dfrac{y}{b}} = 1, \sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{\dfrac{y}{b}} = 2, \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}, \dfrac{4x}{a} = \dfrac{y}{b} \quad (a > 0, b > 0)$;

(b) $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1, \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=4, \frac{x}{a}=\frac{y}{b}, \frac{8x}{a}=\frac{y}{b}\quad(x>0, y>0)$.

4000. $\frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\lambda-c^2}=1$, 其中 λ 取下列各值: $\frac{1}{3}c^2, \frac{2}{3}c^2, \frac{4}{3}c^2, \frac{5}{3}c^2\,(x>0, y>0)$.

4001. 求椭圆 $(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1$ (其中 $\delta=a_1b_2-a_2b_1\neq 0$) 的面积.

4002. 求椭圆

$$\frac{x^2}{\cosh^2 u}+\frac{y^2}{\sinh^2 u}=c^2\quad(u=u_1, u_2)$$

和双曲线

$$\frac{x^2}{\cos^2 v}-\frac{y^2}{\sin^2 v}=c^2\quad(v=v_1, v_2)$$

$$(0<u_1<u_2; 0<v_1<v_2; x>0, y>0)$$

所围的面积.

提示: 令 $x=c\cosh u\cos v, y=c\sinh u\sin v$.

4003. 求平面 $x+y+z=b$ 与曲面 $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=a^2$ 相截所得截断面之面积.

4004. 求平面 $z=1-2(x+y)$ 与曲面 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$ 相截所得截断面之面积.

§3. 体积的计算法

如图 14 所示, 设柱体顶面位于连续曲面 $z=f(x,y)$, 底面位于平面 $z=0$, 侧面垂直于底面, 且底面在平面 Oxy 上所占区域 Ω 是可求积的, 则柱体的体积等于:

$$V=\iint_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

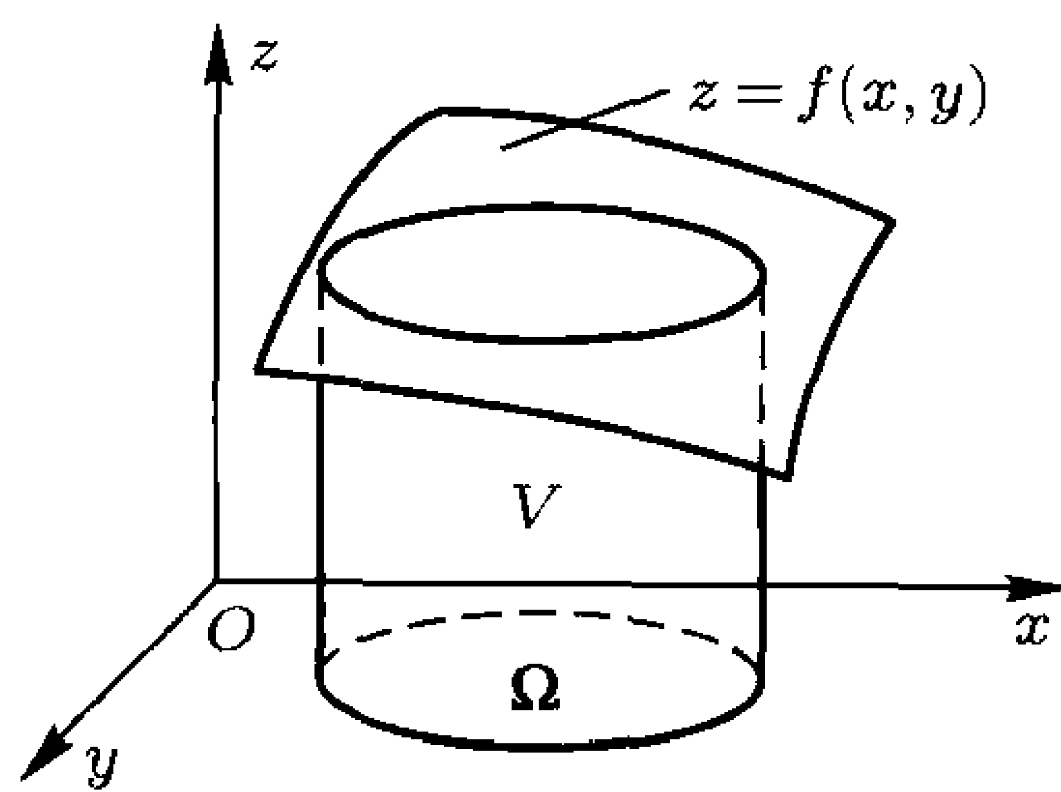


图 14

4005. 试绘出一物体, 其体积等于积分

$$V=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y.$$

4006. 绘出下列二重积分所表示的体积:

(a) $\displaystyle\iint\limits_{\substack{0\leqslant x+y\leqslant 1\\ x\geqslant 0, y\geqslant 0}}(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$;

(b) $\displaystyle\iint\limits_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leqslant 1}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$;

(c) $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$;

(d) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$;

(e) $\displaystyle\iint\limits_{\substack{1\leqslant x\leqslant 2\\ x\leqslant y\leqslant 2x}}\sqrt{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$;

(f) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\sin\pi\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

求下列曲面所围区域的体积:

4007. $z = 1 + x + y, z = 0, x + y = 1, x = 0, y = 0.$

4008. $x + y + z = a, x^2 + y^2 = R^2, x = 0, y = 0, z = 0\ (a \geqslant \sqrt{2}R).$

4009. $z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1, z = 0.$

4010. $z = \cos x \cos y, z = 0, |x + y| \leqslant \dfrac{\pi}{2}, |x - y| \leqslant \dfrac{\pi}{2}.$

4011. $z = \sin \dfrac{\pi y}{2x}, z = 0, y = x, y = 0, x = \pi.$

4012. $z = xy, x + y + z = 1, z = 0.$

变换成极坐标, 求下列曲面所围区域的体积:

4013. $z^2 = xy, x^2 + y^2 = a^2.$

4014. $z = x + y, (x^2 + y^2)^2 = 2xy, z = 0\ \ (x > 0, y > 0).$

4015. $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = x, x^2 + y^2 = 2x, z = 0.$

4016. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 \geqslant a|x|\ (a > 0).$

4017. $x^2 + y^2 - az = 0, (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), z = 0\ \ (a > 0).$

4018. $z = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}, z = 0, x^2 + y^2 = R^2.$

4019. $z = c \cos \dfrac{\pi\sqrt{x^2 + y^2}}{2a}, x^2 + y^2 = a^2, y = x \tan \alpha, y = x \tan \beta\ (a > 0, c > 0, 0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 2\pi).$

4020. $z = x^2 + y^2, z = x + y.$

求下列曲面所围区域的体积 (假定参数是正的):

4021. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}\ \ (z > 0).$

4022. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

4023. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z}{c}, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}, z = 0.$

4024. $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)^2 + \dfrac{z}{c} = 1, z = 0.$

4025. $\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right)^2 + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$

4026. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)^2 = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}.$

4027. $z^2 = xy, x + y = a, x + y = b\ \ (0 < a < b).$

4028. $z = x^2 + y^2, xy = a^2, xy = 2a^2, y = \dfrac{x}{2}, y = 2x, z = 0.$

4029. $z = xy, x^2 = y, x^2 = 2y, y^2 = x, y^2 = 2x, z = 0.$

4030. $z = c \sin \dfrac{\pi xy}{a^2}, z = 0, xy = a^2, y = \alpha x, y = \beta x\ \ (0 < \alpha < \beta, x > 0).$

4031. $z = x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}, z = 0, x + y = 1, x = 0, y = 0.$

4032. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z}{c}=1, \left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1, z=0.$

4033. (a) $z=c\arctan\dfrac{y}{x}, z=0, \sqrt{x^2+y^2}=a\arctan\dfrac{y}{x}\quad(y\geqslant 0)$;

(b) $z=y\mathrm{e}^{-\frac{xy}{a^2}}, xy=a^2, xy=2a^2, y=m, y=n, z=0\quad(0<m<n)$.

4034. $\dfrac{x^n}{a^n}+\dfrac{y^n}{b^n}+\dfrac{z^n}{c^n}=1, x=0, y=0, z=0\quad(n>0)$.

4035. $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^n+\left(\dfrac{z}{c}\right)^m=1, x=0, y=0, z=0\ (n>0, m>0)$.

§4. 曲面面积的计算法

1. 曲面由显函数给出的情形. 光滑曲面 $z=z(x,y)$ 的面积由以下积分表示:

$$S=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 Ω 为该曲面在 Oxy 平面上的投影.

2. 曲面由参数方程给出的情形. 若曲面是由参数方程给出的:

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v),$$

其中 $(u,v)\in\Omega, \Omega$ 为封闭可求积的有限区域, 且函数 x, y 和 z 在区域 Ω 内连续可微, 则对于曲面的面积有公式

$$S=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

其中

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$
$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$
$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

4036. 求曲面 $az=xy$ 包含在圆柱 $x^2+y^2=a^2$ 内那部分的面积.

4037. 求以曲面 $x^2+z^2=a^2$ 和 $y^2+z^2=a^2$ 为界的物体的表面积.

4038. 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 包含在柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(b\leqslant a)$ 内那部分的面积.

4039. 求曲面 $z^2=2xy$ 被平面 $x+y=1, x=0, y=0$ 所截部分的面积.

4040. 求曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在圆柱 $x^2+y^2=\pm ax$ 内那部分的面积 (维维亚尼问题).

4041. 求曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 包含在圆柱 $x^2+y^2=2x$ 内那部分的面积.

4042. 求曲面 $z=\sqrt{x^2-y^2}$ 包含在柱面 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 内那部分的面积.

4043. 求曲面 $z=\dfrac{1}{2}(x^2-y^2)$ 被平面 $x-y=\pm1, x+y=\pm1$ 所截部分的面积.

4044. 求曲面 $x^2+y^2=2az$ 包含在柱面 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ 内那部分的面积.

4045. (a) 求曲面 $x^2+y^2=a^2$ 被平面 $x+z=0, x-z=0\,(x>0, y>0)$ 所截部分的面积;

(b) 求曲面 $(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}+z=1$ 被平面 $z=0$ 所截部分的面积;

(c) 求曲面 $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^2+\dfrac{2z}{c}=1$ 被平面 $x=0, y=0$ 和 $z=0$ 所截部分的面积;

(d) 求曲面 $\dfrac{x^2}{a}-\dfrac{y^2}{b}=2z$ 被曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1\ \ (z\geqslant0)$ 所截部分的面积;

(e) 求曲面 $\sin z=\sinh x\cdot\sinh y$ 被平面 $x=1$ 和 $x=2\ \ (y\geqslant0)$ 所截部分的面积.

4046. 求以曲面 $x^2+y^2=\dfrac{1}{3}z^2$ 和 $x+y+z=2a\ \ (a>0)$ 为界的物体的表面积和体积.

4047. 求球面在两条纬线和两条经线之间那部分的面积.

4048. 求螺旋面

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=h\varphi$$

在 $0<r<a, 0<\varphi<2\pi$ 那部分的面积.

4049. 求环面

$$x=(b+a\cos\psi)\cos\varphi,\quad y=(b+a\cos\psi)\sin\varphi,\quad z=a\sin\psi\quad(0<a\leqslant b)$$

在两条经线 $\varphi=\varphi_1, \varphi=\varphi_2$ 和两条纬线 $\psi=\psi_1, \psi=\psi_2$ 之间那部分的面积. 整个环的表面积等于什么?

4050. 求矩形 $x=a>0, 0\leqslant y\leqslant b, 0\leqslant z\leqslant c$ 对坐标原点的立体角 ω. 若 a 很大, 推出 ω 的近似公式.

§5. 二重积分在力学上的应用

1. 质心. 若薄板 Ω 位于平面 Oxy 内, x_0, y_0 为其质心坐标, $\rho=\rho(x,y)$ 为其面密度, 则

$$x_0=\frac{1}{M}\iint\limits_{\Omega}\rho x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\quad y_0=\frac{1}{M}\iint\limits_{\Omega}\rho y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\tag{1}$$

其中 $M=\iint\limits_{\Omega}\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 为薄板的质量.

若薄板是均质的, 则在公式 (1) 中应令 $\rho=1$.

2. 转动惯量. I_x 和 I_y 分别为平面 Oxy 内薄板 Ω 对坐标轴 Ox 和 Oy 的转动惯量, 可表示为以下公式:

$$I_x=\iint\limits_{\Omega}\rho y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\quad I_y=\iint\limits_{\Omega}\rho x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\tag{2}$$

其中 $\rho=\rho(x,y)$ 为薄板的面密度.

还可研究惯性积

$$I_{xy} = \iint\limits_{\Omega} \rho xy \, dx \, dy. \tag{3}$$

在公式 (2) 中取 $\rho = 1$, 我们就得到平面图形的几何转动惯量.

4051. 求边长为 a 的正方形薄板的质量, 设薄板上每一点的面密度与该点到正方形顶点之一的距离成正比, 且在正方形中心等于 ρ_0.

求以下列曲线为界的均匀薄板的质心坐标:

4052. $ay = x^2, x + y = 2a \quad (a > 0)$.

4053. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, x = 0, y = 0$.

4054. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad (x > 0, y > 0)$.

4055. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^3 = \frac{xy}{c^2}$ (线圈).

4056. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy \quad (x > 0, y > 0)$.

4057. $r = a(1 + \cos\varphi), \varphi = 0$.

4058. $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi),\ y = 0$.

4059. 求圆形薄板 $x^2 + y^2 \leqslant a^2$ 的质心坐标. 设它在点 $M(x, y)$ 的面密度与点 M 到点 $A(a, 0)$ 的距离成正比.

4060. 求曲线

$$y = \sqrt{2px}, \quad y = 0, \quad x = X$$

所围图形的质心在参数 X 变化时所描绘的曲线.

求由下列曲线所围的面积 ($\rho = 1$) 对坐标轴 Ox 和 Oy 的转动惯量 I_x 和 I_y:

4061. $\frac{x}{b_1} + \frac{y}{h} = 1, \frac{x}{b_2} + \frac{y}{h} = 1, y = 0 \quad (b_1 > 0, b_2 > 0, h > 0)$.

4062. $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2, x = 0, y = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant a)$.

4063. $r = a(1 + \cos\varphi)$.

4064. $x^4 + y^4 = a^2\ (x^2 + y^2)$.

4065. $xy = a^2, xy = 2a^2, x = 2y, 2x = y \quad (x > 0, y > 0)$.

4066.1. 求曲线

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

所围区域 S 的极转动惯量

$$I_0 = \iint\limits_{S} (x^2 + y^2) \, dx \, dy.$$

4066.2. 求曲线

$$ay = x^2, \quad ax = y^2 \quad (a > 0)$$

所围平面图形的惯性积 I_{xy}.

4067. 证明公式:

$$I_l = I_{l_0} + Sd^2,$$

式中 I_l, I_{l_0} 是图形 S 对二平行轴 l 和 l_0 的转动惯量, 其中 l_0 是通过图形的质心, 而 d 为两轴间的距离.

4068. 证明: 平面图形 S 对通过其质心 $O(0, 0)$ 并与 Ox 轴成 α 角的直线的转动惯量等于

$$I = I_x \cos^2\alpha - 2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha + I_y\sin^2\alpha,$$

其中 I_x 和 I_y 为图形 S 对 Ox 轴和 Oy 轴的转动惯量, I_{xy} 为惯性积:

$$I_{xy} = \iint_S \rho xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

4069. 求以 a 为边的正三角形对通过三角形质心并与它的高成 α 角的直线的转动惯量.

4070. 设圆柱形容器 $x^2+y^2=a^2, z=0$ 内盛有水, 水平面为 $z=h$, 求水对容器侧壁 $x \geqslant 0$ 的压力.①

4071. 半径为 a 的球体沉入密度为 δ 的液体中深度为 h (由球心算起) 的地方, 这里 $h \geqslant a$. 求液体对球的上表面和下表面的压力.

4072. 底半径为 a 高为 b 的直圆柱体完全沉入密度为 δ 的液体中, 其中心在水面下的深度为 h, 而圆柱的轴与竖直方向成 α 角. 求液体对圆柱上底和下底的压力.

4073. 求均匀的圆柱体 $x^2+y^2 \leqslant a^2, 0 \leqslant z \leqslant h$ 对质点 $P(0,0,b)$ 的引力, 设圆柱的质量等于 M, 而质点的质量等于 m.

4074. 物体对挤压面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$$

的压强分布由公式

$$p = p_0\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$$

给出. 求物体对此面的平均压强.

4075. 以 a 和 b 为边的矩形草地上均匀地覆盖有已收割的干草, 其面密度为 ρ. 若运送质量为 M 的货物到距离为 r 的地方所需的功等于 kMr $(0<k<1)$②, 则为了把所有干草集中在草地的中心, 至少应消耗多少功?

§6. 三重积分

1. 三重积分的直接计算法. 若函数 $f(x,y,z)$ 是连续的, 且有界区域 V 由下列不等式给出:

$$x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \quad y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x), \quad z_1(x,y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y),$$

其中 $y_1(x), y_2(x), z_1(x,y), z_2(x,y)$ 皆为连续函数, 则函数 $f(x,y,z)$ 在区域 V 内的三重积分可按公式

$$\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{x_1}^{x_2}\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

来计算. 有时采用以下公式也很方便:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{x_1}^{x_2}\mathrm{d}x\iint_{S(x)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 $S(x)$ 是用平面 $x=$ 常数截区域 V 所得的截面.

---

①关于习题 4070~4072 可参阅 166 页的脚注. —— 译注

②原书如此, 其实系数 k 是有量纲的, 它的值也不应限制在 0 与 1 之间. —— 译注

2. 三重积分中的变量代换. 若连续可微函数

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

给出 $Oxyz$ 空间的有界可求积三维闭区域 V 与 $O'uvw$ 空间的区域 V' 之间的一一映射, 并且当 $(u, v, w) \in V'$ 时

$$I = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \neq 0,$$

则成立公式

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{V'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))|I|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w.$$

在特殊情形下, 有: 1) 圆柱坐标系 φ, r, h, 其中

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = h, \quad \frac{D(x, y, z)}{D(\varphi, r, h)} = r;$$

2) 球坐标系 φ, ψ, r, 其中

$$x = r\cos\varphi\cos\psi, \quad y = r\sin\varphi\cos\psi, \quad z = r\sin\psi, \quad \frac{D(x, y, z)}{D(\varphi, \psi, r)} = r^2\cos\psi.$$

计算下列三重积分:

4076. $\iiint\limits_V xy^2z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 V 是曲面 $z = xy, y = x, x = 1, z = 0$ 所围的区域.

4077. $\iiint\limits_V \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(1 + x + y + z)^3}$, 其中 V 是曲面 $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$ 所围的区域.

4078. $\iiint\limits_V xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 V 是曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = 0, y = 0, z = 0$ 所围的区域.

4079. $\iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 V 是曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 所围的区域.

4080. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 V 是曲面 $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$ 所围的区域.

在下列三重积分内, 用不同方法配置积分的上下限:

4081. $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{x+y} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z$.

4082. $\int_{-1}^1 \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z)\,\mathrm{d}z$.

4083. $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z$.

用一重积分代替三重积分:

4084. $\int_0^x \mathrm{d}\xi \int_0^\xi \mathrm{d}\eta \int_0^\eta f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta.$ **4085.** $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{x+y} f(z)\,\mathrm{d}z.$

4086. 设 $f(x,y,z) = F'''_{xyz}(x,y,z)$, 且 a, b, c, A, B, C 为常数, 求

$$\int_a^A \mathrm{d}x \int_b^B \mathrm{d}y \int_c^C f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

变换为球坐标, 计算积分:

4087. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 V 是曲面 $x^2+y^2+z^2=z$ 所围的区域.

4088. $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2\,\mathrm{d}z.$

4089. 在积分中变换为球坐标:

$$\iiint\limits_V f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 V 是曲面 $z=x^2+y^2, x=y, x=1, y=0, z=0$ 所围的区域.

4090. 进行适当的变量代换, 计算三重积分

$$\iiint\limits_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 V 为椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

4091. 变换为圆柱坐标, 计算积分

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 V 是曲面 $x^2+y^2=2z, z=2$ 所围的区域.

4092. 计算积分

$$\iiint\limits_V x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 V 是曲面 $z=ay^2, z=by^2, y>0\ (0<a<b), z=\alpha x, z=\beta x\ (0<\alpha<\beta), z=h\ (h>0)$ 所围的区域.

4093. 求积分

$$\iiint\limits_V xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中区域 V 位于象限 $x>0, y>0, z>0$ 且由下列曲面围成:

$$z=\frac{x^2+y^2}{m},\quad z=\frac{x^2+y^2}{n},\quad xy=a^2,\quad xy=b^2,\quad y=\alpha x,\quad y=\beta x$$
$$(0<a<b; 0<\alpha<\beta; 0<m<n).$$

4094. 求函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在区域 $x^2+y^2+z^2 \leqslant x+y+z$ 内的平均值.

4095. 求函数

$$f(x,y,z)=\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}$$

在区域 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$ 内的平均值.

4096. 利用中值定理, 估计积分

$$u=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

其中 $a^2+b^2+c^2>R^2$.

4097. 证明: 若函数 $f(x,y,z)$ 在区域 V 内是连续的, 且对于任何区域 $\omega\subset V$ 有

$$\iiint\limits_{\omega}f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=0,$$

则当 $(x,y,z)\in V$ 时 $f(x,y,z)\equiv 0$.

4098. 求 $F'(t)$, 设:

(a) $F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 f 为可微函数;

(b) $F(t)=\iiint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\0\leqslant y\leqslant t\\0\leqslant z\leqslant t}}f(xyz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 f 为可微函数.

4099. 求

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}x^my^nz^p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 m, n, p 为非负整数.

4100. 令 $x+y+z=\xi,\ y+z=\xi\eta,\ z=\xi\eta\zeta$, 计算狄利克雷积分

$$\iiint\limits_{V}x^py^qz^r(1-x-y-z)^s\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\quad(p>0,q>0,r>0,s>0),$$

其中 V 是平面 $x+y+z=1,x=0,y=0,z=0$ 所围的区域.

§7. 利用三重积分计算体积

区域的体积 V 可表示为以下公式:

$$V=\iiint\limits_{V}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

求以下列曲面为界的物体的体积:

4101. $z=x^2+y^2,z=2x^2+2y^2,y=x,y=x^2$.

4102. $z=x+y,z=xy,x+y=1,x=0,y=0$.

4103. $x^2+z^2=a^2,x+y=\pm a,x-y=\pm a$.

4104. $az=x^2+y^2,z=\sqrt{x^2+y^2}\quad(a>0)$.

4105. $az=a^2-x^2-y^2,z=a-x-y,x=0,y=0,z=0\quad(a>0)$.

4106. $z=6-x^2-y^2,z=\sqrt{x^2+y^2}$.

变换为球坐标或圆柱坐标, 计算以下曲面所围的体积:

4107. $x^2+y^2+z^2=2az, x^2+y^2\leqslant z^2$.

4108. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$.

4109. $(x^2+y^2+z^2)^3=3xyz$.

4110. $x^2+y^2+z^2=a^2, x^2+y^2+z^2=b^2, x^2+y^2=z^2\ (z\geqslant 0)\ (0<a<b)$.

在下列各题中最好利用广义球坐标

$$r,\varphi,\psi\quad \left(r\geqslant 0; 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi; -\frac{\pi}{2}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

它们由以下公式引入:

$$\begin{cases} x=ar\cos^\alpha\varphi\cos^\beta\psi,\\ y=br\sin^\alpha\varphi\cos^\beta\psi,\\ z=cr\sin^\beta\psi \end{cases}$$

(a,b,c,α,β 为常数), 并且

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)}=\alpha\beta abcr^2\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi\cos^{2\beta-1}\psi\sin^{\beta-1}\psi.$$

求以下列曲面为界的物体的体积:

4111. $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=\dfrac{x}{h}$.

4112. (a) $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$; (b) $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}$.

4113. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z}{c}$.

4114. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^4}{c^4}=1$.

4115. $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)^2+\dfrac{z^4}{c^4}=1$.

利用适当的变量代换, 计算以下列曲面为界的物体的体积 (假定参数是正的):

4116. (a) $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)^2=\dfrac{x}{h}+\dfrac{y}{k}\ (x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0)$;

(b) $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)^2=\dfrac{x}{h}-\dfrac{y}{k}\ (x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0)$.

4117. (a) $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)^4=\dfrac{xyz}{abc}\ (x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0)$;

(b) $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^2+\left(\dfrac{z}{c}\right)^2=1\ (x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0)$.

4118. (a) $\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}+\sqrt{\dfrac{z}{c}}=1\quad (x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0)$;

(b) $\sqrt[3]{\dfrac{x}{a}}+\sqrt[3]{\dfrac{y}{b}}+\sqrt[3]{\dfrac{z}{c}}=1\quad (x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0)$;

(c) $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}=1$.

4119. $z=x^2+y^2, z=2(x^2+y^2), xy=a^2, xy=2a^2, x=2y, 2x=y\ (x>0, y>0)$.

4120. $x^2+z^2=a^2, x^2+z^2=b^2, x^2-y^2-z^2=0 \quad (x>0)$.

4121. $(x^2+y^2+z^2)^3=\dfrac{a^6x^2}{x^2+y^2}$. **4122.** $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=\dfrac{z}{h}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{\frac{z^2}{c^2}}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}$.

4123. $\dfrac{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}}{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}}=\dfrac{2}{\pi}\arcsin\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right), \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1, x=0, x=a$.

4124. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=\ln\dfrac{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}}{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}}, x=0, z=0, \dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=0, \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

4125. 曲面 $x^2+y^2+az=4a^2$ 将球 $x^2+y^2+z^2=4az$ 分成两部分, 求这两部分的体积之比.

4126. 求以曲面

$$x^2+y^2=az, z=2a-\sqrt{x^2+y^2} \quad (a>0)$$

为界的物体的体积和表面积.

4127. 求以平面

$$a_1x+b_1y+c_1z=\pm h_1,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=\pm h_2,$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=\pm h_3$$

为界的平行六面体的体积, 设

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0.$$

4128. 求以曲面

$$(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2+(a_3x+b_3y+c_3z)^2=h^2$$

为界的物体的体积, 设

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0.$$

4129. 求以曲面

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^n+\frac{z^{2n}}{c^{2n}}=\frac{z}{h}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^{n-2} \quad (n>1)$$

为界的物体的体积.

4130. 一物体位于正象限 $Oxyz$ $(x>0, y>0, z>0)$, 并以曲面

$$\frac{x^m}{a^m}+\frac{y^n}{b^n}+\frac{z^p}{c^p}=1 \quad (m>0, n>0, p>0), \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0$$

为界, 求其体积.

§8. 三重积分在力学上的应用

1. 物体的质量. 若一物体占有区域 V, $\rho=\rho(x,y,z)$ 为它在点 (x,y,z) 的密度, 则该物体的质量等于

$$M=\iiint\limits_V \rho\;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \tag{1}$$

2. 物体的质心. 物体的质心坐标 (x_0,y_0,z_0) 按下列公式来计算:

$$\begin{cases} x_0=\dfrac{1}{M}\displaystyle\iiint\limits_V \rho x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\\ y_0=\dfrac{1}{M}\displaystyle\iiint\limits_V \rho y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\\ z_0=\dfrac{1}{M}\displaystyle\iiint\limits_V \rho z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \end{cases} \tag{2}$$

若物体是均匀的, 则在公式 (1) 和 (2) 中可令 $\rho=1$.

3. 转动惯量. 积分

$$I_{xy}=\iiint\limits_V \rho z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\quad I_{yz}=\iiint\limits_V \rho x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\quad I_{zx}=\iiint\limits_V \rho y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

分别称为物体对坐标平面的转动惯量.

积分

$$I_l=\iiint\limits_V \rho r^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

(其中 r 为物体各点 (x,y,z) 与轴 l 的距离) 称为物体对某轴 l 的转动惯量. 特别是, 对于坐标轴 Ox,Oy,Oz 分别有:

$$I_x=I_{xy}+I_{xz},\quad I_y=I_{yx}+I_{yz},\quad I_z=I_{zx}+I_{zy}.$$

积分

$$I_0=\iiint\limits_V \rho(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

称为物体对坐标原点的转动惯量.

显然有

$$I_0=I_{xy}+I_{yz}+I_{zx}.$$

4. 引力势. 积分

$$u(x,y,z)=\iiint\limits_V \rho(\xi,\eta,\zeta)\frac{\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta}{r}$$

称为物体在点 $P(x,y,z)$ 的牛顿引力势, 式中 V 为物体所占区域, $\rho=\rho(\xi,\eta,\zeta)$ 为物体的密度, 且

$$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}.$$

质量为 m 的质点吸引物体的力在坐标轴 Ox, Oy, Oz 上的投影 X, Y, Z 分别等于:

$$X = Gm\frac{\partial u}{\partial x} = Gm\iiint\limits_V \rho\frac{\xi - x}{r^3}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta,$$

$$Y = Gm\frac{\partial u}{\partial y} = Gm\iiint\limits_V \rho\frac{\eta - y}{r^3}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta,$$

$$Z = Gm\frac{\partial u}{\partial z} = Gm\iiint\limits_V \rho\frac{\zeta - z}{r^3}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta,$$

其中 G 为引力常量.

4131. 设物体在点 $M(x,y,z)$ 的密度由公式 $\rho = x+y+z$ 给出, 求占有单位体积 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1$ 之物体的质量.

4132. 若物体的密度按规律 $\rho = \rho_0 \mathrm{e}^{-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ (其中 $\rho_0 > 0$ 及 $k > 0$ 为常数) 而变化, 求占有无限区域 $x^2+y^2+z^2 \geqslant 1$ 的物体的质量.

求以下列曲面为界的均匀物体的质心坐标:

4133. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}, z = c.$　**4134.** $z = x^2+y^2, x+y = a, x = 0, y = 0, z = 0.$

4135. $x^2 = 2pz, y^2 = 2px, x = \dfrac{p}{2}, z = 0.$

4136. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0.$

4137. $x^2+z^2 = a^2, y^2+z^2 = a^2\ (z \geqslant 0).$　**4138.** $x^2+y^2 = 2z, x+y = z.$

4139. $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right)^2 = \dfrac{xyz}{abc}\ (x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, a > 0, b > 0, c > 0).$

4140. $z = x^2+y^2, z = \dfrac{1}{2}(x^2+y^2), x+y = \pm 1, x-y = \pm 1.$

4141. $\dfrac{x^n}{a^n} + \dfrac{y^n}{b^n} + \dfrac{z^n}{c^n} = 1, x = 0, y = 0, z = 0\ \ (n > 0; x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0).$

4142. 求形状为立方体

$$0 \leqslant x \leqslant 1,\quad 0 \leqslant y \leqslant 1,\quad 0 \leqslant z \leqslant 1$$

的物体的质心坐标, 设此物体在点 (x,y,z) 的密度等于

$$\rho = x^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}} y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}} z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}},$$

其中 $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, 0 < \gamma < 1.$

求以下列曲面 (参量是正的) 为界的均匀物体对坐标平面的转动惯量:

4143. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$

4144. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$　**4145.** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}, z = c.$

4146. (a) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{x}{a};$　(b) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2\dfrac{z}{c}, \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}.$

4147. (a) $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}$;

(b) $\left(\dfrac{x}{a}\right)^n+\left(\dfrac{y}{b}\right)^n+\left(\dfrac{z}{c}\right)^n=1, x=0, y=0, z=0$ $(n>0; x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0)$.

求以下列曲面为界的均匀物体对 Oz 轴的转动惯量:

4148. $z=x^2+y^2, x+y=\pm 1, x-y=\pm 1, z=0$.

4149. (a) $x^2+y^2+z^2=2, x^2+y^2=z^2$ $(z>0)$; (b) $(x^2+y^2+z^2)^3=a^5z$.

4150. 求质量为 M 的非均匀球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 对其直径的转动惯量, 设球内各点 $P(x,y,z)$ 的密度与该点至球心的距离成正比.

4151. 证明等式:

$$I_l=I_{l_0}+Md^2,$$

其中 I_l 为物体对某轴 l 的转动惯量, I_{l_0} 为对平行于 l 并通过物体质心的轴 l_0 的转动惯量, d 为此二轴之间的距离, M 为物体的质量.

4152. 证明: 占有区域 V 的物体对过其质心 $O(0,0,0)$ 并与坐标轴成角 α, β, γ 的轴 l 的转动惯量等于:

$$I_l=I_x\cos^2\alpha+I_y\cos^2\beta+I_z\cos^2\gamma-2K_{xy}\cos\alpha\cos\beta$$
$$-2K_{xz}\cos\alpha\cos\gamma-2K_{yz}\cos\beta\cos\gamma,$$

其中 I_x, I_y, I_z 为物体对坐标轴的转动惯量, 而

$$K_{xy}=\iiint\limits_V \rho xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\quad K_{xz}=\iiint\limits_V \rho xz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\quad K_{yz}=\iiint\limits_V \rho yz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

为惯性积.

4153. 求密度为 ρ_0 的均匀圆柱体 $x^2+y^2\leqslant a^2, -h\leqslant z\leqslant h$ 对直线 $x=y=z$ 的转动惯量.

4154. 求密度为 ρ_0, 以曲面

$$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2)$$

为界的均匀物体对坐标原点的转动惯量.

4155. 求密度为 ρ_0 的均匀球体 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R^2$ 在点 $P(x,y,z)$ 的牛顿引力势.

提示: 令 $O\zeta$ 轴通过点 $P(x,y,z)$.

4156. 求球壳层 $R_1^2\leqslant\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R_2^2$ 在点 $P(x,y,z)$ 的牛顿引力势, 设密度 $\rho=f(R)$, 此处 f 为已知函数, 而

$$R=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}.$$

4157. 求密度 ρ_0 恒定的圆柱体 $\xi^2+\eta^2\leqslant a^2, 0\leqslant\zeta\leqslant h$ 在点 $P(0,0,z)$ 的牛顿引力势.

4158. 半径为 R 质量为 M 的均匀球体 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R^2$ 以怎样的力吸引质量为 m 的质点 $P(0,0,a)$?

4159. 求密度为 ρ_0 的均匀圆柱体 $\xi^2+\eta^2\leqslant a^2, 0\leqslant\zeta\leqslant h$ 对单位质量质点 $P(0,0,z)$ 的引力.

4160. 求密度为 ρ_0 的均匀球锥体对位于其顶点的单位质量质点的引力, 设球面半径为 R, 而轴截面的扇形的角等于 2α.

§9. 二重和三重广义积分

1. 无界区域的情形. 若二维区域 Ω 是无界的, 函数 $f(x,y)$ 在区域 Ω 上连续, 则定义:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\Omega_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{1}$$

其中 Ω_n 是可求积有界封闭区域, 并且它们组成 Ω 的任意一个竭尽递增序列[①]. 若右端的极限存在且与序列 Ω_n 的选择无关, 则相应积分称为*收敛的*; 否则称为*发散的*.

类似地定义出连续函数在无界三维区域上的三重广义积分.

2. 不连续函数的情形. 若函数 $f(x,y)$ 在有界封闭区域 Ω 内除了点 $P(a,b)$ 而外处处是连续的, 则定义:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{\varepsilon\to+0}\iint\limits_{\Omega-U_\varepsilon} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{2}$$

其中 U_ε 是包含点 P 的以 ε 为直径的区域, 并且当极限存在时, 所研究的积分称为*收敛的*; 否则称为*发散的*.

假设在点 $P(a,b)$ 的邻近有等式

$$f(x,y) = \frac{\varphi(x,y)}{r^\alpha},$$

其中函数 $\varphi(x,y)$ 的绝对值是介于二正数 m 和 M 之间且

$$r = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

则 1) 当 $\alpha < 2$ 时, 积分 (2) 收敛; 2) 当 $\alpha \geqslant 2$ 时, 积分 (2) 发散.

若函数 $f(x,y)$ 有间断线, 也可类似地定义出广义积分 (2).

不连续函数的广义积分的概念易于引申到三重积分的情形.

研究下列具有无界积分域的广义积分的收敛性 ($0 < m \leqslant |\varphi(x,y)| \leqslant M$):

4161. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1} \frac{\varphi(x,y)}{(x^2+y^2)^p}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

4162. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}.$

4163. $\displaystyle\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant 1} \frac{\varphi(x,y)}{(1+x^2+y^2)^p}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

4164. $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\geqslant 1} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{|x|^p+|y|^q}\ (p>0, q>0).$

4165. $\displaystyle\iint\limits_{x+y\geqslant 1} \frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

4166. 证明: 若连续函数 $f(x,y)$ 不为负, S_n $(n=1,2,\cdots)$ 为有界闭区域, 并且组成区域 S 的任意一个竭尽递增序列, 则

[①] 区域 Ω 的竭尽递增序列是指这样的序列 Ω_n, 对任意正整数 n 有 $\Omega_n \subset \Omega_{n+1} \subset \Omega$, 且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Omega_n = \Omega$. —— 译注

$$\iint\limits_{S} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty}\iint\limits_{S_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

这里左端与右端同时有意义或同时无意义.

4167. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant n\\|y|\leqslant n}}\sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi,$$

然而

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2\pi n}\sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$$

(n 为正整数).

4168. 证明: 尽管二重积分

$$\int_1^{+\infty}\mathrm{d}x\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y \quad 及 \quad \int_1^{+\infty}\mathrm{d}y\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

收敛, 但积分

$$\iint\limits_{x\geqslant 1,y\geqslant 1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

发散.

计算下列积分 (参数是正的):

4169. $\displaystyle\iint\limits_{\substack{xy\geqslant 1\\x\geqslant 1}}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^py^q}.$

4170. $\displaystyle\iint\limits_{\substack{x+y\geqslant 1\\0\leqslant x\leqslant 1}}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x+y)^p}.$

4171. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$

4172. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^p}.$

4173. $\displaystyle\iint\limits_{y\geqslant x^2+1}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}.$

4174. $\displaystyle\iint\limits_{0\leqslant x\leqslant y}\mathrm{e}^{-(x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

变换为极坐标, 计算下列积分:

4175. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

4176. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

4177. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

计算下列积分:

4178. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $a<0, ac-b^2>0$.

4179. $\displaystyle\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geqslant 1} \mathrm{e}^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

4180. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\mathrm{e}^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+2\varepsilon\frac{x}{a}\frac{y}{b}+\frac{y^2}{b^2}\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\ (0<|\varepsilon|<1).$

研究下列不连续函数的二重广义积分的收敛性 $(0<m\leqslant|\varphi(x,y)|\leqslant M)$:

4181. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 式中区域 Ω 由条件 $|y|\leqslant x^2, x^2+y^2\leqslant 1$ 确定.

4182. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+xy+y^2)^p}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

4183. $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{|x|^p+|y|^q}\ (p>0,q>0).$

4184. $\displaystyle\int_0^a\int_0^a\frac{\varphi(x,y)}{|x-y|^p}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

4185. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(1-x^2-y^2)^p}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

4186. 证明: 若 1) 函数 $\varphi(x,y)$ 在有界区域 $a\leqslant x\leqslant A, b\leqslant y\leqslant B$ 内连续; 2) 函数 $f(x)$ 在闭区间 $a\leqslant x\leqslant A$ 上连续; 3) $p<1$, 则积分

$$\int_a^A \mathrm{d}x\int_b^B\frac{\varphi(x,y)}{|f(x)-y|^p}\,\mathrm{d}y$$

收敛.

计算下列积分:

4187. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

4188. $\displaystyle\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}\ (a>0).$

4189. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega}\ln\sin(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中区域 Ω 是由直线 $y=0, y=x, x=\pi$ 围成的.

4190. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

研究下列三重积分的收敛性:

4191. $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1}\frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 $0<m\leqslant|\varphi(x,y,z)|\leqslant M$.

4192. $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 $0<m\leqslant|\varphi(x,y,z)|\leqslant M$.

4193. $\displaystyle\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|>1}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{|x|^p+|y|^q+|z|^r}\ (p>0,q>0,r>0).$

4194. $\displaystyle\int_0^a\int_0^a\int_0^a\frac{f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$, 其中 $0<m\leqslant|f(x,y,z)|\leqslant M$, 而 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是闭区间 $[0,a]$ 上的连续函数.

4195. $\iiint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\|y|\leqslant 1\\|z|\leqslant 1}} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{|x+y-z|^p}.$

计算下列积分:

4196. $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x^p y^q z^r}.$

4197. $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^3}.$

4198. $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}.$

4199. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$

4200. 计算积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-P(x_1,x_2,x_3)}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3,$$

其中 $P(x_1,x_2,x_3)=\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j(a_{ij}=a_{ji})$ 为正定二次型.

§10. 多重积分

1. 多重积分的直接计算法. 若函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在由下列不等式确定的有界区域 Ω 内是连续的:

$$\begin{cases} x_1'\leqslant x_1\leqslant x_1'', \\ x_2'(x_1)\leqslant x_2\leqslant x_2''(x_1), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n'(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})\leqslant x_n\leqslant x_n''(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}), \end{cases}$$

其中 x_1' 和 x_1'' 为常数, $x_2'(x_1),x_2''(x_1),\cdots,x_n'(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}),x_n''(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$ 为连续函数, 则相应的多重积分可按下列公式来计算:

$$\iint\limits_{\Omega}\cdots\int f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$
$$=\int_{x_1'}^{x_1''}\mathrm{d}x_1\int_{x_2'(x_1)}^{x_2''(x_1)}\mathrm{d}x_2\cdots\int_{x_n'(x_1,\cdots,x_{n-1})}^{x_n''(x_1,\cdots,x_{n-1})} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_n.$$

2. 多重积分中的变量代换. 若 1) 函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在有界可测区域 Ω 内是一致连续的; 2) 连续可微函数

$$x_i=\varphi_i(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

把 $Ox_1x_2\cdots x_n$ 空间内的区域 Ω 一一映射成 $O'\xi_1\xi_2\cdots\xi_n$ 空间内的有界区域 Ω'; 3) 在区域 Ω' 内雅可比行列式

$$I=\frac{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{D(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)}\neq 0,$$

则成立公式

$$\iint\limits_{\Omega}\cdots\int f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$
$$=\iint\limits_{\Omega'}\cdots\int f(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)|I|\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2\cdots\mathrm{d}\xi_n.$$

特别是, 根据公式

$$\begin{aligned}
&x_1=r\cos\varphi_1,\\
&x_2=r\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&x_{n-1}=r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1},\\
&x_n=r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}
\end{aligned}$$

变换成极坐标 $(r,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1})$ 时, 有:

$$I=\frac{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{D(r,\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1})}=r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}.$$

4201. 设 $K(x,y)$ 为区域 $R(a\leqslant x\leqslant b;a\leqslant y\leqslant b)$ 内的连续函数, 且

$$K_n(x,y)=\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t_2)\cdots K(t_n,y)\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n,$$

证明:

$$K_{n+m+1}(x,y)=\int_a^b K_n(x,t)K_m(t,y)\,\mathrm{d}t.$$

4202. 设 $f=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为区域 $0\leqslant x_i\leqslant x\ (i=1,2,\cdots,n)$ 内的连续函数. 证明等式:

$$\int_0^x\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f\,\mathrm{d}x_n=\int_0^x\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^x\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_2}^x f\,\mathrm{d}x_1\quad(n\geqslant 2).$$

4203. 证明:

$$\int_0^t\mathrm{d}t_1\int_0^{t_1}\mathrm{d}t_2\cdots\int_0^{t_{n-1}}f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_n)\,\mathrm{d}t_n=\frac{1}{n!}\left\{\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\}^n,$$

其中 f 为连续函数.

计算下列多重积分:

4204. (a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$;

(b) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$.

4205. $\displaystyle I_n=\iint\limits_{\substack{x_1\geqslant0,x_2\geqslant0,\cdots,x_n\geqslant0\\x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant a}}\cdots\int\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$

4206. $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}x_1x_2\cdots x_n\,\mathrm{d}x_n.$

4207. $\displaystyle\iint\limits_{\substack{x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0\\ x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 1}}\cdots\int \sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$

4208. 求以平面

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=\pm h_i\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

为界的 n 维平行 $2n$ 面体的体积, 这里设 $\Delta=|a_{ij}|\neq 0$.

4209. 求 n 维角锥

$$\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\cdots+\frac{x_n}{a_n}\leqslant 1,\quad x_i\geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,n)\quad (a_i>0, i=1,2,\cdots,n)$$

的体积.

4210. 求以曲面

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2}=\frac{x_n^2}{a_n^2},\quad x_n=a_n$$

为界的 n 维圆锥的体积.

4211. 求 n 维球体

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant a^2$$

的体积.

4212. 求 $\displaystyle\iint\limits_{\Omega}\cdots\int x_n^2\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$, 其中区域 Ω 是由以下不等式确定的:

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2\leqslant a^2,\quad -\frac{h}{2}\leqslant x_n\leqslant\frac{h}{2}.$$

4213. 计算

$$\iint\limits_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant 1}\cdots\int\frac{\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2}}.$$

4214. 证明等式:

$$\int_0^x\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_n)\,\mathrm{d}x_n=\int_0^x f(u)\frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}u.$$

4215. 证明等式:

$$\int_0^x x_1\,\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}x_2\,\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_n}f(x_{n+1})\,\mathrm{d}x_{n+1}=\frac{1}{2^n n!}\int_0^x(x^2-u^2)^n f(u)\,\mathrm{d}u.$$

4216. 证明狄利克雷公式:

$$\iint\limits_{\substack{x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0\\ x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 1}}\cdots\int x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdots x_n^{p_n-1}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n+1)}\ (p_1,p_2,\cdots,p_n>0).$$

4217. 证明刘维尔公式:

$$\iint\limits_{\substack{x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0\\x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 1}}\cdots\int f(x_1+x_2+\cdots+x_n)x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdots x_n^{p_n-1}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$
$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n)}\int_0^1 f(u)u^{p_1+p_2+\cdots+p_n-1}\,\mathrm{d}u\ (p_1,p_2,\cdots,p_n>0),$$

式中 $f(u)$ 为连续函数.

提示: 运用数学归纳法.

4218. 将区域 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant R^2$ 上的 n 重积分 $(n\geqslant 2)$

$$\iint\limits_{\Omega}\cdots\int f\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\right)\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

(其中 $f(u)$ 为连续函数) 化为一重积分.

4219. 计算半径为 R, 密度为 ρ_0 的均质球体对自身的引力势, 即求积分

$$u=\frac{\rho_0^2}{2}\iiint\limits_{x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqslant R^2}\iiint\limits_{x_2^2+y_2^2+z_2^2\leqslant R^2}\frac{\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}z_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}y_2\,\mathrm{d}z_2}{r_{1,2}},$$

式中 $r_{1,2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

4220. 设 $\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\ (a_{ij}=a_{ji})$ 为正定二次型, 计算 n 重积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left\{\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j+2\sum\limits_{i=1}^{n}b_ix_i+c\right\}}\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$

§11. 曲线积分

1. 第一型曲线积分. 若函数 $f(x,y,z)$ 在平滑曲线 C

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t)\quad (t_0\leqslant t\leqslant T)\tag{1}$$

的各点上有定义并且连续, $\mathrm{d}s$ 为弧长的微分, 则

$$\int\limits_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\int_{t_0}^{T}f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

这个积分的特征在于它与曲线 C 的方向无关.

2. 第一型曲线积分在力学上的应用. 若 $\rho=\rho(x,y,z)$ 为曲线 C 在点 (x,y,z) 的线密度, 则曲线 C 的质量等于:

$$M=\int\limits_C\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s.$$

此曲线的质心坐标 (x_0,y_0,z_0) 由以下公式来表示:

$$x_0=\frac{1}{M}\int\limits_C x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s,\quad y_0=\frac{1}{M}\int\limits_C y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s,\quad z_0=\frac{1}{M}\int\limits_C z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s.$$

3. 第二型曲线积分. 若函数 $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,y,z)$ 在曲线 (1) 上

的各点是连续的, 且曲线方向是使参数 t 增加的方向, 则

$$\int\limits_C P(x,y,z)\,\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y+R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$
$$=\int_{t_0}^{T}\{P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\}\,\mathrm{d}t. \quad (2)$$

当沿曲线 C 的方向变更时, 此积分的符号也变更. 在力学上, 积分 (2) 是当其作用点描绘出曲线 C 时变力 $\{P,Q,R\}$ 所作的功.

4. 全微分的情形. 若

$$P(x,y,z)\,\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y+R(x,y,z)\,\mathrm{d}z=\,\mathrm{d}u,$$

式中 $u=u(x,y,z)$ 为区域 V 内的单值函数, 则积分值与完全位于域 V 内的曲线 C 的形状无关:

$$\int\limits_C P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=u(x_2,y_2,z_2)-u(x_1,y_1,z_1),$$

式中 (x_1,y_1,z_1) 为积分路径的始点, (x_2,y_2,z_2) 为其终点. 在最简单的情况下, 若区域 V 是单连通的, 而函数 P, Q, R 有连续的一阶偏导数, 则上式成立的充分必要条件为: 在区域 V 内, 下列条件恒满足:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}.$$

这时, 在区域 V 是标准长方体这种简单情形下, 函数 u 可按下面的公式来求得.

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y,z)\,\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y,z)\,\mathrm{d}y+\int_{z_0}^{z}R(x_0,y_0,z)\,\mathrm{d}z+c,$$

其中 (x_0,y_0,z_0) 为区域 V 内某一固定的点, 而 c 是任意常数.

计算下列第一型曲线积分:

4221. $\int\limits_C (x+y)\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为以 $O(0,0)$, $A(1,0)$ 和 $B(0,1)$ 为顶点的三角形围线.

4222. $\int\limits_C y^2\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为摆线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的一拱.

4223. $\int\limits_C (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为曲线 $x=a(\cos t+t\sin t), y=a(\sin t-t\cos t)(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

4224. $\int\limits_C xy\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为双曲线 $x=a\cosh t, y=a\sinh t\ (0\leqslant t\leqslant t_0)$ 的弧.

4225. $\int\limits_C (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为内摆线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 的弧.

4226. $\int\limits_C \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为由曲线 $r=a, \varphi=0, \varphi=\dfrac{\pi}{4}$ (r 和 φ 为极坐标) 给出的凸围线.

4227. $\int\limits_C |y|\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 的弧.

4228. $\int\limits_C x\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为对数螺线 $r = a\mathrm{e}^{k\varphi}$ $(k>0)$ 在圆 $r=a$ 内的部分.

4229. $\int\limits_C \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为圆周 $x^2+y^2=ax$.

4230. $\int\limits_C \frac{\mathrm{d}s}{y^2}$, 其中 C 为悬链线 $y=a\cosh\frac{x}{a}$.

求下列空间曲线的弧长 (参数是正的):

4231. $x=3t, y=3t^2, z=2t^3$, 从 $O(0,0,0)$ 到 $A(3,3,2)$.

4232. $x=\mathrm{e}^{-t}\cos t, y=\mathrm{e}^{-t}\sin t, z=\mathrm{e}^{-t}$, 当 $0<t<+\infty$.

4233. $y=a\arcsin\frac{x}{a}, z=\frac{a}{4}\ln\frac{a-x}{a+x}$, 从 $O(0,0,0)$ 到 $A(x_0,y_0,z_0)$.

4234. $(x-y)^2=a(x+y), x^2-y^2=\frac{9}{8}z^2$, 从 $O(0,0,0)$ 到 $A(x_0,y_0,z_0)$.

4235. $x^2+y^2=cz, \frac{y}{x}=\tan\frac{z}{c}$, 从 $O(0,0,0)$ 到 $A(x_0,y_0,z_0)$.

4236. $x^2+y^2+z^2=a^2, \sqrt{x^2+y^2}\cosh\left(\arctan\frac{y}{x}\right)=a$, 从点 $A(a,0,0)$ 到点 $B(x,y,z)$.

计算沿空间曲线的第一型曲线积分:

4237. $\int\limits_C (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为螺旋线 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的一段.

4238. $\int\limits_C x^2\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0$.

4239. $\int\limits_C z\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为圆锥螺旋 $x=t\cos t, y=t\sin t, z=t$ $(0\leqslant t\leqslant t_0)$.

4240. $\int\limits_C z\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为曲线 $x^2+y^2=z^2, y^2=ax$ 上从点 $O(0,0,0)$ 到点 $A(a,a,\sqrt{2}a)$ 的弧.

4241.1. 设曲线 $x=a\cos t, y=b\sin t$ $(a\geqslant b>0, 0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 在点 (x,y) 的线密度等于 $|y|$, 求其质量.

4241.2. 设抛物线 $y^2=2px$ $\left(0\leqslant x\leqslant \frac{p}{2}\right)$ 在点 $M(x,y)$ 的线密度等于 $|y|$, 求其质量.

4241.3. 求曲线 $x=at, y=\frac{a}{2}t^2, z=\frac{a}{3}t^3$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ 的弧之质量, 其密度按规律 $\rho=\sqrt{\frac{2y}{a}}$ 而变化.

4242. 计算均匀曲线 $y=a\cosh\frac{x}{a}$ 从点 $A(0,a)$ 到点 $B(b,h)$ 的弧的质心的坐标.

4243. 求摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$ 的弧的质心.

4244.1. 求星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ $(x \geqslant 0, y \geqslant 0)$ 的弧 C 对坐标轴的静矩

$$S_y = \int\limits_C x\,\mathrm{d}s, \quad S_x = \int\limits_C y\,\mathrm{d}s.$$

4244.2. 求圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ 对其直径的转动惯量.

4244.3. 求下列曲线对点 $O(0,0)$ 的极转动惯量:

(a) 正方形 $\max\{|x|, |y|\} = a$ 的边界 C;

(b) 以极坐标点 $P(a,0)$, $Q\left(a, \dfrac{2\pi}{3}\right)$, $R\left(a, \dfrac{4\pi}{3}\right)$ 为顶点的正三角形的边界 C.

4244.4. 求星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 的平均极半径, 即由以下公式给出的数 r_0 $(r_0 > 0)$:

$$I_0 = sr_0^2,$$

其中 I_0 是星形线对坐标原点的极转动惯量 (参见习题 4244.3), s 是星形线的弧长.

4245. 计算球面上的三角形 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0$ 的围线的质心的坐标.

4246. 求均匀的弧 $x = \mathrm{e}^t \cos t, y = \mathrm{e}^t \sin t, z = \mathrm{e}^t (-\infty < t \leqslant 0)$ 的质心的坐标.

4247. 求螺线 $x = a\cos t, y = a\sin t, z = \dfrac{h}{2\pi} t (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 的一支对坐标轴的转动惯量.

4248. 计算第二型曲线积分

$$\int\limits_{OA} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x,$$

式中 O 为坐标原点, 点 A 的坐标为 $(1,2)$, 并设: (a) OA 为直线段; (b) OA 为抛物线, 其轴为 Oy; (c) OA 为由 Ox 轴上的线段 OB 和平行于 Oy 轴的线段 BA 组成的折线.

4249. 对于上题中所指示的途径 (a), (b), (c), 计算

$$\int\limits_{OA} x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x.$$

在参数增加的方向, 沿所指示的曲线计算下列第二型曲线积分:

4250. $\displaystyle\int\limits_C (x^2 - 2xy)\,\mathrm{d}x + (y^2 - 2xy)\,\mathrm{d}y$, 其中 C 为抛物线 $y = x^2$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$.

4251. $\displaystyle\int\limits_C (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y$, 其中 C 为曲线 $y = 1 - |1 - x|$ $(0 \leqslant x \leqslant 2)$.

4252. $\displaystyle\oint\limits_C (x+y)\,\mathrm{d}x + (x-y)\,\mathrm{d}y$, 其中 C 为依逆时针方向通过的椭圆周 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

4253. $\displaystyle\int\limits_C (2a - y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$, 其中 C 为摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 的一拱.

4254. $\oint\limits_C \dfrac{(x+y)\,\mathrm{d}x-(x-y)\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 其中 C 为依逆时针方向通过的圆周 $x^2+y^2=a^2$.

4255. $\oint\limits_{ABCDA} \dfrac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}$, 其中 $ABCDA$ 为以 $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$, $D(0,-1)$ 为顶点的正方形围线.

4256. $\int\limits_{AB} \sin y\,\mathrm{d}x+\sin x\,\mathrm{d}y$, 其中 AB 为介于点 $A(0,\pi)$ 和点 $B(\pi,0)$ 之间的直线段.

4257. $\oint\limits_{OmAnO} \arctan\dfrac{y}{x}\,\mathrm{d}y-\mathrm{d}x$, 其中 OmA 为抛物线段 $y=x^2$, OnA 为直线段 $y=x$.

验证被积函数为全微分, 并计算下列曲线积分:

4258. $\displaystyle\int_{(-1,2)}^{(2,3)} x\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x$.

4259. $\displaystyle\int_{(0,1)}^{(3,-4)} x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y$.

4260. $\displaystyle\int_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y)\,\mathrm{d}x+(x-y)\,\mathrm{d}y$.

4261. $\displaystyle\int_{(1,-1)}^{(1,1)} (x-y)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)$.

4262. $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(a,b)} f(x+y)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$, 其中 $f(u)$ 为连续函数.

4263. $\displaystyle\int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{x^2}$ 沿着不与 Oy 轴相交的路径.

4264. $\displaystyle\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 沿着不通过坐标原点的路径.

4265. $\displaystyle\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \varphi(x)\,\mathrm{d}x+\psi(y)\,\mathrm{d}y$, 其中 φ 和 ψ 为连续函数.

4266. $\displaystyle\int_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4+4xy^3)\,\mathrm{d}x+(6x^2y^2-5y^4)\,\mathrm{d}y$.

4267. $\displaystyle\int_{(0,-1)}^{(1,0)} \frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{(x-y)^2}$ 沿着不与直线 $y=x$ 相交的路径.

4268. $\displaystyle\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y$ 沿着不与 Oy 轴相交的路径.

4269. $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(a,b)} \mathrm{e}^x(\cos y\,\mathrm{d}x-\sin y\,\mathrm{d}y)$.

4270. 证明: 若 $f(u)$ 为连续函数且 C 为逐段光滑的封闭围线, 则

$$\oint\limits_C f(x^2+y^2)(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y)=0.$$

求原函数 z, 设:

4271. $\mathrm{d}z=(x^2+2xy-y^2)\,\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\,\mathrm{d}y$.

4272. $\mathrm{d}z=\dfrac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{3x^2-2xy+3y^2}$.

4273. $\mathrm{d}z = \dfrac{(x^2+2xy+5y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2-2xy+y^2)\,\mathrm{d}y}{(x+y)^3}$.

4274. $\mathrm{d}z = \mathrm{e}^x[\mathrm{e}^y(x-y+2)+y]\,\mathrm{d}x + \mathrm{e}^x[\mathrm{e}^y(x-y)+1]\,\mathrm{d}y$.

4275. $\mathrm{d}z = \dfrac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^{n+1}\partial y^m}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^n\partial y^{m+1}}\,\mathrm{d}y$.

4276. $\mathrm{d}z = \dfrac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2}\partial y^{m-1}}\left(\ln\dfrac{1}{r}\right)\mathrm{d}x - \dfrac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+2}}\left(\ln\dfrac{1}{r}\right)\mathrm{d}y$,
其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

4277. 证明: 下面的估计对于曲线积分是正确的:

$$\left|\int\limits_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y\right| \leqslant LM,$$

其中 L 为积分路径的长, $M=\max\sqrt{P^2+Q^2}$ (在弧 C 上).

4278. 估计积分

$$I_R = \oint\limits_{x^2+y^2=R^2} \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^2}.$$

证明: $\lim\limits_{R\to\infty} I_R = 0$.

计算沿空间曲线的积分 (假定坐标系是右手的):

4279. $\int\limits_C (y^2-z^2)\,\mathrm{d}x + 2yz\,\mathrm{d}y - x^2\,\mathrm{d}z$, 式中 C 为曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$, 以参数增加的方向为正.

4280. $\int\limits_C y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$, 式中 C 为纽形螺线 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$, 以参数增加的方向为正.

4281. $\int\limits_C (y-z)\,\mathrm{d}x + (z-x)\,\mathrm{d}y + (x-y)\,\mathrm{d}z$, 式中 C 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2, y=x\tan\alpha$ $(0<\alpha<\pi)$, 若从 x 轴的正向看去, 沿逆时针方向为正.

4282. $\int\limits_C y^2\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}y + x^2\,\mathrm{d}z$, 式中 C 为维维亚尼曲线 $x^2+y^2+z^2=a^2, x^2+y^2=ax$ $(z\geqslant 0, a>0)$, 若从 Ox 轴的正向 $(x>a)$ 看去, 沿逆时针方向为正.

4283. $\int\limits_C (y^2-z^2)\,\mathrm{d}x + (z^2-x^2)\,\mathrm{d}y + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}z$, 式中 C 为球面的一部分 $x^2+y^2+z^2=1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$ 的边界, 当沿着它的正向移动时, 这部分球面的外侧面保持在左方.

计算下列全微分的曲线积分:

4284. $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} x\,\mathrm{d}x + y^2\,\mathrm{d}y - z^3\,\mathrm{d}z$.

4285. $\displaystyle\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z$.

4286. $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 其中点 (x_1,y_1,z_1) 位于球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 之上, 而点 (x_2,y_2,z_2) 位于球面 $x^2+y^2+z^2=b^2$ 之上 $(a>0, b>0)$.

4287. $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \varphi(x)\,\mathrm{d}x+\psi(y)\,\mathrm{d}y+\chi(z)\,\mathrm{d}z$, 式中 φ,ψ,χ 为连续函数.

4288. $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(x+y+z)(\mathrm{d}x+\,\mathrm{d}y+\,\mathrm{d}z)$, 其中 f 为连续函数.

4289. $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z)$, 式中 f 为连续函数.

求原函数 u, 若

4290. $\mathrm{d}u=(x^2-2yz)\,\mathrm{d}x+(y^2-2xz)\,\mathrm{d}y+(z^2-2xy)\,\mathrm{d}z$.

4291. $\mathrm{d}u=\left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y-\frac{xy}{z^2}\,\mathrm{d}z$.

4292. $\mathrm{d}u=\frac{(x+y-z)\,\mathrm{d}x+(x+y-z)\,\mathrm{d}y+(x+y+z)\,\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2+2xy}$.

4293. 求当质量为 m 的点从位置 (x_1,y_1,z_1) 移动到位置 (x_2,y_2,z_2) 时, 重力所作的功 (Oz 轴的方向是竖直向上).

4294. 弹性力指向坐标原点, 力的大小与质点到坐标原点的距离成正比. 设此点依逆时针方向描绘出椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的正四分之一, 求弹性力所作的功.

4295. 当单位质量从点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 移动到点 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 时, 求引力 $F=\frac{G}{r^2}$ (其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$) 对它所作的功, 其中 G 是引力常量.

§12. 格林公式

1. 曲线积分与二重积分的关系. 设 C 为分段光滑的简单封闭围线, 它围成单连通的有界区域 S, 并且当沿着围线正方向移动时, 区域 S 保持在左边; 此外, 函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 及其一阶偏导数 $P'_y(x,y), Q'_x(x,y)$ 在区域 S 内及其边界上皆是连续的, 则成立格林公式

$$\oint_C P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{1}$$

若把区域 S 的边界 C 理解为一切边界围线之和, 并且这样选取沿围线的环绕方向, 使得区域 S 始终位于左侧, 则公式 (1) 对于由几个简单围线围成的有界区域 S 也成立.

2. 平面区域的面积. 以分段光滑的简单围线 C 为界的图形的面积 S 等于:

$$S=\oint_C x\,\mathrm{d}y=-\oint_C y\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\oint_C(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x).$$

在这一节中, 若没有相反的约定, 则假定积分的封闭围线是简单的 (无自交点), 并这样选取围线的正方向, 使得所围不含无穷远点的区域始终位于曲线的左边.

4296. 利用格林公式变换曲线积分

$$I=\oint\limits_C \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x+y\left[xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]\,\mathrm{d}y,$$

式中围线 C 是有界区域 S 的边界.

4297. 应用格林公式, 计算曲线积分

$$I=\oint\limits_K (x+y)^2\,\mathrm{d}x-(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y,$$

其中 K 是以 $A(1,1)$, $B(3,2)$, $C(2,5)$ 为顶点的三角形围线 ABC, 并且积分时的环绕方向为正. 直接计算积分, 以验证所求得的结果.

应用格林公式, 计算下列曲线积分:

4298. $\oint\limits_C xy^2\,\mathrm{d}y-x^2y\,\mathrm{d}x$, 式中 C 为圆周 $x^2+y^2=a^2$.

4299. $\oint\limits_C (x+y)\,\mathrm{d}x-(x-y)\,\mathrm{d}y$, 式中 C 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

4300. $\oint\limits_C \mathrm{e}^x[(1-\cos y)\,\mathrm{d}x-(y-\sin y)\,\mathrm{d}y]$, 其中 C 为区域 $0<x<\pi, 0<y<\sin x$ 的边界, 并且积分时的环绕方向为正.

4301. $\oint\limits_{x^2+y^2=R^2} \mathrm{e}^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xy\,\mathrm{d}x+\sin 2xy\,\mathrm{d}y)$.

4302. 设 AmB 为连接点 $A(1,1)$ 和点 $B(2,6)$ 的直线段, AnB 是连接点 A, B 及坐标原点的抛物线段, 且该抛物线的轴垂直于 x 轴. 积分

$$I_1=\int\limits_{AmB}(x+y)^2\,\mathrm{d}x-(x-y)^2\,\mathrm{d}y,\quad I_2=\int\limits_{AnB}(x+y)^2\,\mathrm{d}x-(x-y)^2\,\mathrm{d}y$$

相差多少?

4303. 计算曲线积分

$$\int\limits_{AmO}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\,\mathrm{d}y,$$

其中 AmO 为由点 $A(a,0)$ 至点 $O(0,0)$ 的上半圆周 $x^2+y^2=ax$.

提示: 用 Ox 轴的直线段 OA 与路径 AmO 相连组成封闭围线.

4304. 计算曲线积分

$$\int\limits_{AmB}[\varphi(y)\mathrm{e}^x-my]\,\mathrm{d}x+[\varphi'(y)\mathrm{e}^x-m]\,\mathrm{d}y,$$

式中 $\varphi(y)$ 和 $\varphi'(y)$ 为连续函数, AmB 为连接点 $A(x_1,y_1)$ 和点 $B(x_2,y_2)$ 的任意路径, 但要求此路径与线段 AB 一起围成具有已知面积 S 的区域 $AmBA$.

4305. 求二阶可微的二个连续函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$, 使得曲线积分

$$I=\oint\limits_C P(x+\alpha,y+\beta)\,\mathrm{d}x+Q(x+\alpha,y+\beta)\,\mathrm{d}y$$

对于任何封闭围线 C 与常数 α 和 β 无关.

4306. 为了使曲线积分

$$\int\limits_{AmB} F(x,y)(y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)$$

与积分路径的形状无关, 可微函数 $F(x,y)$ 应满足怎样的条件?

4307. 计算

$$I = \oint\limits_{C} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2},$$

其中 C 不经过坐标原点的简单封闭围线, 且积分时的环绕方向为正.

提示: 研究两种情况: 1) 坐标原点在围线之外; 2) 围线 C 包围坐标原点.

利用曲线积分计算由下列曲线所围的面积:

4308. $x = a\cos t, y = b\sin t\ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ (椭圆).

4309. $x = a\cos^3 t, y = b\sin^3 t\ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ (星形线).

4310. 轴 Ox 与 $(x+y)^2 = ax\ (a>0)$ (抛物线).

4311. $x^3+y^3 = 3axy\ (a>0)$ (笛卡儿叶形线).

提示: 令 $y = tx$.

4312. $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ (双纽线).

提示: 令 $y = x\tan\varphi$.

4313. 曲线 $x^3+y^3 = x^2+y^2$ 及坐标轴.

4314. 计算由曲线

$$(x+y)^{n+m+1} = ax^n y^m \quad (a>0, n>0, m>0)$$

所围的面积.

4315. 计算由曲线

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1 \quad (a>0, b>0, n>0)$$

和坐标轴所围的面积.

提示: 令 $\dfrac{x}{a} = \cos^{\frac{2}{n}}\varphi, \dfrac{y}{b} = \sin^{\frac{2}{n}}\varphi$.

4316. 计算由曲线

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1} \quad (a>0, b>0, n>1)$$

和坐标轴所围的面积.

4317. 计算由曲线

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1} = c\left(\frac{x}{a}\right)^n\left(\frac{y}{b}\right)^n \quad (a>0, b>0, c>0, n>0)$$

所围的面积.

4318. 一半径为 r 的圆周沿半径为 R 的固定圆周外部滚动而无滑动, 动圆周上的一点所描绘的曲线称为外摆线.

假定比值 $\dfrac{R}{r} = n$ 是整数 $(n \geqslant 1)$, 求外摆线所围的面积.

研究特殊情况 $r = R$ (心脏线).

4319. 一个半径为 r 的圆周沿半径为 R 的固定圆周内部滚动而无滑动时, 动圆周上的一点所描绘的曲线称为*内摆线*.

假定比值 $\dfrac{R}{r} = n$ 是整数 $(n \geqslant 2)$, 求内摆线所围的面积.

研究特殊情况 $r = \dfrac{R}{4}$ (星形线).

4320.1. 计算圆柱面 $x^2 + y^2 = ax$ 被曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 所截那部分的面积.

4320.2. 一简单封闭围线 C 位于上半平面 $y \geqslant 0$, 它在绕 Ox 轴旋转时确定了一个旋转体, 证明: 此旋转体的体积为

$$V = -\pi \oint_C y^2\,\mathrm{d}x.$$

4321. 计算

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{X\,\mathrm{d}Y - Y\,\mathrm{d}X}{X^2 + Y^2},$$

若 $X = ax + by, Y = cx + dy$, 且 C 为包围坐标原点的简单封闭围线 $(ad - bc \neq 0)$.

4322. 若简单的围线 C 包围坐标原点, $X = \varphi(x, y), Y = \psi(x, y)$, 而曲线 $\varphi(x, y) = 0$ 和 $\psi(x, y) = 0$ 在围线 C 以内有几个单交点, 计算积分 I (参阅前题).

4323. 证明: 若 C 为封闭围线, $\boldsymbol{l}$ 为任意的方向, 则有

$$\oint_C \cos(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{n})\,\mathrm{d}s = 0,$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 为围线 C 的外法向量.

4324. 求积分

$$I = \oint_C [x\cos(\boldsymbol{n}, x) + y\cos(\boldsymbol{n}, y)]\,\mathrm{d}s$$

之值, 式中 C 是有界区域 S 的边界, 它是简单封闭曲线, 而 $\boldsymbol{n}$ 是它的外法向量.

4325. 求

$$\lim_{d(S)\to 0} \frac{1}{S} \oint_C (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n})\,\mathrm{d}s,$$

其中 S 为包围点 (x_0, y_0) 的围线 C 所围的面积, $d(S)$ 为区域 S 的直径, $\boldsymbol{n}$ 为围线 C 的单位外法向量, $\boldsymbol{F}\{X, Y\}$ 为 $S + C$ 上的连续可微向量.

§13. 曲线积分在物理学上的应用

4326. 均匀分布在圆 $x^2 + y^2 = a^2, y \geqslant 0$ 的上半部的质量 M 以怎样的力吸引位于 $(0, 0)$ 质量为 m 的质点?

4327. 计算*单层的对数势*

$$u(x, y) = \oint_C \kappa \ln \frac{1}{r}\,\mathrm{d}s,$$

式中 $\kappa=$ 常数, $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$, 设围线 C 是圆周 $\xi^2+\eta^2=R^2$.

4328. 采用极坐标 ρ 和 φ, 计算单层的对数势

$$I_1=\int_0^{2\pi}\cos m\psi\ln\frac{1}{r}\,\mathrm{d}\psi \quad 和 \quad I_2=\int_0^{2\pi}\sin m\psi\ln\frac{1}{r}\,\mathrm{d}\psi,$$

式中 r 为点 (ρ,φ) 与动点 $(1,\psi)$ 间的距离, m 为正整数.

4329. 计算高斯积分

$$u(x,y)=\oint\limits_C\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\,\mathrm{d}s,$$

式中 $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$ 为向量 $\boldsymbol{r}$ 的长度, 此向量连接点 $A(x,y)$ 和简单封闭光滑围线 C 上的动点 $M(\xi,\eta)$, $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})$ 为向量 $\boldsymbol{r}$ 与曲线 C 在点 M 的外法向量 $\boldsymbol{n}$ 之间的夹角.

4330. 采用极坐标 ρ 和 φ, 计算双层的对数势

$$K_1=\int_0^{2\pi}\cos m\psi\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\,\mathrm{d}\psi,\quad K_2=\int_0^{2\pi}\sin m\psi\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\,\mathrm{d}\psi,$$

式中 r 为点 $A(\rho,\varphi)$ 和动点 $M(1,\psi)$ 之间的距离, $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})$ 为方向 $\overrightarrow{AM}=\boldsymbol{r}$ 与引自点 $O(0,0)$ 的半径 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{n}$ 之间的夹角, m 为正整数.

4331. 若 $\Delta u\equiv\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$, 则称二阶可微函数 $u=u(x,y)$ 为调和函数. 证明: 当且仅当以下条件成立时 u 才是调和函数:

$$\oint\limits_C\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s=0,$$

式中 C 为任意封闭围线, $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 为沿此围线之外法线方向的导数.

4332. 证明:

$$\iint\limits_S\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iint\limits_S u\Delta u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\oint\limits_C u\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s,$$

式中光滑围线 C 是有界区域 S 的边界.

4333. 证明: 若一函数在有界区域 S 内及其边界 C 上为调和函数, 则此函数单值地由它在边界 C 上的值确定 (参考习题 4332).

4334. 证明平面上的格林第二公式:

$$\iint\limits_S\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\oint\limits_C\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial n} & \dfrac{\partial v}{\partial n}\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}s,$$

式中光滑围线 C 是有界区域 S 的边界, $\dfrac{\partial}{\partial n}$ 为沿 C 的外法线方向的导数.

4335. 利用格林第二公式证明: 若 $u=u(x,y)$ 是有界闭区域 S 内的调和函数, 则

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\oint\limits_C\left(u\frac{\partial\ln r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s,$$

式中 C 为区域 S 的边界, $\boldsymbol{n}$ 为围线 C 的外法向量, (x,y) 为区域 S 的内点,

$$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$$

为点 (x, y) 与围线 C 上的动点 (ξ, η) 之间的距离.

提示: 从区域 S 中除去点 (x, y) 与该点的无穷小圆形邻域, 并对区域 S 的剩余部分应用格林第二公式.

4336. 证明对于调和函数 $u(M) = u(x, y)$ 的中值定理:

$$u(M) = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_C u(\xi, \eta)\,\mathrm{d}s,$$

式中 C 是以点 M 为中心的圆周.

4337. 证明: 有界闭区域内的非常数调和函数 $u(x, y)$ 在此区域内的点不能达到其最大或最小值 (极大值原理).

4338. 证明黎曼公式:

$$\iint\limits_S \begin{vmatrix} L[u] & M[v] \\ u & v \end{vmatrix} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint\limits_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y,$$

式中

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu, \quad M[v] = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - a\frac{\partial v}{\partial x} - b\frac{\partial v}{\partial y} + cv$$

$(a, b, c$ 为常数), P 和 Q 为某些确定的函数, 围线 C 是有界区域 S 的边界.

4339. 设 $u = u(x, y)$ 和 $v = v(x, y)$ 为定常流的速度分量, C 为区域 S 的边界, 求区域 S 内的流体质量的变化率. 若流体是不可压缩的, 且在区域 S 内没有源和汇, 则函数 u 和 v 满足怎样的方程?

4340. 根据毕奥–萨瓦尔定律, 通过导线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 的电流 i 在空间的点 $M(x, y, z)$ 处所对应的磁场强度为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H} = ki\frac{(\boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{s})}{r^3},$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 为连接导线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 与点 M 的向量, k 为比例系数.

对于封闭导线 C 的情形, 求点 M 的磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的投影 H_x, H_y 和 H_z.

§14. 曲面积分

1. 第一型曲面积分. 若 S 为分片光滑的双侧曲面

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \quad ((u, v) \in \Omega), \tag{1}$$

而 $f(x, y, z)$ 为在曲面 S 的各点上有定义并且连续的函数, 则

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_\Omega f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \tag{2}$$

式中

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

在特别情形下，若曲面 S 的方程具有以下形式:

$$z = z(x,y) \quad ((x,y)\in\sigma),$$

其中 $z(x,y)$ 为单值连续可微函数，则

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_\sigma f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

此积分与曲面 S 的正反面的选择无关.

若把函数 $f(x,y,z)$ 当作曲面 S 在点 (x,y,z) 的面密度，则积分 (2) 是此曲面的质量.

2. 第二型曲面积分. 若 S 为光滑的双侧曲面，S^+ 为它的正面，即由法向量 $\boldsymbol{n}\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 确定的一面，$P=P(x,y,z), Q=Q(x,y,z), R=R(x,y,z)$ 为在曲面 S 上有定义而且连续的三个函数，则

$$\iint\limits_{S^+} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S. \tag{3}$$

若曲面 S 以参数方程 (1) 的形式给出，则法向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦由下列公式来确定:

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\beta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
$$\cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

其中

$$A=\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\quad B=\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\quad C=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},$$

且根式前的符号用适当的方法来选择.

当变换为曲面 S 的另一面 S^- 时，积分 (3) 的符号相反.

4341. 两个积分

$$I_1=\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S,\quad I_2=\iint\limits_P (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}P$$

(式中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$, P 为其内接八面体的表面 $|x|+|y|+|z|=a$) 相差若何?

4342. 计算 $\iint\limits_S z\,\mathrm{d}S$, 式中 S 为曲面 $x^2+z^2=2az$ $(a>0)$ 被曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所割下的部分.

计算下列第一型曲面积分:

4343. $\iint\limits_S (x+y+z)\,\mathrm{d}S$, 式中 S 为曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2, z\geqslant 0$.

4344. $\iint\limits_S (x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$, 式中 S 为区域 $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1$ 的边界.

4345. $\iint\limits_S \frac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2}$, 式中 S 为四面体 $x+y+z\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$ 的边界.

4346. $\iint\limits_S |xyz|\,\mathrm{d}S$, 式中 S 为曲面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $z=1$ 所截下的部分.

4347. $\iint\limits_S \frac{\mathrm{d}S}{h}$, 式中 S 为椭球面, h 为椭球中心到与椭球面微元 $\mathrm{d}S$ 相切的平面的距离.

4348. $\iint\limits_S z\,\mathrm{d}S$, 式中 S 为螺旋面的一部分: $x=u\cos v, y=u\sin v, z=v$ $(0<u<a; 0<v<2\pi)$.

4349. $\iint\limits_S z^2\,\mathrm{d}S$, 式中 S 为圆锥面的一部分: $x=r\cos\varphi\sin\alpha, y=r\sin\varphi\sin\alpha, z=r\cos\alpha$ $(0\leqslant r\leqslant a; 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$, α 为常数 $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

4350. $\iint\limits_S (xy+yz+zx)\,\mathrm{d}S$, 式中 S 为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被曲面 $x^2+y^2=2ax$ 所割下的部分.

4351. 证明泊松公式:

$$\iint\limits_S f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S = 2\pi\int_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,\mathrm{d}u,$$

式中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$.

4352.1. 求抛物面壳

$$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2) \quad (0\leqslant z\leqslant 1)$$

的质量, 此壳的面密度按规律 $\rho=z$ 而变.

4352.2. 求半球面

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \quad (z\geqslant 0)$$

的质量, 其面密度在半球面上每一点 $M(x,y,z)$ 等于 $\frac{x}{a}$.

4352.3. 求均质三角形板

$$x+y+z=a \quad (x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0)$$

对坐标平面的静矩.

4353. 求密度为 ρ_0 的均质球面壳

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \quad (z\geqslant 0)$$

对 Oz 轴的转动惯量.

4354. 求密度为 ρ_0 的均质锥面壳

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0 \quad (0\leqslant z\leqslant b)$$

对直线

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-b}{0}$$

的转动惯量.

4355. 求下列均质曲面的质心坐标:

(a) 曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被曲面 $x^2+y^2=ax$ 所割下的部分;

(b) 曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ $(x\geqslant 0; y\geqslant 0; x+y\leqslant a)$.

4356.1. 求下列曲面 S 的极转动惯量 $I_0=\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S$:

(a) 立方体表面 $\max\{|x|,|y|,|z|\}=a$;

(b) 圆柱体 $x^2+y^2\leqslant R^2, 0\leqslant z\leqslant H$ 的全部表面.

4356.2. 求均质三角形板

$$x+y+z=1 \quad (x\geqslant 0; y\geqslant 0; z\geqslant 0)$$

对坐标平面的转动惯量.

4357. 密度为 ρ_0 的均质截圆锥面

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=r \quad (0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, 0<b\leqslant r\leqslant a)$$

以怎样的力吸引质量为 m 位于该圆锥面顶点的质点?

4358. 求密度为 ρ_0 的均质球面 $S: x^2+y^2+z^2=a^2$ 在点 $M_0\ (x_0,y_0,z_0)$ 的势, 即计算积分

$$u=\iint\limits_S \frac{\rho_0\,\mathrm{d}S}{r},$$

式中 $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$.

4359. 计算

$$F(t)=\iint\limits_{x+y+z=t} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S,$$

式中

$$f(x,y,z)=\begin{cases}1-x^2-y^2-z^2, & x^2+y^2+z^2\leqslant 1,\\ 0, & x^2+y^2+z^2>1.\end{cases}$$

作出函数 $u=F(t)$ 的图像.

4360. 计算积分

$$F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S,$$

式中

$$f(x,y,z)=\begin{cases}x^2+y^2, & z\geqslant\sqrt{x^2+y^2},\\ 0, & z<\sqrt{x^2+y^2}.\end{cases}$$

4361. 计算积分

$$F(x,y,z,t)=\iint\limits_S f(\xi,\eta,\zeta)\,\mathrm{d}S,$$

式中 S 为变球面

$$(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2=t^2,$$

$$f(\xi,\eta,\zeta)=\begin{cases}1, & \xi^2+\eta^2+\zeta^2<a^2,\\ 0, & \xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant a^2,\end{cases}$$

且假设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}>a>0$.

计算下列第二型曲面积分:

4362. $\iint\limits_S (x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$, 式中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧.

4363. $\iint\limits_S f(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+g(y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+h(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 式中 $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ 为连续函数, S 为平行六面体 $0\leqslant x\leqslant a; 0\leqslant y\leqslant b; 0\leqslant z\leqslant c$ 的外表面.

4364. $\iint\limits_S (y-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z-x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 式中 S 为圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ $(0\leqslant z\leqslant h)$ 的外侧.

4365. $\iint\limits_S \left(\dfrac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x}+\dfrac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{y}+\dfrac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z}\right)$, 式中 S 为椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧.

4366. $\iint\limits_S x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 式中 S 为球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 的外侧.

§15. 斯托克斯公式

若 $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,y,z)$ 为连续可微函数, S 为分片光滑的有界双侧曲面, 其边界 C 为分段光滑的简单封闭围线, 则成立斯托克斯公式:

$$\oint\limits_C P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\iint\limits_S \begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S,$$

式中 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 为曲面 S 的法线的方向余弦, 并且从此法线所指方向来看, 积分时围线 C 的环绕方向是逆时针的 (对于右手坐标系).

4367. 应用斯托克斯公式, 计算曲线积分

$$\oint\limits_C y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z,$$

其中 C 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$, 并且从 Ox 轴的正向来看, 积分时此圆周的环绕方向是逆时针的. 用直接计算法检验结果.

4368. 计算积分

$$\oint\limits_{AmB} (x^2-yz)\,\mathrm{d}x+(y^2-xz)\,\mathrm{d}y+(z^2-xy)\,\mathrm{d}z,$$

此积分是从点 $A(a,0,0)$ 至点 $B(a,0,h)$ 沿着螺旋线 $x=a\cos\varphi, y=a\sin\varphi, z=\dfrac{h}{2\pi}\varphi$

进行的.

提示: 以直接段与曲线 AmB 相连并应用斯托克斯公式.

4369. 设 C 为平面 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 为平面之法线的方向余弦) 上的封闭围线, 所围面积为 S, 求

$$\oint_C \begin{vmatrix} \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

积分沿围线 C 的正方向进行.

应用斯托克斯公式, 计算积分:

4370. $\oint\limits_C (y+z)\,\mathrm{d}x+(z+x)\,\mathrm{d}y+(x+y)\,\mathrm{d}z$, 式中 C 为椭圆周 $x=a\sin^2 t, y=2a\sin t\cos t, z=a\cos^2 t\,(0\leqslant t\leqslant\pi)$, 并且以参数 t 增大的方向为积分时的正方向.

4371. $\oint\limits_C (y-z)\,\mathrm{d}x+(z-x)\,\mathrm{d}y+(x-y)\,\mathrm{d}z$, 式中 C 为椭圆周 $x^2+y^2=a^2, \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{h}=1\,(a>0,h>0)$. 并且若从 Ox 轴正向看去, 积分是沿此椭圆依逆时针方向进行的.

4372. $\oint\limits_C (y^2+z^2)\,\mathrm{d}x+(x^2+z^2)\,\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\,\mathrm{d}z$, 式中 C 是曲线 $x^2+y^2+z^2=2Rx, x^2+y^2=2rx\,(0<r<R, z>0)$, 并且在沿此曲线进行积分时, 球面 $x^2+y^2+z^2=2Rx$ 外侧被该曲线所围的最小区域始终位于左边.

4373. $\oint\limits_C (y^2-z^2)\,\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\,\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\,\mathrm{d}z$, 式中 C 为用平面 $x+y+z=\dfrac{3}{2}a$ 截立方体 $0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant a, 0\leqslant z\leqslant a$ 所得截面的边界, 并且若从 Ox 轴的正向看去, 积分是沿 C 依逆时针方向进行的.

4374. $\oint\limits_C y^2z^2\,\mathrm{d}x+z^2x^2\,\mathrm{d}y+x^2y^2\,\mathrm{d}z$, 式中 C 为封闭曲线 $x=a\cos t, y=a\cos 2t, z=a\cos 3t$, 并且以参数 t 增大的方向为积分时的正方向.

4375. 有函数

$$W(x,y,z)=ki\iint\limits_S \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}\,\mathrm{d}S \quad (k=\text{常数}).$$

其中曲面 S 的边界为围线 C, $\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 的法向量, $\boldsymbol{r}$ 为连接空间的点 $M(x,y,z)$ 与围线 C 上的动点 $A(\xi,\eta,\zeta)$ 所成之径向量. 证明: 此函数为通过围线 C 的电流 i 所产生磁场 $\boldsymbol{H}$ 的势 (参阅习题 4340).

§16. 奥斯特罗格拉茨基公式

若空间区域 V 的边界 S 为分片光滑曲面,

$$P=P(x,y,z),\quad Q=Q(x,y,z),\quad R=R(x,y,z)$$

和它们的一阶偏导数均为区域 $V+S$ 内的连续函数, 则成立奥斯特罗格拉茨基公式

$$\iint\limits_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

式中 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦.

应用奥斯特罗格拉茨基公式变换下列曲面积分, 设光滑曲面 S 是有界区域 V 的边界, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦:

4376. $\iint\limits_S x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$ **4377.** $\iint\limits_S yz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+zx\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

4378. $\iint\limits_S \dfrac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathrm{d}S.$

4379. $\iint\limits_S \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S.$

4380. $\iint\limits_S \left[\left(\dfrac{\partial R}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\dfrac{\partial P}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S.$

4381. 证明: 若 S 为封闭的简单曲面而 $\boldsymbol{l}$ 为任意的固定方向, 则

$$\iint\limits_S \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})\,\mathrm{d}S=0,$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 的外法向量.

4382. 证明: 以曲面 S 为界的物体的体积等于:

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_S (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,\mathrm{d}S,$$

式中 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦.

4383. 证明: 以光滑锥面 $F(x,y,z)=0$ 和平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 为界的锥体的体积等于

$$V=\frac{1}{3}SH,$$

式中 S 为位于该平面上的锥底之面积, H 为锥体的高.

4384. 求以曲面 $z=\pm c$ 及

$$\begin{cases} x=a\cos u\cos v+b\sin u\sin v,\\ y=a\cos u\sin v-b\sin u\cos v,\\ z=c\sin u \end{cases}$$

为界的物体的体积.

4385.1. 求以曲面 $x=u\cos v, y=u\sin v, z=-u+a\cos v\,(u\geqslant 0)$ 及平面 $x=0, x=a\,(a>0)$ 为界的物体的体积.

4385.2. 求环面

$$\begin{cases} x=(b+a\cos\psi)\cos\varphi, \\ y=(b+a\cos\psi)\sin\varphi, \qquad (0<a\leqslant b) \\ z=a\sin\psi \end{cases}$$

所围区域的体积.

4386. 证明公式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x,y,z,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right\}$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x,y,z,t)\,\mathrm{d}S+\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}\frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad (t>0).$$

利用奥斯特罗格拉茨基公式计算下列曲面积分:

4387. $\iint\limits_{S} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 式中 S 为立方体 $0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant a, 0\leqslant z\leqslant a$ 的外表面.

4388. $\iint\limits_{S} x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 式中 S 为球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外表面.

4389. $\iint\limits_{S}(x-y+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y-z+x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z-x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 式中 S 为曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$ 的外侧.

4390. 计算

$$\iint\limits_{S}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S,$$

式中 S 为部分圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ $(0\leqslant z\leqslant h)$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 为此曲面外法线的方向余弦.

提示: 与部分平面 $z=h, x^2+y^2\leqslant h^2$ 组成封闭曲面.

4391. 证明公式:

$$\iiint\limits_{V}\frac{\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta}{r}=\frac{1}{2}\iint\limits_{S}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S,$$

其中封闭曲面 S 为区域 V 的表面, $\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 上的点 (ξ,η,ζ) 处的外法向量, $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$, $\boldsymbol{r}$ 为从点 (x,y,z) 到点 (ξ,η,ζ) 的径向量.

4392. 计算高斯积分

$$I(x,y,z)=\iint\limits_{S}\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}\,\mathrm{d}S,$$

式中 S 为简单封闭光滑曲面, 它是区域 V 的边界, $\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 上在点 (ξ,η,ζ) 处的外

法向量, $\boldsymbol{r}$ 为连接点 (x,y,z) 和点 (ξ,η,ζ) 的径向量,

$$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}.$$

研究两种情形:

(a) 曲面 S 不包围点 (x,y,z); (b) 曲面 S 包围点 (x,y,z).

4393. 证明: 若

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2},$$

有界区域 V 的边界 S 为光滑曲面, 则成立下列公式:

(a) $\displaystyle\iint\limits_S\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S=\iiint\limits_V\Delta u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z;$

(b) $\displaystyle\iint\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S=\iiint\limits_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\iiint\limits_V u\Delta u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$

式中 u 及其一阶和二阶偏导数是在区域 $V+S$ 内连续的函数, $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 为沿曲面 S 的外法线的导数.

4394. 证明三维情形的格林第二公式:

$$\iiint\limits_V\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint\limits_S\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial n} & \dfrac{\partial v}{\partial n}\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}S,$$

式中区域 V 以曲面 S 为界, $\boldsymbol{n}$ 是曲面 S 的外法向量, 而函数 $u=u(x,y,z), v=v(x,y,z)$ 在区域 $V+S$ 内二阶可微.

4395. 设函数 $u=u(x,y,z)$ 在某区域内具有连续的一阶和二阶导数, 若

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0,$$

则 $u(x,y,z)$ 称为此区域内的调和函数.

证明: 若有界闭区域 V 以光滑曲面 S 为界, u 是此区域内的调和函数, 则成立下列公式:

(a) $\displaystyle\iint\limits_S\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S=0;$ (b) $\displaystyle\iiint\limits_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S,$

式中 $\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 的外法向量.

用公式 (b) 证明: 区域 V 内的调和函数由它在边界 S 上的值唯一地确定.

4396. 证明: 若函数 $u=u(x,y,z)$ 是以光滑曲面 S 为界的有界闭区域 V 内的调和函数, 则

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\left[u\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]\mathrm{d}S,$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 是从区域 V 的内点 (x,y,z) 引至曲面 S 上的点 (ξ,η,ζ) 的径向量,

$$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2},$$

$\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 在点 (ξ,η,ζ) 的外法向量.

4397. 证明: 若半径为 R 的球的球心位于点 (x_0, y_0, z_0), $u = u(x, y, z)$ 为此球内的调和函数, 则

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_S u(x, y, z)\,\mathrm{d}S$$

(中值定理).

4398. 证明: 若有界闭区域 V 内的连续函数 $u = u(x, y, z)$ 在此区域内部是调和函数, 并且它不是常数, 则此函数在区域内的点不能达到最大值和最小值 (极大值原理).

4399. 设物体 V 全部浸于液体中, 利用帕斯卡定律证明: 液体的浮力等于物体所排开的液体的重量, 其方向是竖直向上 (阿基米德定律).

4400. 设 S_t 是动球面 $(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = t^2$, 而函数 $f(\xi, \eta, \zeta)$ 是连续的, 证明: 函数

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S_t} \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{t}\,\mathrm{d}S_t$$

满足波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

和初始条件 $u\big|_{t=0} = 0$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = f(x, y, z)$.

提示: 用三重积分表示导数 $\dfrac{\partial u}{\partial t}$.

§17. 场论初步

1. 梯度. 若 $u(\boldsymbol{r}) = u(x, y, z)$ (其中 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$) 是连续可微标量场, 则称向量

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

为它的梯度, 简记为 $\operatorname{grad} u = \nabla u$, 其中 $\nabla = \boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$. 场 u 在已知点 (x, y, z) 的梯度的方向与过此点的等值面 $u(x, y, z) = C$ 的法线方向一致[①]. 对于场的每一点, 此向量给出函数 u 变化率最大的方向和大小,

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

场 u 在某方向 $\boldsymbol{l}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ 上的导数等于:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

2. 场的散度与旋度. 若

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = a_x(x, y, z)\boldsymbol{i} + a_y(x, y, z)\boldsymbol{j} + a_z(x, y, z)\boldsymbol{k}$$

[①] 并且指向 u 增加的方向. —— 译注

是连续可微向量场, 则称标量

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}$$

为这个场的*散度*.

向量

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\nabla\times\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}$$

称为场的*旋度*.

3. 向量通过曲面的通量. 若 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ 给出区域 Ω 内的向量场, S 是此区域内的曲面, $\boldsymbol{n}\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 是曲面 S 的单位法向量, 则称积分

$$\iint\limits_S a_n\,\mathrm{d}S=\iint\limits_S(a_x\cos\alpha+a_y\cos\beta+a_z\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

(式中 $a_n=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}$ 为向量的法向分量) 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 所指的方向上通过所给曲面 S 的通量. 以向量形式表述的奥斯特罗格拉茨基公式为

$$\iint\limits_S a_n\,\mathrm{d}S=\iiint\limits_V\operatorname{div}\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

式中曲面 S 为区域 V 的边界, $\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 的单位外法向量.

4. 向量的环量. 数

$$\int\limits_C\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int\limits_C a_x\,\mathrm{d}x+a_y\,\mathrm{d}y+a_z\,\mathrm{d}z \tag{1}$$

称为向量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ 沿某曲线 C 的*曲线积分* (场的功[①]).

若 C 是封闭围线, 则称曲线积分为向量 $\boldsymbol{a}$ 沿围线 C 的*环量*.

以向量形式表述的*斯托克斯公式*为

$$\oint\limits_C\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint\limits_S(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_n\,\mathrm{d}S,$$

式中封闭围线 C 为曲面 S 的边界, 并且曲面 S 的单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 之方向应当这样来选择, 使得立于曲面 S 上的观察者从法线所指方向来看, 围线 C 的环绕是逆时针的 (对于右手坐标系).

5. 有势场. 若向量场 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ 是某标量 u 的梯度, 即

$$\operatorname{grad}u=\boldsymbol{a},$$

则 $\boldsymbol{a}$ 称为*有势场*, 而标量 u 称为*场的势*.

若势 u 为单值函数, 则

$$\int\limits_{AB}\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=u(B)-u(A).$$

[①]原文如此, 这里定义的功并不是物理学意义上的功. 为避免混淆, 译文一律称积分 (1) 为向量 a 沿曲线 C 的环量. —— 译注

特别地, 这时向量 $\boldsymbol{a}$ 的环量等于零.

在单连通区域内给定的场 $\boldsymbol{a}$ 为有势场的充要条件是

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},$$

即这样的场应当是无旋场.

4401.1. 求场 $u=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$ 在下列各点的梯度的大小和方向: (a) $O(0,0,0)$;(b) $A(1,1,1)$;(c) $B(2,1,1)$. 在场中怎样的点, 梯度等于零?

4401.2. 设

$$u=xy-z^2,$$

求 $\operatorname{grad}u$ 在点 $M(-9,12,10)$ 的大小和方向. 沿坐标角 xOy 的等分线方向的导数 $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ 等于什么?

4402. 在空间 $Oxyz$ 的哪些点, 场

$$u=x^3+y^3+z^3-3xyz$$

的梯度 (a) 垂直于 Oz 轴; (b) 平行于 Oz 轴; (c) 等于零?

4403. 给定标量场

$$u=\ln\frac{1}{r},$$

其中 $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$. 在空间 $Oxyz$ 的哪些点成立等式

$$|\operatorname{grad}u|=1?$$

4404. 作标量场

$$u=\sqrt{x^2+y^2+(z+8)^2}+\sqrt{x^2+y^2+(z-8)^2}$$

的等值面. 求通过点 $M(9,12,28)$ 的等值面. 在区域 $x^2+y^2+z^2\leqslant 36$ 内 $\max u$ 等于什么?

4405. 求场

$$u=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}$$

在点 $A(1,2,2)$ 及 $B(-3,1,0)$ 的梯度之间的夹角 φ.

4406. 设已知标量场

$$u=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

作出场的等值面和梯度的等模面.

求区域 $1<z<2$ 内的 $\inf u$, $\sup u$, $\inf|\operatorname{grad}u|$, $\sup|\operatorname{grad}u|$.

4407. 精确到高阶无穷小量, 求在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处之二无限接近的等值面

$$u(x,y,z)=c\quad 及\quad u(x,y,z)=c+\Delta c$$

之间的距离, 其中 $u(x_0,y_0,z_0)=c$ $(\operatorname{grad}u(x_0,y_0,z_0)\neq 0)$.

4408. 证明公式:

(a) $\operatorname{grad}(u+c)=\operatorname{grad}u$ (c 为常数); (b) $\operatorname{grad}cu=c\operatorname{grad}u$ (c 为常数);

(c) $\operatorname{grad}(u+v)=\operatorname{grad}u+\operatorname{grad}v$; (d) $\operatorname{grad}(uv)=u\operatorname{grad}v+v\operatorname{grad}u$;

(e) $\operatorname{grad}(u^2)=2u\operatorname{grad}u$; (f) $\operatorname{grad}f(u)=f'(u)\operatorname{grad}u$.

4409. 计算: (a) $\operatorname{grad} r$; (b) $\operatorname{grad} r^2$; (c) $\operatorname{grad} \frac{1}{r}$, 其中 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

4410. 求 $\operatorname{grad} f(r)$, 其中 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

4411. 求 $\operatorname{grad}(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r})$, 其中 $\boldsymbol{c}$ 为常向量, $\boldsymbol{r}$ 为引自坐标原点的径向量.

4412. 求 $\operatorname{grad}\{|\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r}|^2\}$ ($\boldsymbol{c}$ 为常向量).

4413. 证明公式:

$$\operatorname{grad} f(u,v) = \frac{\partial f}{\partial u} \operatorname{grad} u + \frac{\partial f}{\partial v} \operatorname{grad} v.$$

4414.1. 证明公式:

$$\nabla^2(uv) = u\nabla^2 v + v\nabla^2 u + 2\nabla u \nabla v,$$

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

4414.2. 证明: 若函数 $u = u(x,y,z)$ 在凸区域 Ω 内可微, 且 $|\operatorname{grad} u| \leqslant M$, 其中 M 为常数, 则对于 Ω 中任意二点 A, B 有:

$$|u(A) - u(B)| \leqslant M\rho(A,B),$$

式中 $\rho(A,B)$ 为 A 与 B 二点之间的距离.

4415. 对于函数 $u = u(x,y,z)$, 写出 $\operatorname{grad} u$ 在下列坐标系中的表达式: (a) 圆柱坐标系; (b) 球坐标系.

4416. 求场 $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ 在已知点 $M(x,y,z)$ 处沿此点的径向量 $\boldsymbol{r}$ 之方向的导数. 在怎样的情况下, 此导数等于梯度的大小?

4417. 求场 $u = \frac{1}{r}$ (其中 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$) 在方向 $\boldsymbol{l}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ 上的导数. 在怎样的情况下, 此导数等于零?

4418. 求场 $u = u(x,y,z)$ 在场 $v = v(x,y,z)$ 的梯度方向的导数. 在怎样的情况下, 此导数等于零?

4419. 设

$$u = \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k},$$

写出

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} \times \operatorname{grad} u$$

通过单位向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 的表达式.

4420. 确定向量场

$$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$$

的向量线.

4421. 用直接计算的方法证明: 向量 $\boldsymbol{a}$ 的散度与直角坐标系的选择无关.

4422. 证明:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}(M)=\lim_{d(S)\to 0}\frac{1}{V}\iint\limits_{S}a_n\,\mathrm{d}S,$$

其中 S 表示围绕点 M 的封闭曲面, V 是该曲面所围区域的体积, $\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 的外法向量, $d(S)$ 为曲面 S 的直径.

4423.1. 求场 $\boldsymbol{a}=\dfrac{-\boldsymbol{i}x+\boldsymbol{j}y+\boldsymbol{k}z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 在点 $M(3,4,5)$ 的散度. 向量 $\boldsymbol{a}$ 通过无穷小球面 $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=\varepsilon^2$ 的通量 Π 近似地等于什么?

4423.2. 求

$$\operatorname{div}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\end{vmatrix}.$$

4424. 证明:

(a) $\operatorname{div}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\operatorname{div}\boldsymbol{a}+\operatorname{div}\boldsymbol{b}$;

(b) $\operatorname{div}(u\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}\operatorname{grad}u$ ($\boldsymbol{c}$ 为常向量, u 为标量);

(c) $\operatorname{div}(u\boldsymbol{a})=u\operatorname{div}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\operatorname{grad}u$.

4425. 求 $\operatorname{div}(\operatorname{grad}u)$.

4426. 求 $\operatorname{div}[\operatorname{grad}f(r)]$, 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 在什么情况下 $\operatorname{div}[\operatorname{grad}f(r)]=0$?

4427. 计算: (a) $\operatorname{div}\boldsymbol{r}$; (b) $\operatorname{div}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$.

4428. 计算: $\operatorname{div}[f(r)\boldsymbol{c}]$, 式中 $\boldsymbol{c}$ 为常向量.

4429. 求 $\operatorname{div}[f(r)\boldsymbol{r}]$. 在什么情形下该散度等于零?

4430. 求: (a) $\operatorname{div}(u\operatorname{grad}u)$; (b) $\operatorname{div}(u\operatorname{grad}v)$.

4431. 设流体充满空间并以恒定的角速度 ω 沿逆时针方向绕 Oz 轴旋转, 求速度向量 $\boldsymbol{v}$ 和加速度向量 $\boldsymbol{w}$ 在已知时刻在空间点 $M(x,y,z)$ 处的散度.

4432. 求包含多个引力中心的有限系统所产生的引力场之散度.

4433. 求由极坐标 r 与 φ 表示的平面向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(r,\varphi)$ 之散度的表达式.

4434. 设

$$x=f(u,v,w),\quad y=g(u,v,w),\quad z=h(u,v,w),$$

用正交曲线坐标 u, v, w 表示 $\operatorname{div}\boldsymbol{a}(x,y,z)$.

作为特殊的情形, 求用柱坐标和球坐标表示 $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$ 的表达式.

提示: 研究向量 $\boldsymbol{a}$ 通过以曲面 $u=$ 常数, $v=$ 常数, $w=$ 常数为界的无穷小平行六面体表面的通量.

4435. 证明:

(a) $\operatorname{rot}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\operatorname{rot}\boldsymbol{a}+\operatorname{rot}\boldsymbol{b}$; (b) $\operatorname{rot}(u\boldsymbol{a})=u\operatorname{rot}\boldsymbol{a}+\operatorname{grad}u\times\boldsymbol{a}$.

4436.1. 求: (a) $\operatorname{rot}\boldsymbol{r}$; (b) $\operatorname{rot}[f(r)\boldsymbol{r}]$.

4436.2. 设

$$\boldsymbol{a}=\frac{y}{z}\boldsymbol{i}+\frac{z}{x}\boldsymbol{j}+\frac{x}{y}\boldsymbol{k},$$

求 $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ 在点 $M(1,2,-2)$ 的大小和方向.

4437. 求: (a) $\operatorname{rot}[\boldsymbol{c}f(r)]$; (b) $\operatorname{rot}[\boldsymbol{c}\times f(r)\boldsymbol{r}]$ ($\boldsymbol{c}$ 为常向量).

4438. 证明: $\operatorname{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{b}$.

4439. 求: (a) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}u)$; (b) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})$.

4440. 设流体充满空间并以恒定的角速度 ω 围绕轴 $\boldsymbol{l}\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 旋转. 求速度向量 $\boldsymbol{v}$ 在已知时刻在空间点 $M(x,y,z)$ 处的旋度.

4441.1. 求由极坐标 r 和 φ 表示的平面向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(r,\varphi)$ 的旋度的表达式.

4441.2. 写出 $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}(x,y,z)$ 在下列坐标系中的表达式:

(a) 圆柱坐标系; (b) 球坐标系.

4442.1. 求径向量 $\boldsymbol{r}$ 的通量: (a) 通过圆锥体 $x^2+y^2\leqslant z^2$ $(0\leqslant z\leqslant h)$ 的侧表面; (b) 通过此圆锥体的底面.

4442.2. 求向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}yz+\boldsymbol{j}xz+\boldsymbol{k}xy$ 的通量: (a) 通过圆柱体 $x^2+y^2\leqslant a^2$ $(0\leqslant z\leqslant h)$ 的侧表面; (b) 通过此圆柱的全表面.

4443. 求径向量 $\boldsymbol{r}$ 通过曲面

$$z=1-\sqrt{x^2+y^2}\quad(0\leqslant z\leqslant 1)$$

的通量.

4444. 求向量 $\boldsymbol{a}=x^2\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$ 通过正八分之一球面 $x^2+y^2+z^2=1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$ 的通量.

4445.1. 求向量 $\boldsymbol{a}=y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{j}+x\boldsymbol{k}$ 通过以平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=a$ $(a>0)$ 为界的角锥的全表面的通量. 利用奥斯特罗格拉茨基公式验证结果.

4445.2. 求向量 $\boldsymbol{a}=x^3\boldsymbol{i}+y^3\boldsymbol{j}+z^3\boldsymbol{k}$ 通过球面 $x^2+y^2+z^2=x$ 的通量.

4446. 证明: 向量 $\boldsymbol{a}$ 通过由方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ $((u,v)\in\Omega)$ 给出的曲面 S 的通量等于

$$\iint\limits_S a_n\,\mathrm{d}S=\iint\limits_\Omega\left(\boldsymbol{a}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

式中 $a_n=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 的单位法向量.

4447. 求向量 $\boldsymbol{a}=m\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ (m 为常数) 通过围绕坐标原点的封闭曲面 S 的通量.

4448. 已知向量

$$a(\boldsymbol{r})=\sum_{i=1}^{n}\operatorname{grad}\left(-\frac{e_i}{4\pi r_i}\right),$$

其中 e_i 为常数, r_i 为点 M_i (点源) 距动点 $M(\boldsymbol{r})$ 的距离. 求此向量通过围绕点 $M_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的封闭曲面 S 的通量.

4449. 证明:

$$\iint\limits_S\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S=\iiint\limits_V\nabla^2u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中曲面 S 是区域 V 的边界.

4450. 在温度场 u 内, 在单位时间内通过面微元 $\mathrm{d}S$ 的热量等于:

$$\mathrm{d}Q = -k\boldsymbol{n}\cdot \mathrm{grad}\, u\,\mathrm{d}S,$$

其中 k 为热导率, $\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 的单位法向量, 求在单位时间内物体 V 所吸收的热量. 研究温度上升的速度, 从而推出物体温度所满足的方程 (*热传导方程*).

4451. 处于运动状态的不可压缩流体充满区域 V. 假定在区域 V 内没有源和汇, 试推出*连续性方程*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0,$$

式中 $\rho = \rho(x,y,z,t)$ 为流体密度, $\boldsymbol{v}$ 为速度向量, t 为时间.

提示: 研究流体通过包含在 V 中的任意区域 ω 的流量.

4452.1. 求向量 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}$ 沿着一段螺旋线

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}a\cos t + \boldsymbol{j}a\sin t + \boldsymbol{k}bt \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

的环量.

4452.2. 求场 $\boldsymbol{a} = \dfrac{1}{y}\boldsymbol{i} + \dfrac{1}{z}\boldsymbol{j} + \dfrac{1}{x}\boldsymbol{k}$ 沿 $M(1,1,1)$ 和 $N(2,4,8)$ 这两点之间的线段的环量.

4452.3. 求场 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}\mathrm{e}^{y-z} + \boldsymbol{j}\mathrm{e}^{z-x} + \boldsymbol{k}\mathrm{e}^{x-y}$ 沿 $O(0,0,0)$ 和 $M(1,3,5)$ 这两点之间的线段的环量.

4453.1. 求场 $\boldsymbol{a} = (y+z)\boldsymbol{i} + (z+x)\boldsymbol{j} + (x+y)\boldsymbol{k}$ 沿球面 $x^2+y^2+z^2=25$ 上连接 $M(3,4,0)$ 和 $N(0,0,5)$ 这两点的最短的一段大圆圆弧的环量.

4453.2. 求向量 $\boldsymbol{a} = f(r)\boldsymbol{r}$ (其中 f 为连续函数) 沿着弧 AB 的环量.

4454.1. 求向量 $\boldsymbol{a} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ (c 为常数) 的环量: (a) 沿着圆周 $x^2+y^2 = 1, z=0$; (b) 沿着圆周 $(x-2)^2+y^2=1, z=0$.

4454.2. 求向量 $\boldsymbol{a} = \mathrm{grad}\left(\arctan\dfrac{y}{x}\right)$ 沿着围线 C 的环量 Γ:

(a) C 不围绕 Oz 轴; (b) C 围绕 Oz 轴.

4455. 已知向量场

$$\boldsymbol{a} = \frac{y}{\sqrt{x}}\boldsymbol{i} - \frac{x}{\sqrt{z}}\boldsymbol{j} + \sqrt{xyz}\boldsymbol{k}.$$

计算 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}$ 在点 $M(1,1,1)$ 的表达式, 然后近似地求出向量场沿无穷小圆周

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=\varepsilon^2, \\ (x-1)\cos\alpha+(y-1)\cos\beta+(z-1)\cos\gamma=0 \end{cases}$$

(其中 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$) 的环量 Γ.

4456. 平面定常流由速度向量

$$\boldsymbol{w} = u(x,y)\boldsymbol{i} + v(x,y)\boldsymbol{j}$$

描述, 试确定: (1) 通过区域 S 的边界 (封闭围线) C 流出的流体的量 Q (流量); (2) 速度向量沿着围线 C 的环量 Γ. 若流体是不可压缩的且流场无旋, 则函数 u 和 v 满足怎样的方程?

4457.1. 证明: 场

$$a = yz(2x+y+z)\boldsymbol{i} + xz(x+2y+z)\boldsymbol{j} + xy(x+y+2z)\boldsymbol{k}$$

是有势场, 并求这个场的势.

4457.2. 确认场

$$\boldsymbol{a} = \frac{2}{(y+z)^{\frac{1}{2}}}\boldsymbol{i} - \frac{x}{(y+z)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{j} - \frac{x}{(y+z)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{k}$$

是有势场, 并求该场沿着正八分之一球面上连接点 $M(1,1,3)$ 和 $N(2,4,5)$ 的路径的环量.

4458. 求由位于坐标原点的质量 m 所产生的引力场 $\boldsymbol{a} = -\dfrac{m}{r^3}\boldsymbol{r}$ 的势.

4459. 设质置 m_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 的质点位于点 M_i $(i=1,2,\cdots,n)$, 求此质点系所产生的引力场的势.

4460. 证明: 场 $\boldsymbol{a} = f(r)\boldsymbol{r}$ (其中 $f(r)$ 是单值连续函数) 是有势场. 求这个场的势.

4461. 证明公式:

$$\operatorname{grad}_P \left\{ \iiint\limits_V \rho(Q)\frac{\mathrm{d}V}{r} \right\} = -\iint\limits_S \rho(Q)\boldsymbol{n}\frac{\mathrm{d}S}{r} + \iiint\limits_V \operatorname{grad}_Q \rho(Q)\frac{\mathrm{d}V}{r},$$

其中 S 为区域 V 的边界曲面, $\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 的外法向量, r 为点 $P(x,y,z)$ 与点 $Q(\xi,\eta,\zeta)$ 之间的距离.

4462. 证明: 若 $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} u$, 其中

$$u(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta,$$

$$r = \sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2},$$

则

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \rho(x,y,z)$$

(假设相应积分有意义).

答　案

第一章

16. 0; 1. **17.** $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$. **22.** $-1.01 < x < -0.99$. **23.** $x \leqslant -8$; $x \geqslant 12$. **24.** $x < -\frac{1}{2}$. **25.** $0 < x < \frac{2}{3}$. **26.** $|x| \leqslant 6$. **27.** $x > -\frac{1}{2}$. **28.** $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$. **29.** $\frac{5-\sqrt{30}}{10} < x < \frac{5-\sqrt{20}}{10}$; $\frac{5+\sqrt{20}}{10} < x < \frac{5+\sqrt{30}}{10}$. **31.** 第二个. **32.** 两位. **33.** 不超过 0.41%. **34.** $9.910\,2\,\text{cm}^2 \leqslant S \leqslant 10.090\,2\,\text{cm}^2$; $\Delta \leqslant 0.090\,2\,\text{cm}^2$; $\delta \leqslant 0.91\%$. **35.** $3.93\,\text{g/cm}^3 \pm 0.27\,\text{g/cm}^3$; $\delta \leqslant 7.3\%$. **36.** $\delta \leqslant 3.05\%$. **37.** $172.480\,\text{m}^3 \leqslant V \leqslant 213.642\,\text{m}^3$; $V = 192.660\,\text{m}^3 \pm 20.982\,\text{m}^3$; $\delta \approx 12\%$. **38.** $\Delta \leqslant 0.17\,\text{mm}$. **39.** $\Delta < 0.000\,5\,\text{m}$. **42.** (a) $N \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$; (b) $N \geqslant \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$; (c) $N \geqslant 1 + \frac{\lg\frac{1}{\varepsilon}}{\lg 2}$; (d) $N \geqslant \frac{\lg\varepsilon}{\lg 0.999} \approx 2\ 330 \lg\frac{1}{\varepsilon}$. **43.** (a) $N \geqslant E$; (b) $N \geqslant \left(\frac{\lg E}{\lg 2}\right)^2$; (c) $N \geqslant 10^{10}$. **46.** 0. **47.** 0. **48.** 0. **49.** $\frac{1}{3}$. **50.** $\frac{1-b}{1-a}$. **51.** $\frac{1}{2}$. **52.** 不存在. **53.** $\frac{1}{3}$. **54.** $\frac{4}{3}$. **55.** 3. **56.** 1. **57.** 2. **67.** (a) 第二个; (b) 第一个; (c) 第二个. **72.** $\mathrm{e} = 2.718\,28\cdots$. **92.** 若 $a \neq 0$, 等于 1; 若 $a = 0$ 属于 $[-1, 1]$, 不存在. **96.** $x_3 = 1\frac{1}{8}$. **97.** $x_{100} = \frac{1}{20}$. **98.** $x_{1000} = \frac{1000^{1000}}{1000!} \approx 2.49 \cdot 10^{452}$. **99.** $x_4 = x_5 = -120$. **100.** $x_{10} = 20$. **101.** (a) 0; 1; 1; 1; (b) $-3\frac{1}{2}$; 5; -2; 2. **102.** -1; $1\frac{1}{2}$; 0; 1. **103.** 0; 2; 0; 2. **104.** -4; 6; -4; 6. **105.** $-\frac{1}{2}$; 1; $-\frac{1}{2}$; 1. **106.** $-\infty$; $+\infty$; $-\infty$; $+\infty$. **107.** $-\infty$; -1; $-\infty$; $-\infty$. **108.** 0; $+\infty$; 0; $+\infty$. **109.** $-\infty$; $+\infty$; $-\infty$; $+\infty$. **110.** -5; 1.25; 0; 0. **111.** $-\frac{1}{2}$; 1. **112.** $-\left(\mathrm{e} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\mathrm{e} + 1$. **113.** 0; 1. **114.** 1; 2. **115.** 0; 1. **116.** 0; 1. **117.** 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\cdots$; 0. **118.** 区间 $(0, 1]$ 上的一切实数. **119.** 1; 5. **120.** a; b. **127.** (a) 发散; (b) 可为收敛, 可为发散. **128.** (a) 不能; (b) 不能. **129.** 不能. **130.** 不能. **144.** (a) 0; (b) 0. **147.** $\ln 2$. **148.** $\frac{1}{3}(a + 2b)$. **151.** $-\infty < x < +\infty$, $x \neq -1$. **152.** $-\infty < x \leqslant -\sqrt{3}$ 和 $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$. **153.** $-1 \leqslant x < 1$. **154.** (a) $|x| > 2$; (b) $x > 2$. **155.** $4k^2\pi^2 \leqslant x \leqslant (2k+1)^2\pi^2$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$. **156.** $|x| \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 和 $\sqrt{\frac{\pi}{2}(4k-1)} \leqslant |x| \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}(4k+1)}$ $(k = 1, 2, \cdots)$. **157.** $\frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k}$ 和 $-\frac{1}{2k+1} < x < -\frac{1}{2k+2}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$. **158.** $x > 0, x \neq n$ $(n = 1, 2, \cdots)$. **159.** $-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1$. **160.** $|x - k\pi| \leqslant \frac{\pi}{6}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$. **161.** $10^{\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi} < x < 10^{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$. **162.** $x = -1, -2, -3, \cdots$ 和 $x \geqslant 0$. **163.** $x < 0, x \neq -n$ $(n = 1, 2, \cdots)$. **164.** $1 < x \leqslant 2$. **165.** (a) $x = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \cdots$; (b) $x > 4$; (c) $k\pi + \frac{\pi}{4} \leqslant x < k\pi + \frac{\pi}{2}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$; (d) $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{4\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$.

166. $-1 \leqslant x \leqslant 2; 0 \leqslant y \leqslant 1\frac{1}{2}$. **167.** $2k\pi + \frac{\pi}{3} < x < 2k\pi + \frac{5\pi}{3}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots); -\infty < y \leqslant \lg 3$. **168.** $-\infty < x < +\infty; 0 \leqslant y \leqslant \pi$. **169.** $1 \leqslant x \leqslant 100; -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$. **170.** $x = \frac{p}{2q+1}$, p 和 q 为整数; $y = \pm 1$. **171.** $P = 2b + 2\left(1 - \frac{b}{h}\right)x$ $(0 < x < h); S = bx\left(1 - \frac{x}{h}\right)$ $(0 < x < h)$.**172.** $a = \sqrt{100 - 96\cos x}$ $(0 < x < \pi); S = 24\sin x$ $(0 < x < \pi)$. **173.** 若 $0 \leqslant x \leqslant \frac{a-b}{2}$, $S = \frac{h}{a-b}x^2$; 若 $\frac{a-b}{2} < x < \frac{a+b}{2}$, $S = h\left(x - \frac{a-b}{4}\right)$; 若 $\frac{a+b}{2} \leqslant x \leqslant a$, $S = h\left[\frac{a+b}{2} - \frac{(a-x)^2}{a-b}\right]$. **174.** 若 $-\infty < x \leqslant 0$, $m(x) = 0$; 若 $0 < x \leqslant 1$, $m(x) = 2x$; 若 $1 < x \leqslant 2$, $m(x) = 2$; 若 $2 < x \leqslant 3$, $m(x) = 3$; 若 $3 < x < +\infty$, $m(x) = 4$. **178.** $E_y = \{0 \leqslant y \leqslant 4\}$. **179.** $E_y = \{1 < y < 3\}$. **180.** $E_y = \{0 < y < 1\}$. **181.** $E_y = \{1 \leqslant |y| < +\infty\}$. **182.** $E_y = \{1 \leqslant y \leqslant 2\}$. **183.** 当 $a < b$ 时 $a < y < b$, 当 $a > b$ 时 $b < y < a$. **184.** $1 < y < +\infty$. **185.** $-\infty < y < 0$ 和 $1 < y < +\infty$. **186.** $0 < y \leqslant \frac{1}{2}$. **187.** $-\infty < y < +\infty$. **188.** $0 < y < \frac{1}{2}$ 和 $\frac{3}{2} \leqslant y < 2$. **189.** 0; 0; 0; 0; 24. **190.** 0; -6; 4. **191.** 1; 1; 1; 2. **192.** -1; 0; 1; 2; 4. **193.** $1, \frac{1+x}{1-x}, \frac{-x}{2+x}, \frac{2}{1+x}, \frac{x-1}{x+1}, \frac{1+x}{1-x}$. **194.** (a) 若 $x = -1, x = 0$ 和 $x = 1$, $f(x) = 0$; 若 $-\infty < x < -1$ 和 $0 < x < 1$, $f(x) > 0$; 若 $-1 < x < 0$ 和 $1 < x < +\infty$, $f(x) < 0$; (b) 若 $x = \pm\frac{1}{k}$ $(k = 1, 2, \cdots)$, $f(x) = 0$; 若 $\frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k}$ 和 $-\frac{1}{2k+1} < x < -\frac{1}{2k+2}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots), f(x) > 0$; 若 $\frac{1}{2k+2} < x < \frac{1}{2k+1}$ 和 $-\frac{1}{2k} < x < -\frac{1}{2k+1}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$, $f(x) < 0$; (c) 若 $x \leqslant 0$ 和 $x = 1$, $f(x) = 0$; 若 $0 < x < 1$, $f(x) > 0$; 若 $1 < x < +\infty$, $f(x) < 0$. **195.** (a) a; (b) $2x + h$; (c) $a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h}$. **197.** $f(x) = \frac{7}{3}x - 2; f(1) = \frac{1}{3}; f(2) = 2\frac{2}{3}$. **198.** $f(x) = \frac{7}{6}x^2 + \frac{17}{6}x + 1; f(-1) = -\frac{2}{3}; f(0.5) = 2\frac{17}{24}$. **199.** $f(x) = \frac{10}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 - \frac{29}{6}x + 2$. **200.** $f(x) = 10 + 5 \cdot 2^x$. **203.** (a) $2k\pi < x < \pi + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots), x \neq \frac{4k+1}{2}\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$; (b) $1 < x < \mathrm{e}$; (c) $x > 1, x \neq k$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$. **205.** (a) $z = x + y$; (b) $z = \frac{xy}{x+y}$; (c) $z = \frac{x+y}{1-xy}$; (d) $z = \frac{x+y}{1+xy}$. **206.** $\varphi(\varphi(x)) = x^4; \psi(\psi(x)) = 2^{2^x}; \varphi(\psi(x)) = 2^{2x}; \psi(\varphi(x)) = 2^{x^2}$. **207.** $\varphi(\varphi(x)) = \operatorname{sgn} x; \psi(\psi(x)) = x (x \neq 0); \varphi(\psi(x)) = \psi(\varphi(x)) = \operatorname{sgn} x (x \neq 0)$. **208.** $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x); \psi(\varphi(x)) = \psi(x); \psi(\psi(x)) = \varphi(\psi(x)) = 0$. **209.** $-\frac{1-x}{x}; x$ $(x \neq 0, x \neq 1)$. **210.** $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$. **211.** $x^2 - 5x + 6$. **212.** $x^2 - 2$ $\left(|x| \geqslant 2\frac{1}{2}\right)$. **213.1.** $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$. **213.2.** $f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^2$. **221.** (a) 当 $a > 0$ 递增, 当 $a < 0$ 递减; (b) 当 $a > 0$ 在区间 $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ 内递减, 在区间 $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ 内递增; (c) 递增; (d) 当 $ad - bc > 0$ 在区间 $\left(-\infty, -\frac{d}{c}\right)$ 和区间 $\left(-\frac{d}{c}, +\infty\right)$ 上递增; (e) 当 $a > 1$ 递增, 当 $0 < a < 1$ 递减. **222.** 若对数之底大于 1, 则可能. **224.** $\frac{y-3}{2}$ $(-\infty < y < +\infty)$. **225.** (a) $-\sqrt{y}$ $(0 \leqslant y < +\infty)$; (b) $\sqrt{y}$ $(0 \leqslant y + \infty)$. **226.** $\frac{1-y}{1+y}$ $(y \neq -1)$. **227.** (a) $-\sqrt{1-y^2}$ $(0 \leqslant y \leqslant 1)$; (b) $-\sqrt{1-y^2}$ $(0 \leqslant y \leqslant 1)$. **228.** $\operatorname{arsinh} y = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$ $(-\infty < y < +\infty)$. **229.** $\operatorname{artanh} y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}$ $(-1 < y < 1)$. **230.** 若 $-\infty < y < 1$, $x = y$; 若 $1 \leqslant y \leqslant 16$, $x = \sqrt{y}$; 若 $16 < y < +\infty$, $x = \log_2 y$. **231.** (a) 奇函数; (b) 偶函数; (c) 偶函数; (d) 奇函数; (e) 奇函数. **233.** (a) 周期函数, $T = \frac{2\pi}{\lambda}$; (b) 周期函数, $T = 2\pi$; (c) 周期函数, $T = 6\pi$; (d) 周期函数, $T = \pi$; (e) 非周期函数; (f) 周期函数, $T = \pi$; (g) 非周期函数; (h) 非周期函数. **241.** $t = 1\frac{2}{3}\mathrm{s}, x = -3\frac{1}{3}\mathrm{m}$. **243.** $x_0 = -\frac{b}{2a}, y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$. **244.** $y = x - \frac{x^2}{36\ 000}$; 9 km; 36 km. **251.** $x_0 = -\frac{d}{c}; y_0 = \frac{a}{c}$. **252.** $p = \frac{12}{V}$ $(V > 0)$. **263.** $k = \frac{a}{a_1}, m = \frac{a_1 b - a b_1}{a_1^2}; n = \frac{c}{a_1} - \frac{b_1}{a_1^3}(a_1 b - a b_1), x_0 = -\frac{b_1}{a_1}$. **264.** $F = \frac{10}{x^2}$. **287.** $A = \sqrt{a^2 + b^2}; \sin x_0 = -\frac{a}{A}, \cos x_0 = \frac{b}{A}$. **356.** 若 $|x - \pi k| \leqslant \frac{\pi}{6}$, $y = 2\sin x$; 若 $\frac{\pi}{6} < |x - \pi k| < \frac{5\pi}{6}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$, $y = (-1)^k$.

357. (a) $y=\frac{1}{2}(x+|x|)$; (b) 和 (c) 若 $x\geqslant 0$, $y=x^2$; 若 $x<0$, $y=0$; (d) 若 $x<0$, $y=x$; 若 $x\geqslant 0$, $y=x^4$. **358.** (a) $y=1$; (b) 若 $1\leqslant |x|\leqslant\sqrt{3}$, $y=1$; 若 $|x|<1$ 或 $|x|>\sqrt{3}$, $y=0$; (c) 若 $|x|\leqslant 1$, $y=1$; 若 $|x|>1$, $y=2$; (d) 若 $|x|>2$, $y=-2$; 若 $|x|\leqslant 2$, $y=2-(2-x^2)^2$. **359.** 当 $x<0$ 时有: (a) (1) $f(x)=1+x$, (2) $f(x)=-(1+x)$; (b) (1) $f(x)=-2x-x^2$, (2) $f(x)=2x+x^2$; (c) (1) $f(x)=\sqrt{-x}$, (2) $f(x)=-\sqrt{-x}$; (d) (1) $f(x)=-\sin x$, (2) $f(x)=\sin x$; (e) (1) $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$, (2) $f(x)=-\mathrm{e}^{-x}$; (f) (1) $f(x)=\ln(-x)$, (2) $f(x)=-\ln(-x)$. **360.** (a) $x=-\frac{b}{2a}$; (b) $x=\frac{1}{2}$; (c) $x=\frac{b-a}{2}$; (d) $x=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. **361.** (a) (x_0,ax_0+b), 其中 x_0 为任意的; (b) $\left(-\frac{d}{c},\frac{a}{c}\right)$; (c) (x_0,y_0), 其中 $x_0=-\frac{b}{3a}, y_0=ax_0^3+bx_0^2+cx_0+d$; (d) (2,0); (e) (2,1). **372.** 根: −1.88; 0.35; 1.53. **373.** 2.11; −0.25; −1.86. **374.** 0.25; 1.49. **375.** 0.64. **376.** 1.37; 10. **377.** −0.54. **378.** 0; 4.49. **379.** $x_1=-0.57, y_1=-1.26; x_2=-0.42, y_2=1.19; x_3=0.45, y_3=0.74; x_4=0.54, y_4=-0.68$. **380.** $x_1=-1.30, y_1=9.92; x_2=2.30, y_2=9.73; x_3=-0.62, y_3=-9.98; x_4=1.62, y_4=-9.87$. **382.** (a) 一般地说, 不是; (b) 是. **385.** 上方有界, 下方无界. **387.** 分别为 $f(a)$ 和 $f(b)$. **388.** 0; 25. **389.** 0; 1. **390.** 0;1. **391.** $2;+\infty$. **392.** −1; 1. **393.** $-\sqrt{2};\sqrt{2}$. **394.** $\frac{1}{2};4$. **395.** (a) 0.1; (b) 0.2. **396.** 0; 1. **397.** (a) 8; (b) 0.8; (c) 0.08; (d) 0.008. **398.** (a) π; (b) π; (c) π; (d) π. **411.** (a) 1; (b) $\frac{2}{3}$; (c) $\frac{1}{2}$. **412.** 6. **413.** 10. **414.** $\frac{1}{2}nm(n-m)$. **415.** 5^{-5}. **416.** $\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$. **417.** $n^{-\frac{n(n+1)}{2}}$. **418.** $-\frac{1}{2}$. **419.** $\frac{1}{2}$. **420.** 1. **421.** $\frac{1}{4}$. **422.** $\frac{1}{3}$. **423.** $\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$. **424.** (a) $\frac{n(n+1)}{2}$; (b) $2\frac{1}{24}$. **425.** $\frac{m}{n}$. **426.** $\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}$. **427.** $\frac{n(n+1)}{2}$. **428.** $\frac{m-n}{2}$. **429.** $x+\frac{a}{2}$. **430.** $x^2+ax+\frac{a^2}{3}$. **431.** 1. **432.** $\frac{1}{2}$. **433.** 3. **434.** $\frac{ab}{3}$. **435.** 1. **436.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **437.** $\frac{4}{3}$. **438.** −2. **439.** $\frac{1}{\sqrt{2a}}$. **440.** $-\frac{1}{16}$. **441.** $\frac{1}{144}$. **442.** $\frac{1}{4}$. **443.** $\frac{12}{5}$. **444.** $\frac{1}{n}$. **445.** −2. **446.** $\frac{1}{4}$. **447.** $\frac{2}{27}$. **448.** $\frac{3}{2}$. **449.** $4\frac{4}{27}$. **450.** $\frac{7}{36}$. **451.** $-\frac{1}{2}$. **452.** $\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}$. **453.** $\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}$. **455.1.** $\frac{n}{m}$. **455.2.** $\frac{1}{2}$. **456.** $\frac{1}{n!}$. **457.** $\frac{1}{2}(a+b)$. **458.** $\frac{1}{2}$. **459.** $-\frac{1}{4}$. **460.** 1. **461.** $\frac{2}{3}$. **462.** 2. **463.** $\frac{4}{3}$. **464.** $-\frac{1}{4}$. **465.** $\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$. **466.** 2^n. **467.** $2n$. **468.** $\lim_{a\to 0}x_1=\infty, \lim_{a\to 0}x_2=-\frac{c}{b}$. **469.** $a=1, b=-1$. **470.** $a_i=\pm1; b_i=\mp\frac{1}{2}$ $(i=1,2)$. **471.** 5. **472.** 0. **473.** $(-1)^{m-n}\frac{m}{n}$. **474.** (a) $\frac{1}{2}$; (b) 1; (c) $\frac{1}{3}$. **475.** $\frac{1}{2}$. **476.** 2. **477.** 4. **478.** $\frac{1}{p}$. **479.** $\frac{1}{2}$. **480.** $\frac{2}{\pi}$. **482.** $\cos a$. **483.** $-\sin a$. **484.** $\sec^2 a$ $(a\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}, k=0,\pm1,\cdots)$. **485.** $-\frac{1}{\sin^2 a}$ ($a\neq k\pi$, 其中 k 是整数). **486.** $\frac{\sin a}{\cos^2 a}$ ($a\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$, 其中 k 是整数). **487.** $-\frac{\cos a}{\sin^2 a}$ ($a\neq k\pi$, 其中 k 是整数). **488.** $-\sin a$. **489.** $-\cos a$. **490.** $\frac{2\sin a}{\cos^3 a}$ ($a\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$, 其中 k 是整数). **491.** $\frac{2\cos a}{\sin^3 a}$ ($a\neq k\pi$, 其中 k 是整数). **492.** $\frac{3}{2}\sin 2a$. **493.** −3. **494.** 14. **495.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **496.** −24. **497.** $-\frac{\cos 2a}{\cos^4 a}$ ($a\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$, 其中 k 是整数). **498.** $\frac{3}{4}$. **499.** $\frac{1}{4}$. **500.** $\frac{4}{3}$. **501.** $-\frac{1}{12}$. **502.** $\sqrt{2}$. **503.** 0. **504.** 3. **505.** 0. **506.** (a) $\frac{1}{2}$; (b) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; (c) 1. **507.** 0. **508.** 0. **509.** 0. **510.** 0. **511.** 1. **512.** e^3. **513.** 1. **514.** e^{-2}. **515.** e^{2a}. **516.** 若 $a_1<a_2$, 0; 若 $a_1>a_2$, $+\infty$; 若 $a_1=a_2$, $\mathrm{e}^{\frac{b_1-b_2}{a_1}}$. **517.** e. **518.** e^{-1}. **519.** (a) 1; (b) $\sqrt{\mathrm{e}}$. **520.** $\mathrm{e}^{\cot a}$ ($a\neq k\pi$, 其中 k 为整数). **521.** $\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$. **522.** e^{-1}. **523.** 1. **524.** e^{-2}. **525.** e. **526.** $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$. **527.** e^{x+1}. **528.** $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. **529.** 1. **530.** 1. **531.** $\frac{1}{a}$. **532.** 0. **533.** $\frac{1}{5}$. **534.** −2. **535.** $\frac{3}{2}$. **536.** $\frac{3}{2}$. **537.** $-\frac{\lg \mathrm{e}}{x^2}$. **538.** $\frac{2a}{b}$. **539.** $\left(\frac{a}{b}\right)^2$. **540.** (a) 0; (b) n. **541.** $\ln a$. **542.** $a^a\ln\frac{a}{\mathrm{e}}$. **543.** $a^a\ln \mathrm{e}a$. **544.** e^2. **545.** (a) $\frac{2}{3}$; (b) $\mathrm{e}^{\beta^2-\alpha^2}$; (c) $\frac{\alpha}{\beta}$; (d) −2. **546.** e^2. **547.** 1. **548.** $\frac{\alpha}{\beta}a^{\alpha-\beta}$. **549.** $a^b\ln a$. **550.** $a^x\ln^2 a$. **551.** $\mathrm{e}^{-(a+b)}$. **552.** $\ln x$.

553. $\ln x$. **554.** $\sqrt[a]{b}$. **555.** $\sqrt{ab}$. **556.** $\sqrt[3]{abc}$. **557.** $(a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}}$. **558.** $\frac{1}{\sqrt{ab}}$. **559.** $\left(\ln \frac{a}{b}\right)^{-1}$. **560.** $a^{a^a} \ln a$. **561.** (a) 0; (b) $\frac{\ln 3}{\ln 2}$. **562.** $\ln 8$. **563.** $-\ln 2$. **566.** (a) $\frac{1}{2}$; (b) $\frac{1}{2}$. **567.** 1. **568.** 0. **569.** $\ln a^2$. **570.** $\frac{1}{8}$. **571.** $\frac{1}{2}$. **572.** -2. **573.** e^2. **574.** $\mathrm{e}^{\frac{2}{\pi}}$. **575.** $\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}$. **576.** (a) 1; (b) $\frac{1}{2}$; (c) 1. **577.** (a) $\frac{2}{9}$; (b) $2\sinh\frac{1}{2}$. **578.** (a) $\cosh a$; (b) $\sinh a$; (c) -1. **579.** (a) $\ln 2$; (b) 1. **580.** e^{π^2}. **581.** $-\frac{\pi}{2}$. **582.** $\frac{\pi}{3}$. **583.** $-\frac{\pi}{2}$. **584.** $\frac{3\pi}{4}$. **585.** $\frac{1}{1+x^2}$. **586.** 2. **587.** $\frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$. **588.** $\frac{1}{2}$. **589.** 1. **590.** $\mathrm{e}^{\frac{2}{\pi}}$. **591.** (a) 0; (b) 0. **592.** (a) $+\infty$; (b) $\frac{1}{2}$. **593.** (a) -1; (b) 1. **594.** $\ln\frac{b^2}{a^2}$. **595.** (a) $\frac{\pi}{2}$; (b) $-\frac{\pi}{2}$. **596.** (a) 1; (b) 0. **597.** (a) 0; (b) 1. **600.** 2; 1; 2. **601.** 0; $(-1)^{n-1}$; $(-1)^n$. **602.** 0. **603.** 1. **604.** 0. **605.** 1. **606.** 0. **613.** (b) 若 $|x|<1$, $y=1$; 若 $|x|=1$, $y=0$. **614.** (b) 若 $0 \leqslant x < 1$, $y=0$; 若 $x=1$, $y=\frac{1}{2}$; 若 $1<x<+\infty$, $y=1$. **615.** 若 $0<|x|<1$, $y=-1$; 若 $|x|=1$, $y=0$; 若 $|x|>1$, $y=1$. **616.** $y=|x|$. **617.** 若 $0\leqslant x\leqslant 1$, $y=1$; 若 $x>1$, $y=x$. **618.** 若 $0\leqslant x\leqslant 1$, $y=1$; 若 $1<x<2$, $y=x$; 若 $x\geqslant 2$, $y=\frac{x^2}{2}$. **619.** 若 $0\leqslant x<2$, $y=0$; 若 $x=2$, $y=2\sqrt{2}$; 若 $x>2$, $y=x^2$. **620.** (b) 若 $x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $y=0$; 若 $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$, $y=1$. **621.** 若 $0\leqslant x\leqslant 2$, $y=\ln 2$; 若 $x>2$, $y=\ln x$. **622.** 若 $-1<x\leqslant 1$, $y=0$; 若 $x>1$, $y=\frac{\pi}{2}(x-1)$. **623.** 若 $x\leqslant -1$, $y=1$; 若 $x>-1$, $y=\mathrm{e}^{x+1}$. **624.** (a) 若 $x<0$, $y=x$; 若 $x=0$, $y=\frac{1}{2}$; 若 $x>0$, $y=1$; (b) $\frac{1}{x}$. **625.** (a) 若 $0\leqslant x<1$ 和 $4k-1<x<4k+1$, $y=\sqrt{x}$; 若 $4k-3<x<4k-2$ 和 $4k-2<x<4k-1$, $y=x$; 若 $x=2k-1$ $(k=1,2,3,\cdots)$, $y=\frac{1}{2}(\sqrt{x}+x)$; (b) 若 x 是有理数, $y=0$; 若 x 是无理数, $y=x$; (c) 正方形的闭曲线 $\max\{|x|,|y|\}=1$. **627.** (a) $x=1, x=-2, y=x-1$; (b) 若 $x\to\infty$, $y=x+\frac{1}{2}$, 若 $x\to-\infty$, $y=-x-\frac{1}{2}$; (c) $y=\frac{1}{3}-x$; (d) 若 $x\to+\infty$, $y=x$, 若 $x\to-\infty$, $y=0$; (e) 若 $x\to-\infty$, $y=0$, 若 $x\to+\infty$, $y=x$; (f) $y=x+\frac{\pi}{2}$. **628.** 0. **629.** $\frac{1}{1-x}$. **630.** $\frac{\sin x}{x}$. **632.** $\frac{1}{6}$. **633.** $\frac{a}{2}$. **634.** $\frac{1}{2}\ln a$. **635.** $\sqrt{\mathrm{e}}$. **636.** $\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{6}}$. **637.1.** $\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a})$. **637.2.** $\frac{2}{3}$. **637.3.** $\frac{b}{1-\alpha}$. **637.4.** $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **638.** (a) $\sqrt{1+x}-1$; (b) $1-\sqrt{1-x}$. **641.** (a) 2; (b) $+\infty$; (c) 0; (d) 1; (e) 2; (f) 1; (g) $2\sinh 1$. **643.** (a) $l=-1, L=2$; (b) $l=-2, L=2$; (c) $l=2, L=\mathrm{e}$. **644.** (a) $l=-1, L=1$; (b) $l=0, L=+\infty$; (c) $l=\frac{1}{2}, L=2$; (d) $l=0, L=+\infty$. **645.** (a) 一阶; (b) 二阶; (c) 一阶; (d) 三阶; (e) 三阶; (f) 三阶. **653.** (a) $2x$; (b) x; (c) $\frac{x^2}{2}$; (d) $\frac{x^3}{2}$. **655.** (a) $3(x-1)^2$; (b) $\frac{(1-x)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{2}}$; (c) $x-1$; (d) $\mathrm{e}(x-1)$; (e) $x-1$. **656.** (a) x^2; (b) $2x^2$; (c) $x^{\frac{2}{3}}$; (d) $x^{\frac{1}{8}}$. **657.** (a) $\left(\frac{1}{x}\right)^3$; (b) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$; (c) $-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}$; (d) $\left(\frac{1}{x}\right)^2$. **658.** (a) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)$; (b) $\sqrt{2}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}$; (c) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}}$; (d) $\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1-x}$; (e) $\frac{1}{x-1}$. **663.** (a) $9.95<x<10.05$; (b) $9.995<x<10.005$; (c) $9.999\,5<x<10.000\,5$; (d) $\sqrt{100-\varepsilon}<x<\sqrt{100+\varepsilon}$. **664.** $\Delta<\frac{\varepsilon}{27}$; (a) $\Delta<3.7$ mm; (b) $\Delta<0.37$ mm; (c) $\Delta<0.037$ mm. **665.** $100[1-10^{-(n+1)}]^2<x<100[1+10^{-(n+1)}]^2$; (a) $81<x<121$; (b) $98.01<x<102.01$; (c) $99.800\,1<x<100.200\,1$; (d) $99.980\,001<x<100.020\,001$. **666.** $\delta=\min\left(\frac{\varepsilon}{11},1\right)$. **667.** $\delta=\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}\approx 0.001\,x_0^2$; (a) $\delta\approx10^{-5}$; (b) $\delta\approx10^{-7}$; (c) $\delta\approx10^{-9}$. 不能. **669.** (a) 不能; (b) 可以. **671.** 不能; 在点 x_0 有界. **672.** 不能. 若函数 $f(x)$ 定义于有限区间 (a,b), 则这些不等式总是成立; 若至少有一个 a 或 b 为 ∞, 则 $\lim_{x\to\infty}|f(x)|=+\infty$. **673.** 不能. 反函数的单值性和连续性. **675.** 连续. **676.** 若 $A=4$, 连续, 若 $A\neq4$, 当 $x=2$ 时不连续. **677.** 当 $x=-1$ 时不连续. **678.** (a) 连续; (b) 当 $x=0$ 时不连续. **679.** 当 $x=0$ 时不连续.

680. 连续. **681.** 连续. **682.** 当 $x = 1$ 时不连续. **683.** 当$a = 0$ 时连续, 当 $a \neq 0$ 时不连续. **684.** $x = 0$ 时不连续. **685.** $x = k$ (k 为整数) 时不连续. **686.** $x = k^2$ $(k = 1, 2, \cdots)$ 时不连续. **687.** $x = -1$ 是无穷型间断点. **688.** $x = -1$ 是可去间断点. **689.** $x = -2$ 和 $x = 1$ 是无穷型间断点. **690.** $x = 0$ 和 $x = 1$ 是可去间断点; $x = -1$ 是无穷型间断点. **691.** $x = 0$ 是可去间断点; $x = k\pi$ $(k = \pm1, \pm2, \cdots)$ 是无穷型间断点. **692.** $x = \pm2$ 是可去间断点. **693.** $x = 0$ 是第二类间断点. **694.** $x = \frac{1}{k}$ $(k = \pm1, \pm2, \cdots)$ 是第一类间断点; $x = 0$ 是第二类间断点. **695.** $x = 0$ 和 $x = \frac{2}{2k+1}$ $(k = 0, \pm1, \cdots)$ 是可去间断点. **696.** $x = 0$ 是第一类间断点. **697.** $x = 0$ 是可去间断点. **698.** $x = 0$ 是第二类间断点. **699.** $x = 0$ 是可去间断点; $x = 1$ 是无穷型间断点. **700.** $x = 0$ 是无穷型间断点. $x = 1$ 是第二类间断点. **701.** $x = k\pi$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 是第一类间断点. **702.** $x = k$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 是第一类间断点. **703.** $x = k$ $(k = \pm1, \pm2, \cdots)$ 是第一类间断点. **704.** 函数连续. **705.** $x = \pm\sqrt{n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 是第一类间断点. **706.** $x = \frac{1}{k}$ $(k = \pm1, \pm2, \cdots)$ 是第一类间断点; $x = 0$ 是无穷型间断点. **707.** $x = \frac{1}{k}$ $(k = \pm1, \pm2, \cdots)$ 是第一类间断点; $x = 0$ 是可去间断点. **708.** $x = \frac{2}{(2k+1)\pi}$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 是第一类间断点; $x = 0$ 是第二类间断点. **709.** $x = \pm\frac{1}{k}$ 和 $x = \pm\frac{1}{\sqrt{k}}$ $(k = 1, 2, \cdots)$ 是第一类间断点; $x = 0$ 是第二类间断点. **710.** $x = \frac{1}{k}$ $(k = \pm1, \pm2, \cdots)$ 是无穷型间断点; $x = 0$ 是第二类间断点. **711.** $x = \frac{2}{(2k+1)\pi}$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 是无穷型间断点; $x = 0$ 是第二类间断点. **712.** $x = \pm\sqrt{n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 是第一类间断点. **713.** $x = 0, x = 1$ 和 $x = 2$ 是第一类间断点. **714.** $x = k\pi$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 是无穷型间断点. **715.** $x = \pm\sqrt{k\pi}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ 是无穷型间断点. **716.** $x = -1$ 和 $x = 3$ 是无穷型间断点. **717.** $x = 0$ 是第二类间断点. **718.** $x = 0$ 可去间断点. **719.** $x = \pm1$ 是第一类间断点. **720.** 若 $0 \leqslant x < 1$, $y = 1$; 若 $x = 1$, $y = \frac{1}{2}$; 若 $x > 1$, $y = 0$; $x = 1$ 是第一类间断点. **721.** $y = \operatorname{sgn} x$; $x = 0$ 是第一类间断点. **722.** 若 $|x| \leqslant 1$, $y = 1$; 若 $|x| > 1$, $y = x^2$. 函数连续. **723.** 若 $x \neq k\pi$ 时 $y = 0$; 若 $x = k\pi$, $y = 1$; $x = k\pi$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 是第一类间断点. **724.** 若$|x - k\pi| < \frac{\pi}{6}$, $y = x$; 若 $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$, $y = \frac{x}{2}$; 若 $\frac{\pi}{6} < |x - k\pi| < \frac{5\pi}{6}$, $y = 0$; $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 是第一类间断点. **725.** 若 $k\pi < x < k\pi + \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{2}x$; 若 $k\pi + \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \pi$, $y = -\frac{\pi}{2}x$; 若 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $y = 0$; $x = \frac{k\pi}{2}$ $(k = 0, \pm1, \cdots)$ 是第一类间断点. **726.** 当 $x \leqslant 0$ 时 $y = x$; 当 $x > 0$ 时 $y = x^2$. 函数连续. **727.** 当 $x \leqslant 0$ 时 $y = 0$; 当 $x > 0$ 时 $y = x$. 函数连续. **728.** 当 $x < 0$ 时 $y = -(1 + x)$; 当 $x = 0$ 时 $y = 0$; 当 $x > 0$ 时 $y = 1 + x$; $x = 0$ 是第一类间断点. **729.** 不是. **730.** $a = 1$. **731.** (a) 函数连续; (b) $x = -1$ 是第一类间断点; (c) $x = -1$ 是第一类间断点; (d) $x = k$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 是无穷型间断点; (e) $x \neq k$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 是第二类间断点. **732.** 当 $-\infty < x < 0$ 时 $d = -x$; 当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时 $d = 0$; 当 $1 < x \leqslant \frac{3}{2}$ 时 $d = x - 1$; 当 $\frac{3}{2} < x < 2$ 时 $d = 2 - x$; 当 $2 \leqslant x \leqslant 3$ 时 $d = 0$; 当 $3 < x < +\infty$ 时 $d = x - 3$. 函数连续. **733.** 当 $0 \leqslant y \leqslant 1$ 时 $S = 3y - \frac{y^2}{2}$; 当 $1 < y \leqslant 2$ 时 $S = \frac{1}{2} + 2y$; 当 $2 < y \leqslant 3$ 时 $S = \frac{5}{2} + y$; 当 $3 < y < \infty$ 时 $S = \frac{11}{2}$; 函数连续; 当 $0 \leqslant y \leqslant 1$ 时 $b = 3 - y$; 当 $1 < y \leqslant 2$ 时 $b = 2$; 当 $2 < y \leqslant 3$ 时 $b = 1$; 当 $3 < y < +\infty$ 时 $b = 0$; $x = 2$ 和 $x = 3$ 是第一类间断点. **735.** 当 $x \neq 0$ 时不连续; 当 $x = 0$ 时连续. **737.** 对于自变量的一切负值和正有理值不连续. **738.** $f(0) = 0.5$. **740.** (a) 1.5; (b) 2; (c) 0; (d) e; (e) 0; (f) 1; (g) 0. **741.** (a) 是的; (b) 不是. **742.** (a) 不是; (b) 不是. **743.** 不是. 例: 若 x 为有理数, $f(x) = 1$; 若为无理数, $f(x) = -1$. **744.** (a) 当 $x = 0$,

$f(g(x))$ 连续, $g(f(x))$ 不连续; (b) 当 $x=-1, x=0$ 和 $x=1$, $f(g(x))$ 不连续, $g(f(x))=0$ 连续; (c) $f(g(x))$ 和 $g(f(x))$ 均连续. **745.** $f(\varphi(x)) \equiv x$. **759.** $x=\frac{-dy+b}{cy-a}; a+d=0$. **760.** $x=y-k$, 其中 $2k \leqslant y < 2k+1$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$. **764.** $f(f(x)) \equiv x$. **767.** $x=-\sqrt{y}$ $(0 \leqslant y<+\infty); x=\sqrt{y}$ $(0 \leqslant y<+\infty)$. **768.** $x=1-\sqrt{1-y}$ $(-\infty<y \leqslant 1); x=1+\sqrt{1-y}$ $(-\infty<y \leqslant 1)$. **769.** $x=\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ $(-1 \leqslant y \leqslant 1), x=\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$ $(0<|y| \leqslant 1)$. **770.** $x=(-1)^k \arcsin y+k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ $(-1 \leqslant y \leqslant 1)$. **771.** $x=2k\pi \pm \arccos y$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ $(-1 \leqslant y \leqslant 1)$. **772.** $x=\arctan y+k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)(-\infty<y<+\infty)$. **776.** 若 $xy<1$, $\varepsilon=0$; 若 $xy>1$, $\varepsilon=\operatorname{sgn} x$. **779.** (a) 若 $-1 \leqslant x \leqslant 0$, $y=-\frac{\pi}{2}$, 若 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时 $y=2\arcsin x-\frac{\pi}{2}$; (b) 若 $-1 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=-(\pi+4\arcsin x)$; 若 $-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时 $y=0$; 若 $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant 1$, $y=\pi-4\arcsin x$. **780.** $y=\frac{\pi}{2}-x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$. **781.** $y=\sqrt{x^2-1}$ $(1 \leqslant x<+\infty); y=\sqrt{x^2-1}$ $(1 \leqslant x<+\infty)$. **782.** 对于使 $\varphi(t)=x$ 的一切 t, 函数 $\psi(t)$ 有同一个值, 其中 x 为函数 $\varphi(t)$ 的任一值. **783.** 若 $\alpha<\tau<\beta$, $\chi(\tau)$ 的值域应为区间 (a, b). **784.** 对于使 $\varphi(x)=u$ 的一切正值 x, 函数 $\psi(x)$ 应该有同一个值, 其中 u 为区间 (A, B) 上的任一数. **785.** $|\delta| \leqslant \frac{\varepsilon}{20}$cm. (a) 0.5 mm; (b) 0.005 mm; (c) 0.000 05 mm. **786.** (a) $\delta<\frac{1}{4}$; (b) $\delta<2.5 \cdot 10^{-4}$; (c) $\delta<\frac{5}{2} \cdot 10^{-7}$; (d) $\delta<\frac{\varepsilon^3}{4}(\varepsilon \leqslant 1)$. **793.** (a) 是的; (b) 不是. **794.** 一致连续. **795.** 非一致连续. **796.** 一致连续. **797.** 非一致连续. **798.** 一致连续. **799.** 一致连续. **800.** 非一致连续. **802.** (a) $\delta=\frac{\varepsilon}{5}$; (b) $\delta=\frac{\varepsilon}{8}$; (c) $\delta=0.01\varepsilon$; (d) $\delta=\varepsilon^2$ $(\varepsilon \leqslant 1)$; (e) $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$; (f) $\delta=\min\left(\frac{\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon^2}{3+\varepsilon}\right)$. **803.** $n \geqslant 1\,800\,000$. **808.** (a) $\omega_f(\delta) \leqslant 3\delta$; (b) $\omega_f(\delta) \leqslant \sqrt{\delta}; \omega_f(\delta) \leqslant \frac{\delta}{\sqrt{2a}}$; (c) $\omega_f(\delta) \leqslant \delta\sqrt{\delta}$. **818.** $f(x)=\cos ax$ 或者 $f(x)=\cosh ax$. **819.** $f(x)=\cos ax; g(x)=\pm\cos ax$ (a 为常数).

第二章

821. $\Delta x=999; \Delta y=3$. **822.** $\Delta x=-0.009; \Delta y=990\,000$. **823.** (a) $\Delta y=a\Delta x$; (b) $\Delta y=(2ax+b)\Delta x+a(\Delta x)^2$; (c) $\Delta y=a^x\left(a^{\Delta x}-1\right)$. **825.** (a) 5; (b) 4.1; (c) 4.01; (d) $4+\Delta x$; 4. **826.** $3+3h+h^2$; (a) 3.31; $\sqrt{3}$; (b) 3.030 1; (c) 3.003 001; 3. **827.** (a) $v_{\mathrm{cp}}=215$ m/s; (b) $v_{\mathrm{cp}}=210.5$ m/s; (c) $v_{\mathrm{cp}}=210.05$ m/s; 210 m/s. **828.** (a) $2x$; (b) $3x^2$; (c) $-\frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$; (d) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x>0)$; (e) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $(x \neq 0)$; (f) $\frac{1}{\cos^2 x}$ $(x \neq(2k-1)\frac{\pi}{2}, k=0, \pm 1, \cdots)$; (g) $-\frac{1}{\sin^2 x}(x \neq k\pi, k=0, \pm 1, \cdots)$; (h) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x|<1)$; (i) $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x|<1)$; (j) $\frac{1}{1+x^2}$. **829.** -8; 0; 0. **830.** 4. **831.** $1+\frac{\pi}{4}$. **832.** $f'(a)$. **834.** $y'=1-2x$; 1, 0, -1, 21. **835.** $y'=x^2+x-2$; (a) -2; 1; (b) -1; 0; (c) -4; 3. **836.** $10a^3x-5x^4$. **837.** $\frac{a}{a+b}$. **838.** $2x-(a+b)$. **839.** $2(x+2)(x+3)^2(3x^2+11x+9)$. **840.** $x\sin 2a+\cos 2a$. **841.** $mn[x^{m-1}+x^{n-1}+(m+n)x^{m+n-1}]$. **842.** (a) $-(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)^2(1+6x+15x^2+14x^3)$; (b) $-20(17+12x)(5+2x)^9(3-4x)^{19}$. **843.** $-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}+\frac{9}{x^4}\right)$ $(x \neq 0)$. **845.** $\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$ $(|x| \neq 1)$. **846.** $\frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$. **847.** $\frac{1-x+4x^2}{(1-x)^3(1+x)^4}$ $(|x| \neq 1)$. **848.** $\frac{12-6x-6x^2+2x^3+5x^4-3x^5}{(1-x)^3}(x \neq 1)$. **849.** $-\frac{(1-x)^{p-1}[(p+q)+(p-q)x]}{(1+x)^{q+1}}$ $(x \neq -1)$. **850.** $\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1+x)^2}[p-(q+1)x-(p+q-1)x^2]$ $(x \neq -1)$. **851.** $1+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $(x>0)$. **852.** $-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}-\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$ $(x>0)$. **853.** $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}$ $(x>0)$. **854.** $\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$. **855.** $\frac{6+3x+8x^2+4x^3+2x^4+3x^5}{\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{(3+x^3)^2}}(x \neq \sqrt[3]{-3})$. **856.** $\frac{(n-m)-(n+m)x}{(n+m)^{n+m}\sqrt{(1-x)^n(1+x)^m}}$.

857. $\frac{a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ $(|x|<|a|)$. **858.** $\frac{2x^2}{1-x^6}\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$ $(|x|\neq 1)$. **859.** $-\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. **860.** $\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}(x>0)$. **861.** $\frac{1}{27}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1+\sqrt[3]{x})^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}})^2}}$ $(x\neq 0,x\neq -1,x\neq -8)$. **862.** $-2\cos x(1+2\sin x)$. **863.** $x^2\sin x$. **864.** $-\sin 2x\cdot\cos(\cos 2x)$. **865.** $n\sin^{n-1}x\cdot\cos(n+1)x$. **866.** $\cos x\cdot\cos(\sin x)\cdot\cos[\sin(\sin x)]$. **867.** $\frac{2\sin x(\cos x\sin x^2-x\sin x\cos x^2)}{\sin^2 x^2}$ $(x^2\neq k\pi;k=1,2,\cdots)$. **868.** $-\frac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}$ $(x\neq k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. **869.** $\frac{n\sin x}{\cos^{n+1}x}\left(x\neq\frac{2k-1}{2}\pi,\ k\text{ 为整数}\right)$. **870.** $\frac{x^2}{(\cos x+x\sin x)^2}$. **871.** $\frac{2}{\sin^2 x}$ $(x\neq k\pi;k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. **872.** $1+\tan^6 x$ $(x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2};k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. **873.** $\frac{-8}{3\sin^4 x\sqrt[3]{\cot x}}$ $(x\neq k\pi,\ k\text{ 为整数})$. **874.** $\frac{-16\cos\frac{2x}{a}}{a\sin^3\frac{2x}{a}}$ $(x\neq\frac{k\pi a}{2},\ k\text{ 为整数})$. **875.** $-3\tan^2 x\cdot\sec^2 x\cdot\sin(2\tan^3 x)\cdot\cos[\cos^2(\tan^3 x)]$ $(x\neq\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\text{ 为整数})$. **876.** $-2xe^{-x^2}$. **877.** $-\frac{1}{x^2}\cdot 2^{\tan\frac{1}{x}}\sec^2\frac{1}{x}\cdot\ln 2$. **878.** x^2e^x. **879.** $x^2e^{-x}\sin x$. **880.** $\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2\sin^3\frac{x}{2}}$ $(x\neq 2k\pi,\ k\text{ 为整数})$. **881.** $-\frac{1+\ln^2 3}{3^x}\sin x$. **882.** $\sqrt{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx$. **883.** $e^x[1+e^{e^x}(1+e^{e^{e^x}})]$. **884.** $y\left(\ln\frac{a}{b}-\frac{a-b}{x}\right)(x>0)$. **885.** $a^a x^{a^a-1}+ax^{a-1}a^{x^a}\ln a+a^x a^{a^x}\ln^2 a$. **886.** $\frac{6}{x}\lg e\cdot\lg^2 x^2$ $(x\neq 0)$. **887.** $\frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}$ $(x>e)$. **888.** $\frac{6}{x\ln x\ln(\ln^3 x)}$ $(x>e)$. **889.** $\frac{1}{(1+x)^2(1+x^2)}$ $(x>-1)$. **890.** $\frac{x}{x^4-1}$ $(|x|>1)$. **891.** $\frac{1}{x(1+x^4)^2}$ $(x\neq 0)$. **892.** $\frac{1}{3x^2-2}$ $\left(|x|>\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. **893.** $\frac{2}{(1-x^2)(1-kx^2)}$ $(|x|<1)$. **894.** $\frac{1}{2(1+\sqrt{x+1})}$ $(x>-1)$. **895.** $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. **896.** $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$. **897.** $\ln^2(x+\sqrt{x^2+1})$. **898.** $\sqrt{x^2+a^2}$. **899.** $\frac{1}{a-bx^2}$ $\left(|x|<\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$. **900.** $-\frac{8}{x^5\sqrt{1-x^2}}$ $(0<x<1)$. **901.** $\frac{1}{\sin x}$ $(0<x-2k\pi<\pi,\ k\text{ 为整数})$. **902.** $\frac{1}{\cos x}\left(|x-2k\pi|<\frac{\pi}{2},\ k\text{ 为整数}\right)$. **903.** $-\cot^3 x$ $(0<x-2k\pi<\pi,\ k\text{ 为整数})$. **904.** $-\frac{1}{\cos x}\left(x\neq\frac{2k-1}{2}\pi,k\text{ 为整数}\right)$. **905.** $\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}$ $(0<x-2k\pi<\pi,\ k\text{ 为整数})$. **906.** $\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\cos x}$. **907.** $-\frac{\ln^3 x}{x^2}$ $(x>0)$. **908.** $\frac{1}{x^5}\ln x$ $(x>0)$. **909.** $\frac{2x}{1+\sqrt[3]{1+x^2}}$. **910.** $-\frac{1+x+\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}}{\left(1+x\ln\frac{1}{x}\right)\left[1+x\ln\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}\right)\right]}$. **911.** $2\sin(\ln x)$ $(x>0)$. **912.** $\sin x\cdot\ln\tan x$ $(0<x-2k\pi<\frac{\pi}{2},\ k\text{ 为整数})$. **913.** $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}(|x|<2)$. **914.** $\frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}$ $(|x-1|<\sqrt{2})$. **915.** $\frac{2ax}{x^4+a^2}$ $(a\neq 0)$. **916.** $\frac{1}{x^2+2}$ $(x\neq 0)$. **917.** $\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$ $(x\geqslant 0)$. **918.** $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x$ $(|x|<1)$. **919.** $\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}$ $(x\geqslant 0)$. **920.** $\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}(|x|>1)$. **921.** $\operatorname{sgn}(\cos x)\left(x\neq\frac{2k-1}{2}\pi,\ k\text{ 为整数}\right)$. **922.** $\frac{2\operatorname{sgn}(\sin x)\cdot\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}(x\neq 2k\pi,\ k\text{ 为整数})$. **923.** $\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}\left(0<x-k\pi<\frac{\pi}{2},\ k\text{ 为整数}\right)$. **924.** $\frac{\operatorname{sgn}x}{\sqrt{1-x^2}}$ $(0<|x|<1)$. **925.** $\frac{1}{1+x^2}$ $(x\neq 1)$. **926.** $1\left(x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\text{ 为整数}\right)$. **927.** $\frac{1}{a+b\cos x}$. **928.** $-\frac{2\operatorname{sgn}x}{1+x^2}$ $(x\neq 0)$. **929.** $\frac{4}{\sqrt{1-x^4}\arccos^3(x^2)}(|x|<1)$. **930.** $\frac{1+x^4}{1+x^6}$. **931.** $-2\cos x\cdot\arctan(\sin x)$. **932.** $\frac{1}{2x\sqrt{x-1}\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}}$ $(x>1)$. **933.** $\frac{a^2+b^2}{(x+a)(x^2+b^2)}$ $(x>-a)$. **934.** $\sqrt{a^2-x^2}$. **935.** $\frac{1}{x^3+1}$ $(x\neq -1)$. **936.** $\frac{1}{x^4+1}$ $(|x|\neq -1)$. **937.** $(\arcsin x)^2$ $(|x|<1)$. **938.** $-\frac{\arccos x}{x^2}$ $(0<|x|<1)$. **939.** $\frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$ $(x>1)$. **940.** $\frac{x\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ $(|x|<1)$. **941.** $\frac{x^3}{x^6+1}\left(|x|\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **942.** $\frac{12x^5}{(1+x^{12})^2}$. **943.** $-\frac{1}{(1-x)\sqrt[3]{x}}$ $(x<1)$. **944.** $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(|x|<1)$. **945.** $\frac{1}{\sqrt{ax-x^2}}$ $(0<x<a)$. **946.** $\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}$ $(|x+1|<\sqrt{2})$. **947.** $\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}$. **948.** $\frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$ $(x\neq\frac{2k-1}{2}\pi,\ k\text{ 为整数})$. **949.** $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ $(|x|<1)$. **950.** $\frac{x^2}{1+x^2}\cdot\arctan x$.

951. $\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$. **952.** $\frac{1}{2(1+x^2)}$. **953.** $\frac{\sin a \operatorname{sgn}(\cos x-\cos a)}{1-\cos a\cos x}$ $(\cos x \neq \cos a)$. **954.** $\frac{1}{(x^4-1)\sqrt{x^2+2}}$ $(0<|x|<1)$. **955.** $\frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}$ $(|x|\neq 1)$. **956.** $\frac{4}{(1+x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$ $(|x|<1)$. **957.** $\frac{2x(\cos x^2+\sin x^2)}{\sqrt{\sin(2x^2)}}$ $\left(0<|x|<\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}, k=0,1,2,\cdots\right)$. **958.** $2x[\operatorname{sgn}(\cos x^2)+\operatorname{sgn}(\sin x^2)]$ $\left(|x|\neq \frac{k\pi}{2}, k=0,1,2,\cdots\right)$. **959.** $\frac{2m}{\sqrt{1-x^2}}\cdot e^{m(\arcsin x)}\cos m(\arcsin x)$ $(|x|<1)$. **960.** (a) $\frac{e^x-1}{e^{2x}+1}$; (b) $\frac{x^3}{6\sqrt{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{1+x^4}}}\cdot\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{1+x^4})^2}\cdot\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}$; (c) $\frac{1}{x^3\cos\frac{1}{x^2}\left(\sin\frac{1}{x^2}+\cos\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{\cot\frac{1}{x^2}}}$; (d) $\frac{2^{1+\sqrt[3]{x}}\ln 2\cdot\sin(2^{\sqrt[3]{x}})\cdot\ln(\sec 2^{\sqrt[3]{x}})}{3\sqrt[3]{x^2}\cdot\cos^2 2^{\sqrt[3]{x}}}$. **961.** $1+x^x(1+\ln x)+x^x x^{x^x}\left(\frac{1}{x}+\ln x+\ln^2 x\right)$ $(x>0)$. **962.** $x^{a-1}x^{x^a}(1+a\ln x)+a^x x^{a^x}\left(\frac{1}{x}+\ln a\ln x\right)+x^x a^{x^x}\ln a(1+\ln x)$ $(x>0)$. **963.** $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$ $(x>0)$. **964.** $(\sin x)^{1+\cos x}\cdot(\cot^2 x-\ln\sin x)-(\cos x)^{1+\sin x}\cdot(\tan^2 x-\ln\cos x)$ $\left(0<x-2k\pi<\frac{\pi}{2},\ k\ \text{为整数}\right)$. **965.1.** $\frac{(\ln x)^{x-1}}{x^{\ln x+1}}\cdot[x-2\ln^2 x+x\ln x\ln(\ln x)]$ $(x>1)$. **965.2.** $y'=2y\left\{\frac{\arctan x}{1+x^2}\ln\frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}+\arctan^2 x\cdot\left[\frac{\sin x\cdot\operatorname{sgn}(\cos x)}{\arcsin(\sin^2 x)\sqrt{1+\sin^2 x}}-\frac{\cos x\cdot\operatorname{sgn}(\sin x)}{\arccos(\cos^2 x)\sqrt{1+\cos^2 x}}\right]\right\}$ $\left(x\neq\frac{k\pi}{2}, k=0,\pm1,\cdots\right)$. **966.** $-\frac{1}{x}(\log_x e)^2$ $(x>0, x\neq 1)$. **967.** $\tanh^3 x$. **968.** $-\frac{2}{\sinh^3 x}$ $(x>0)$. **969.** $\frac{1}{\cosh 2x}$. **970.** $\frac{\operatorname{sgn}(\sinh x)}{\cosh x}$ $(x\neq 0)$. **971.** $\frac{a+b\cosh x}{b+a\cosh x}$. **972.** $-\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}$. **973.** $-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x\cdot\ln(\arccos x)$ $(|x|<1)$. **974.** $-\frac{x^{-1}}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}$. **975.** $-\frac{2\pi e^{-x^2}\arcsin(e^{-x^2})}{(1-e^{-2x^2})^{\frac{3}{2}}}$ $(x\neq 0)$. **976.** $\frac{4a^{2x}\ln a}{(1+a^{2x})^2}\arctan a^{-x}$ $(a>0)$. **977.** (a) $\operatorname{sgn}x$ $(x\neq 0)$; (b) $2|x|$; (c) $\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$. **978.** (a) $(x-1)(x+1)^2(5x-1)\operatorname{sgn}(x+1)$; (b) $\frac{3}{2}\sin 2x\cdot|\sin x|$; (c) $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ $(|x|>1)$; (d) $\pi[x]\sin 2\pi x$. **979.** 当 $-\infty<x<1$ 时 $y'=-1$; 当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时 $y'=2x-3$; 当 $2<x<+\infty$ 时 $y'=1$. **980.** 当 $x\in[a,b]$ 时 $y'=2(x-a)\cdot(x-b)(2x-a-b)$; 当 $x\notin[a,b]$ 时 $y'=0$. **981.** 当 $x<0$ 时 $y'=1$; 当 $0\leqslant x<+\infty$ 时 $y'=\frac{1}{1+x}$. **982.** 当 $-1<x\leqslant 1$ 时 $y'=\frac{1}{1+x^2}$; 当 $|x|>1$ 时 $y'=\frac{1}{2}$. **983.** 当 $|x|\leqslant 1$ 时 $y'=2xe^{-x^2}(1-x^2)$; 当 $|x|>1$ 时 $y'=0$. **984.** (a) $\frac{1-x-x^2}{x(1-x^2)}$; (b) $\frac{54-36x+4x^2+2x^3}{3x(1-x)(9-x^2)}$ $(x\neq 0, x\neq 1, x\neq\pm 3)$; (c) $\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{x-a_i}$; (d) $\frac{n}{\sqrt{1+x^2}}$. **985.** (a) $\frac{\varphi(x)\varphi'(x)+\psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}}$ $(\varphi^2(x)+\psi^2(x)\neq 0)$; (b) $\frac{\varphi'(x)\psi(x)-\varphi(x)\psi'(x)}{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$ $(\varphi^2(x)+\psi^2(x)\neq 0)$; (c) $\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}\left\{\frac{1}{\varphi(x)}\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}-\frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}\ln\psi(x)\right\}$; (d) $\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\frac{1}{\ln\varphi(x)}-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\frac{\ln\psi(x)}{\ln^2\varphi(x)}$. **986.1.** (a) $2xf'(x^2)$; (b) $\sin 2x\cdot[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)]$; (c) $e^{f(x)}[e^x f'(e^x)+f'(x)f(e^x)]$; (d) $f'(x)f'[f(x)]\cdot f'\{f[f(x)]\}$; (e) $1000!$. **988.** $3x^2+15$. **989.** $6x^2$. **992.** (a) $n>0$; (b) $n>1$; (c) $n>2$. **993.** (a) $n\geqslant m+1$; (b) $1<n<m+1$. **994.** $\varphi(a)$. **995.** $f'_-(a)=-\varphi(a), f'_+(a)=\varphi(a)$. **999.** (a) 当 $x=1$ 时不可微; (b) 当 $x=\frac{2k-1}{2}\pi$ 时不可微, k 为整数; (c) 处处可微; (d) 当 $x=k\pi$ 时不可微, k 为整数; (e) 当 $x=-1$ 时不可微. **1000.** 当 $x\neq 0$ 时 $f'_-=f'_+=\operatorname{sgn}x$, 而 $f'_-(0)=-1, f'_+(0)=1$. **1001.** 当 $x\neq$ 整数时 $f'_-(x)=f'_+(x)=\pi[x]\cos\pi x$; 当 $x=k$ (k 为整数) 时 $f'_-(k)=\pi(k-1)(-1)^k, f'_+(k)=\pi k(-1)^k$. **1002.** 当 $x\neq\frac{2}{2k+1}$ (k 为整数) 时 $f'_-(x)=f'_+(x)=\left(\cos\frac{\pi}{x}+\frac{\pi}{x}\sin\frac{\pi}{x}\right)\operatorname{sgn}\left(\cos\frac{\pi}{x}\right)$; $f'_-\left(\frac{2}{2k+1}\right)=-(2k+1)\frac{\pi}{2}, f'_+\left(\frac{2}{2k+1}\right)=(2k+1)\frac{\pi}{2}$. **1003.** 当 $\sqrt{2k\pi}<|x|<\sqrt{(2k+1)\pi}$ $(k=0,1,2,\cdots)$ 时 $f'_-(x)=f'_+(x)=\frac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}$; $f'_-(0)=-1, f'_+(0)=1$; $f'_\mp(\sqrt{(2k+1)\pi})=\mp\infty, f'_\pm(\sqrt{2k\pi})=\pm\infty$ $(k=1,2,\cdots)$. **1004.** 当 $x\neq 0$ 时 $f'_-(x)=f'_+(x)=\frac{1+\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$; $f'_-(0)=1, f'_+(0)=0$. **1005.** 当 $x\neq 0$ 时

$f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$; $f'_-(0) = -1; f'_+(0) = 1$. **1006.** $f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{\varepsilon}{x}$, 其中, 当 $0 < |x| < 1$ 时 $\varepsilon = -1$, 当 $1 < |x| < +\infty$ 时 $\varepsilon = 1$; $f'_-(\mp 1) = -1, f'_+(\mp 1) = 1$. **1007.** 当 $x \neq \mp 1$ 时 $f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{2\operatorname{sgn}(1-x^2)}{1+x^2}$; $f'_-(\mp 1) = \mp 1, f'_+(\mp 1) = \pm 1$. **1008.** 当 $x \neq 2$ 时 $f'_-(x) = f'_+(x) = \arctan\frac{1}{x-2} - \frac{x-2}{(x-2)^2+1}$; $f'_\mp(2) = \mp\frac{\pi}{2}$. **1009.1.** (a) $f'_-(0) = -\frac{1}{2}, f'_+(0) = \frac{1}{2}$; (b) $f'_-(1) = f'_+(1) = \frac{1}{2}$; (c) $f'_-(0) = f'_+(0) = 0$. **1010.** $a = 2x_0; b = -x_0^2$. **1011.** $a = f'_-(x_0); b = f(x_0) - x_0 f'_-(x_0)$. **1012.** $A = \frac{k_1+k_2}{(b-a)^2}, c = \frac{ak_2+bk_1}{k_1+k_2}$. **1013.** $a = -\frac{3m^2}{2c}, b = -\frac{m^2}{2c^3}$. **1014.** (a) 能; (b) 不能. **1015.** (a) 不能; (b) 不能. **1016.** (a), (b), (c) 函数 $F(x)$ 可能有导数 $F'(x)$, 也可能没有. **1017.** $x = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$. **1018.** (a) 不能; (b) 能. **1019.** (a) 不一定; (b) 一定. **1020.** (a) 不一定. **1021.** 不能得到. **1022.** 不能得到. **1023.** 一般而言, 不能. **1024.** (a) $P_n = \frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$; $Q_n = \frac{1+x-(n+1)^2x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}$; (b) $S_n = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$; $T_n = \frac{n\sin\frac{x}{2}\sin\frac{2n+1}{2}x-\sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}$. **1025.** $S_n = \frac{n\sinh\frac{nx}{2}\sinh\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sinh^2\frac{nx}{2}}{2\sinh^2\frac{x}{2}}$. **1026.** $S_n = \frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n} - \cot x$. **1029.** $40\pi\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$. **1030.** $25\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$; $0.4\,\mathrm{m/s}$. **1031.** 50 km/h. **1032.** 当 $0 \leqslant x \leqslant 2$ 时, $S(x) = \frac{x^2}{2}$; 当 $x > 2$ 时 $S(x) = x^2-2x+2$; 当 $0 \leqslant x \leqslant 2$ 时 $S'(x) = x$; 当 $x > 2$ 时 $S'(x) = 2x-2$. **1033.** $S(x) = \frac{|x|}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{|x|}{2}$; $S'(x) = \sqrt{a^2-x^2}\operatorname{sgn} x$ $(0 < |x| \leqslant a)$. **1034.** $y'_x = \frac{1}{3(y^2+1)}$. **1035.** $y'_x = \frac{1}{1-\varepsilon\cos y}$. **1036.** (a) $-\infty < y < +\infty; x'_y = \frac{x}{x+1}$; (b) $-\infty < y < +\infty; x'_y = \frac{1}{1-x+y}$; (c) $-\infty < y < +\infty; x'_y = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$; (d) $-1 < y < 1; x'_y = \frac{1}{1-y^2}$. **1037.** (a) $x_1 = -\sqrt{1+\sqrt{1-y}}$ $(-\infty < y \leqslant 1); x_2 = -\sqrt{1-\sqrt{1-y}}$ $(0 \leqslant y \leqslant 1); x_3 = \sqrt{1-\sqrt{1-y}}$ $(0 \leqslant y \leqslant 1); x_4 = \sqrt{1+\sqrt{1-y}}$ $(-\infty < y \leqslant 1); x'_i = \frac{1}{4x(1-x^2)}$ $(i = 1,2,3,4)$; (b) $x_1 = -\sqrt{\frac{y}{1-y}}$ $(0 \leqslant y < 1); x_2 = \sqrt{\frac{y}{1-y}}$ $(0 \leqslant y < 1); x'_i = \frac{x^3}{2y^2}$ $(i = 1,2)$; (c) $x_1 = -\ln(1+\sqrt{1-y})$ $(-\infty < y \leqslant 1); x_2 = \ln\frac{1+\sqrt{1-y}}{y}$ $(0 < y \leqslant 1); x'_i = -\frac{1}{2(e^{-x}-e^{-2x})}$ $(i = 1,2)$. **1038.** $y'_x = -\frac{3}{2}(1+t); -3; -\frac{3}{2}$ 和 $-\frac{9}{2}; (-4,4)$. **1039.** $\sqrt[6]{\frac{(1-\sqrt{t})^4}{t(1-\sqrt[3]{t})^3}}$ $(t > 0, t \neq 1)$. **1040.** $y'_x = -1$ $(0 < x < 1)$. **1041.** $y'_x = -\frac{b}{a}\cot t$ $(0 < |t| < \pi)$. **1042.** $y'_x = \frac{b}{a}\coth t$ $(|t| > 0)$. **1043.** $y'_x = -\tan t$ $(t \neq \frac{2k+1}{2}\pi$, k 为整数). **1044.** $y'_x = \cot\frac{t}{2}$ $(t \neq 2k\pi$, k 为整数). **1045.** $y'_x = \tan t \cdot \tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$ $\left(t \neq \frac{\pi}{4}+k\pi, t \neq \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$. **1046.** $y'_x = \operatorname{sgn} t$ $(0 < |t| < +\infty)$. **1048.** $y' = \frac{1-x-y}{x-y}; \frac{5}{2}; -\frac{1}{2}$. **1049.** $\frac{p}{y}$. **1050.** $-\frac{b^2x}{a^2y}$. **1051.** $-\sqrt{\frac{y}{x}}$. **1052.** $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. **1053.** $\frac{x+y}{x-y}$. **1054.** (a) $\tan(\varphi+\arctan\varphi)$; (b) $-\cot\frac{3\varphi}{2}$ $(\varphi \neq 0, \varphi \neq \pm\frac{2\pi}{3})$; (c) $\tan\left(\varphi+\arctan\frac{1}{m}\right)$. **1055.** (a) $y = \sqrt[3]{4}(x+1); y = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(x+1)$; (b) $y = 3, x = 2$; (c) $x = 3, y = 0$. **1056.** (a) $\left(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}\right)$; (b) $(0,2)$. **1058.** $|x| < \frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{2\pi}{3} < |x| \leqslant \pi$. **1059.** $\max|y'_1 - y'| = 10\pi \approx 31.4$. **1060.** $\frac{\pi}{4}$. **1064.** (a) $2\arctan\frac{1}{|a|}$; (b) $\frac{\pi}{2}$. **1066.** $\left|\frac{x}{n}\right|$. **1069.** $\frac{y_0^2}{|a|}$. **1071.** $b^2-4ac = 0$. **1072.** $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0$. **1073.** $a = \frac{1}{2e}$. **1077.** (a) $3x-2y = 0, 2x+3y = 0$; (b) $3x-y-1 = 0, x+3y-7 = 0$. **1078.** (a) $y = x, y = -x$; (b) $3x-y-4 = 0, x+3y-3 = 0$; (c) $y = -x, y = x$. **1079.** $y-2a = (x-at_0)\cot\frac{t_0}{2}$. 摆线的切线垂直于连接切点与滚动的圆的接触点所成的线段. **1081.** $3x+5y-50 = 0, 5x-3y-10.8 = 0$. **1082.** $x+2y-3 = 0, 2x-y-1 = 0$. **1083.** $\Delta f(1) = \Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$; $\mathrm{d}f(1) = \Delta x$. (a) 5, 1; (b) 0.131, 0.1; (c) 0.010 301, 0.01. **1084.** $\Delta x = 20\Delta t + 5(\Delta t)^2$, $\mathrm{d}x = 20\Delta t$; (a) 25 m, 20 m; (b) 2.05 m, 2 m; (c) 0.020 005 m, 0.02 m. **1085.** $-\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ $(x \neq 0)$. **1086.** $\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$. **1087.** $\frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}$ $(|x| \neq |a|)$.

1088. $\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$. **1089.** $\frac{\operatorname{sgn}a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$ $(|x|<|a|)$. **1090.** (a) $(1+x)e^x\,dx$; (b) $x\sin x\,dx$; (c) $-\frac{3\,dx}{x^4}$ $(x\neq 0)$; (d) $\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}\,dx$ $(x>0)$; (e) $\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$; (f) $\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ $(|x|<1)$; (g) $-\frac{2x\,dx}{1-x^2}$ $(|x|<1)$; (h) $\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ $(|x|>1)$; (i) $\frac{dx}{\cos^3 x}$ $\left(x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\text{ 为整数!}\right)$. **1091.** $vw\,du+uw\,dv+uv\,dw$. **1092.** $\frac{v\,du-2u\,dv}{v^3}$ $(v\neq 0)$. **1093.** $-\frac{u\,du+v\,dv}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}$ $(u^2+v^2>0)$. **1094.** $\frac{v\,du-u\,dv}{u^2+v^2}$ $(u^2+v^2>0)$. **1095.** $\frac{u\,du+v\,dv}{u^2+v^2}$ $(u^2+v^2>0)$. **1096.** (a) $1-4x^3-3x^6$; (b) $\frac{1}{2x^2}\left(\cos x-\frac{\sin x}{x}\right)$; (c) $-\cot x$ $(x\neq k\pi,\ k\text{ 为整数})$; (d) $-\tan^2 x$ $\left(x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\text{ 为整数}\right)$; (e) -1 $(|x|<1)$. **1097.** (a) 精确解: 增加了 105.2 cm^2, 近似解: 增加了 104.7 cm^2; (b) 减少了 43.6 cm^2. **1098.** 增加 0.022 3 m. **1099.** 1.007 (查表: 1.006 6). **1100.** 0.484 9 (查表: 0.484 8). **1101.** −0.874 7 (查表: −0.874 6). **1102.** $0.810\,4=\operatorname{arc}46°26'$ (查表: $\operatorname{arc}46°24'$). **1103.** 1.043 (查表: 1.041). **1104.1.** (a) 2.25 (查表: 2.24); (b) 5.833 (查表: 5.831); (c) 10.954 6 (查表: 10.954 5). **1105.** (a) 2.083 (查表: 2.080); (b) 2.990 7 (查表: 2.990 7); (c) 1.938 (查表: 1.931); (d) 1.995 4 (查表: 1.995 3). **1106.** 0.24 m^2; 4.2%. **1107.** $\delta_R\leqslant 0.33\%$. **1108.** (a) $\delta_g=\delta_l$; (b) $\delta_g=2\delta_T$. **1109.** 0.43δ. **1111.** $\frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. **1112.** $\frac{3x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$ $(|x|<1)$. **1113.** $2e^{-x^2}(2x^2-1)$. **1114.** $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$ $\left(x\neq\frac{2k+1}{2}\pi, k=0,\pm1,\cdots\right)$. **1115.** $\frac{2x}{1+x^2}+2\arctan x$. **1116.** $\frac{3x}{(1-x^2)^2}+\frac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$ $(|x|<1)$. **1117.** $\frac{1}{x}$ $(x>0)$. **1118.** $\frac{f(x)f''(x)-f'^2(x)}{f^2(x)}$ $(f(x)>0)$. **1119.** $-\frac{2}{x}\sin(\ln x)$ $(x>0)$. **1120.** $y(0)=1, y'(0)=1, y''(0)=0$. **1121.** $2(uu''+u'^2)$. **1122.** $\frac{uu''-u'^2}{u^2}-\frac{vv''-v'^2}{v^2}$ $(uv>0)$. **1123.** $\frac{(u^2+v^2)(uu''+vv'')+(u'v-uv')^2}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}$ $(u^2+v^2>0)$. **1124.** $y''=u^v\left[\left(v\frac{u'}{u}+v'\ln u\right)^2+v\frac{uu''-u'^2}{u^2}+\frac{2u'v'}{u}+v''\ln u\right]$. **1125.** $y''=4x^2f''(x^2)+2f'(x^2); y'''=8x^3f'''(x^2)+12xf''(x^2)$. **1126.** $y''=\frac{1}{x^4}f''\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{2}{x^3}f'\left(\frac{1}{x}\right); y'''=-\frac{1}{x^6}f'''\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{6}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{6}{x^4}f'\left(\frac{1}{x}\right)$. **1127.** $y''=e^{2x}f''(e^x)+e^xf'(e^x); y'''=e^{3x}f'''(e^x)+3e^{2x}f''(e^x)+e^xf'(e^x)$. **1128.** $y''=\frac{1}{x^2}[f''(\ln x)-f'(\ln x)]; y'''=\frac{1}{x^3}[f'''(\ln x)-3f''(\ln x)+2f'(\ln x)]$. **1129.** $y''=\varphi'^2(x)f''(\varphi(x))+\varphi''(x)f'(\varphi(x)); y'''=\varphi'^3(x)f'''(\varphi(x))+3\varphi'(x)\varphi''(x)f''(\varphi(x))+\varphi'''(x)f'(\varphi(x))$. **1130.** (a) $e^x\,dx^2$; (b) $e^x(dx^2+d^2x)$. **1131.** $\frac{dx^2}{(1+x^2)^{3/2}}$. **1132.** $\frac{2\ln x-3}{x^3}\,dx^2$ $(x>0)$. **1133.** $x^x\left[(1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\right]dx^2$. **1134.** $u\,d^2v+2\,du\,dv+v\,d^2u$. **1135.** $\frac{v(v\,d^2u-u\,d^2v)-2\,dv(v\,du-u\,dv)}{v^3}$ $(v>0)$. **1136.** $u^{m-2}v^{n-2}\{[m(m-1)v^2\,du^2+2mnvu\,du\,dv+n(n-1)u^2\,dv^2]+uv(mv\,d^2u+nu\,d^2v)\}$. **1137.** $a^u\ln a(\,du^2\ln a+d^2u)$. **1138.** $[(v^2-u^2)\,du^2-4uv\,du\,dv+(u^2-v^2)\,dv^2+(u^2+v^2)(u\,d^2u+v\,d^2v)](u^2+v^2)^{-2}$ $(u^2+v^2>0)$. **1139.** $[-2uv\,du^2+2(u^2-v^2)\,du\,dv+2uv\,dv^2+(u^2+v^2)(v\,d^2u-u\,d^2v)](u^2+v^2)^{-2}$ $(u^2+v^2>0)$. **1140.** $y''=\frac{3}{4(1-t)}; y'''=\frac{3}{8(1-t)^3}$ $(t\neq 1)$. **1141.** $y''=-\frac{1}{a\sin^3 t}; y'''=-\frac{3\cos t}{a^2\sin^5 t}$ $(t\neq k\pi,\ k\text{ 为整数})$. **1142.** $y''=-\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}; y'''=\frac{\cos\frac{t}{2}}{4a^2\sin^7\frac{t}{2}}$ $(t\neq 2k\pi,\ k\text{ 为整数})$. **1143.** $y''=\frac{e^{-t}}{\sqrt{2}\cos^3\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}$; $y'''=\frac{e^{-2t}(2\sin t+\cos t)}{\sqrt{2}\cos^5\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}$ $\left(t\neq\frac{\pi}{4}+k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right)$. **1144.** $y''=\frac{1}{f''(t)}$; $y'''=\frac{f'''(t)}{f''^3(t)}$ $(f''(t)\neq 0)$. **1145.** $x'=\frac{1}{y'}; x''=-\frac{y''}{y'^3}; x'''=-\frac{y'y'''-3y''^2}{y'^5}$; $x^{(4)}=-\frac{y'^2y^{(4)}-10y'y''y'''+15y''^3}{y'^7}$ $(y'\neq 0)$. **1146.** $-\frac{x}{y},-\frac{25}{y^3},-\frac{75x}{y^5},-\frac{3}{4},-\frac{25}{64},-\frac{225}{1\,024}$. **1147.** $\frac{p}{y},-\frac{p^2}{y^3},\frac{3p^3}{y^5}$. **1148.** $y'=\frac{2x-y}{x-2y}, y''=\frac{6}{(x-2y)^3}, y'''=\frac{54x}{(x-2y)^5}$. **1149.** $y'=\frac{2x^3y}{1+y^2}; y''=\frac{2x^2y}{(1+y^2)^3}\cdot[3(1+y^2)^2+2x^4(1-y^2)]$. **1150.** $y'=\frac{x+y}{x-y}; y''=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$. **1151.** $a=\frac{1}{2}f''(x_0); b=f'(x_0); c=f(x_0)$. **1152.** $20-10t,-10;0,-10$. **1153.** $v=-\frac{2\pi a}{T}\sin\frac{2\pi}{T}t, w=-\frac{4\pi^2a}{T^2}\cos\frac{2\pi}{T}t$. **1154.** $x=v_0t\cos\alpha, y=$

$v_0t\sin\alpha-\frac{gt^2}{2}$; $v=\sqrt{v_0^2-2v_0gt\sin\alpha+g^2t^2}$; $w=g$; $y=x\tan\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$; $\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$; $\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$. **1155.** $x^2+y^2=25$; $5|w|, 5w^2$. **1156.** $y^{(6)}=4\cdot 6!$; $y^{(7)}=0$. **1157.** $y'''=-\frac{am(m+1)(m+2)}{x^{m+3}}$ $(x\neq 0)$. **1158.** $y^{(10)}=-\frac{17!!}{2^{10}x^9\sqrt{x}}$ $(x>0)$, 其中 $n!!$ 表示不超过 n 具有相同奇偶性的正整数的乘积, 即 $17!!=1\cdot 3\cdot 5\cdots 17$. **1159.** $y^{(8)}=\frac{8!}{(1-x)^9}$ $(x\neq 1)$. **1160.** $y^{(100)}=\frac{197!(399-x)}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}}$ $(x<1)$. **1161.** $y^{(20)}=2^{20}e^{2x}(x^2+20x+95)$. **1162.** $y^{(10)}=e^x\sum_{i=0}^{10}(-1)^i\frac{A_{10}^i}{x^{i+1}}$, 其中 $A_{10}^i=10\cdot 9\cdots(11-i)$, 而 $A_{10}^0=1$. **1163.** $y^{(5)}=-\frac{6}{x^4}$ $(x>0)$. **1164.** $y^{(5)}=\frac{274}{x^6}-\frac{120}{x^6}\ln x$ $(x>0)$. **1165.** $y^{(50)}=2^{50}\left(-x^2\sin 2x+50x\cos 2x+\frac{1\,225}{2}\sin 2x\right)$. **1166.** $y'''=\frac{27(1-3x)^2-36}{(1-3x)^{\frac{7}{3}}}\sin 3x-\frac{27(1-3x)^2-28}{(1-3x)^{\frac{10}{3}}}\cos 3x$ $\left(x\neq\frac{1}{3}\right)$. **1167.** $y^{(10)}=-2^8\sin 2x-2^{18}\sin 4x+2^8\cdot 3^{10}\sin 6x$. **1168.** $y^{(100)}=x\sinh x+100\cosh x$. **1169.** $y^{(4)}=-4e^x\cos x$. **1170.** $y^{(6)}=-\frac{60}{x^6}+\left(\frac{144}{x^5}-\frac{160}{x^3}+\frac{96}{x}\right)\sin 2x+\left(\frac{60}{x^6}-\frac{180}{x^4}+\frac{120}{x^2}+32\ln x\right)\cos 2x$. **1171.** $120\,dx^5$. **1172.** $-\frac{15}{8x^3\sqrt{x}}dx^3$ $(x>0)$. **1173.** $-1\,024(x\cos 2x+5\sin 2x)\,dx^{10}$. **1174.** $e^x\left(\ln x+\frac{4}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{8}{x^3}-\frac{6}{x^4}bigg\right)dx^4$. **1175.** $8\sin x\sinh x\,dx^6$. **1176.** $2u\,d^{10}u+20\,du\,d^9u+90\,d^2u\,d^8u+240\,d^3u\,d^7u+420\,d^4u\,d^6u+252(d^5u)^2$. **1177.** $e^u(du^4+6\,du^2\,d^2u+4\,du\,d^3u+3\,d^2u^2+d^4u)$. **1178.** $\frac{2\,du^2}{u^3}-\frac{3\,du\,d^2u}{u^2}+\frac{d^3u}{u}$. **1179.** $d^2y=y''dx^2+y'd^2x$; $d^3y=y'''dx^3+3y''dx\,d^2x+y'd^3x$; $d^4y=y^{(4)}dx^4+6y'''dx^2d^2x+4y''dx\,d^3x+3y''d^2x^2+y'd^4x$. **1180.**
$$y''=\frac{\begin{vmatrix}dx & dy\\ d^2x & d^2y\end{vmatrix}}{dx^3};\quad y'''=\frac{dx\begin{vmatrix}dx & dy\\ d^3x & d^3y\end{vmatrix}-3\,d^2x\begin{vmatrix}dx & dy\\ d^2x & d^2y\end{vmatrix}}{dx^5}.$$
1187. $P^{(n)}(x)=a_0n!$. **1188.** $\frac{(-1)^{n-1}n!c^{n-1}(ad-bc)}{(cx+d)^{n+1}}$. **1189.** $n!\left[\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}+\frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right]$. **1190.** $(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$. **1191.** $\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{(1-2x)^{n+\frac{1}{2}}}$ $\left(x<\frac{1}{2}\right)$. **1192.** $\frac{(-1)^{n+1}\cdot 1\cdot 4\cdots(3n-5)(3n+2x)}{3^n(1+x)^{n+\frac{1}{3}}}$ $(n\geqslant 2; x\neq -1)$. **1193.** $-2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$. **1194.** $2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$. **1195.** $\frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{3^n}{4}\sin\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)$. **1196.** $\frac{3}{4}\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{3^n}{4}\cos\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)$. **1197.** $\frac{(a-b)^n}{2}\cos\left[(a-b)x+\frac{n\pi}{2}\right]-\frac{(a+b)^n}{2}\cos\left[(a+b)x+\frac{n\pi}{2}\right]$. **1198.** $\frac{(a-b)^n}{2}\cos\left[(a-b)x+\frac{n\pi}{2}\right]+\frac{(a+b)^n}{2}\cos\left[(a+b)x+\frac{n\pi}{2}\right]$. **1199.** $\frac{(a-b)^n}{2}\sin\left[(a-b)x+\frac{n\pi}{2}\right]+\frac{(a+b)^n}{2}\sin\left[(a+b)x+\frac{n\pi}{2}\right]$. **1200.** $\frac{b^n}{2}\cos\left(bx+\frac{np}{2}\right)-\frac{(2a-b)^n}{4}\cos\left[(2a-b)x+\frac{n\pi}{2}\right]-\frac{(2a+b)^n}{4}\cos\left[(2a+b)x+\frac{n\pi}{2}\right]$. **1201.** $4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)$. **1202.** $a^nx\cos\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)+na^{n-1}\sin\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)$. **1203.** $a^n\left[x^2-\frac{n(n-1)}{a^2}\right]\sin\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)-2na^{n-1}x\cos\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)$. **1204.** $(-1)^ne^{-x}[x^2-2(n-1)x+(n-1)(n-2)]$. **1205.** $e^x\left[\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{x^{k+1}}\right]$. **1206.** $e^x\cdot 2^{\frac{n}{2}}\cos\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$. **1207.** $e^x\cdot 2^{\frac{n}{2}}\sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$. **1208.** $\frac{(n-1)!b^n}{(a^2-b^2x^2)^n}[(a+bx)^n+(-1)^{n-1}(a-bx)^n]$ $\left(|x|<\left|\frac{a}{b}\right|\right)$. **1209.** $e^{ax}[a^nP(x)+C_n^1a^{n-1}P'(x)+\cdots+P^{(n)}(x)]$. **1210.** $\frac{1}{2}\{[(x+n)-(-1)^n(x-n)]\cosh x+[(x+n)+(-1)^n(x-n)]\sinh x\}$. **1211.** $d^ny=e^x\left[x^n+n^2x^{n-1}+\frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2}+\cdots+n!\right]dx^n$. **1212.** $\frac{(-1)^nn!}{x^{n+1}}\left\{\ln x-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right\}dx^n$ $(x>0)$. **1214.**
(a) $(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cdot\left[\cos\left(n\varphi-\frac{n\pi}{2}\right)\cosh ax\cos\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)-\sin\left(n\varphi-\frac{n\pi}{2}\right)\sinh ax\cdot\sin\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)\right]$;
(b) $(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\left[\cos\left(n\varphi-\frac{n\pi}{2}\right)\cosh ax\sin\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)+\sin\left(n\varphi-\frac{n\pi}{2}\right)\cdot\sinh ax\cos\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)\right]$, 其中 $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **1215.** $f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p+k}2^{n-2p+1}(p-k)^nC_{2p}^k$

$\cos\left[(2p-2k)x+\frac{n\pi}{2}\right]$. **1216.** (a) $\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p+k}\frac{(2p-2k+1)^n}{2^{2p}}\cdot C_{2p+1}^k\sin\left[(2p-2k+1)x+\frac{n\pi}{2}\right]$; (b) $\sum_{k=0}^{p-1}2^{n-2p+1}(p-k)^nC_{2p}^k\cos\left[(2p-2k)x+\frac{n\pi}{2}\right]$; (c) $\sum_{k=0}^{p}\left\{\frac{(2p-2k+1)^n}{2^{2p}}C_{2p+1}^k\cos\left[(2p-2k+1)x+\frac{n\pi}{2}\right]\right\}$. **1218.** $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}\cdot\sin(n\operatorname{arccot}x)$ $(x\neq 0)$. **1219.** (a) $\frac{n!}{3}[2^{n+1}+(-1)^n]$; (b) $\frac{n(2n-3)!!}{2^{n-1}}$ $(n>1)$. **1220.** (a) $n(n-1)a^{n-2}$; (b) $f^{(2k)}(0)=0, f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k)!$ $(k=0,1,2,\cdots)$; (c) $f^{(2k)}(0)=0, f^{(2k+1)}(0)=[1\cdot 3\cdots(2k-1)]^2$ $(k=0,1,2,\cdots)$. **1221.** (a) $f^{(2k)}(0)=(-1)^km^2(m^2-2^2)\cdots[m^2-(2k-2)^2], f^{(2k-1)}(0)=0$; (b) $f^{(2k)}(0)=0, f'(0)=m, f^{(2k+1)}(0)=(-1)^km(m^2-1^2)\cdots[m^2-(2k-1)^2]$ $(k=1,2,\cdots)$. **1222.** (a) $f^{(2k)}(0)=(-1)^{k-1}\cdot 2(2k-1)!\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k-1}\right), f^{(2k-1)}(0)=0$ $(k=1,2,\cdots)$; (b) $f^{(2k)}(0)=2^{2k-1}[(k-1)!]^2, f^{(2k-1)}(0)=0$ $(k=1,2,\cdots)$. **1223.** $n!\varphi(a)$. **1228.** $L_m(x)=(-1)^m\left[x^m-m^2x^{m-1}+\frac{m^2(m-1)^2}{1\cdot 2}x^{m-2}+\cdots+(-1)^mm!\right]$. **1231.** $H_m(x)=(2x)^m-\frac{m(m-1)}{1!}(2x)^{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!}(2x)^{m-4}-\cdots$. **1236.** 当 $x=0$ 时, 有限导数 $f'(x)$ 不存在. **1244.** $A(-1,-1), C(1,1)$. **1245.** 不正确. **1246.1.** (a) $\theta=\frac{1}{2}$; (b) $\theta=\frac{\sqrt{x^2+x\Delta x+\frac{1}{3}(\Delta x)^2}-x}{\Delta x}$ $(x\geqslant 0,\Delta x>0)$; (c) $\theta=\frac{x}{\Delta x}\left(\sqrt{1+\frac{\Delta x}{x}}-1\right)$ $(x(x+\Delta x)>0)$; (d) $\theta=\frac{1}{\Delta x}\ln\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$. **1248.** $c=\frac{1}{2}$ 或 $\sqrt{2}$. **1250.** 一般说来, 不. **1261.** $f(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_{n-1}x^{n-1}$, 其中 $c_i(i=0,1,\cdots,n-1)$ 为常数. **1268.** 当 $-\infty<x<\frac{1}{2}$ 时函数递增, 当 $\frac{1}{2}<x<+\infty$ 时递减. **1269.** 当 $-\infty<x<-1$ 时函数递减; 当 $-1<x<1$ 时递增; 当 $1<x<+\infty$ 时递减. **1270.** 当 $-\infty<x<-1$ 时函数递减; 当 $-1<x<1$ 时递增; 当 $1<x<+\infty$ 时递减. **1271.** 当 $0<x<100$ 时函数递增; 当 $100<x<+\infty$ 时递减. **1272.** 函数递增. **1273.** 在区间$\left(\frac{k\pi}{2},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ 上函数递增; 在区间 $\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$ 上递减 $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. **1274.** 在区间 $\left(\frac{1}{2k+1},\frac{1}{2k}\right)$ 和 $\left(-\frac{1}{2k+1},-\frac{1}{2k+2}\right)$ 上函数递增; 在区间 $\left(\frac{1}{2k+2},\frac{1}{2k+1}\right)$ 和 $\left(-\frac{1}{2k},-\frac{1}{2k+1}\right)$ 上递减 $(k=0,1,2,\cdots)$. **1275.** 当 $-\infty<x<0$ 时函数递减; 当 $0<x<\frac{2}{\ln 2}$ 时递增; 当 $\frac{2}{\ln 2}<x<+\infty$ 时递减. **1276.** 当 $0<x<n$ 时函数递增; 当 $n<x<+\infty$ 时递减. **1277.** 当 $-\infty<x<-1$ 和 $0<x<1$ 时递减; 当 $-1<x<0$ 和 $1<x<+\infty$ 时递增. **1278.** 在区间 $\left(e^{-\frac{7\pi}{12}+2k\pi}, e^{\frac{13\pi}{12}+2k\pi}\right)$ 上函数递增; 在区间 $\left(e^{-\frac{13\pi}{12}+2k\pi}, e^{\frac{17\pi}{12}+2k\pi}\right)$ 上递减 $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. **1283.** 不一定. **1298.** 曲线在点 A 处凸, 在点 B 处凹, 点 C 是拐点. **1299.** 当 $-\infty<x<1$ 时图像凸; 在 $1<x<+\infty$ 时图像凹; (1, 2) 是拐点. **1300.** 当 $|x|<\frac{a}{\sqrt{3}}$ 时凹; 当 $|x|>\frac{a}{\sqrt{3}}$ 时凸; $\left(\pm\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{3}{4}a\right)$ 是拐点. **1301.** 当 $x<0$ 时凹; 当 $x>0$ 时凸; (0,0) 是拐点. **1302.** 凸. **1303.** 当 $2k\pi<x<(2k+1)\pi$ 时凹; 当 $(2k+1)\pi<x<(2k+2)\pi$ 时凸; $(k\pi,k\pi)$ 是拐点 $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. **1304.** 当 $|x|<\sqrt{\frac{1}{2}}$ 时凹; 当 $|x|>\sqrt{\frac{1}{2}}$ 时凸; $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},e^{-\frac{1}{2}}\right)$ 是拐点. **1305.** 当 $|x|<1$ 时凸; 当 $|x|>1$ 时凹; $(\pm1,\ln 2)$ 是拐点. **1306.** 当 $e^{2k\pi-\frac{3\pi}{4}}<x<e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}$ 时凸; 当 $e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}<x<e^{2k\pi+\frac{5\pi}{4}}$ 时凹; $\left(e^{k\pi+\frac{\pi}{4}},\frac{(-1)^k}{\sqrt{2}}e^{k\pi+\frac{\pi}{4}}\right)$ 是拐点 $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. **1307.** 当 $0<x<+\infty$ 时凸. **1309.** $h=\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$. **1310.** 凹 $(a>0)$. **1318.** $\frac{a}{b}$. **1319.** 1. **1320.** 2. **1321.** -2. **1322.** $\frac{1}{3}$. **1323.** $-\frac{1}{3}$. **1324.** $\frac{1}{3}$. **1325.** $\frac{1}{6}$. **1326.** $\frac{1}{2}$. **1327.** 1. **1328.** $\frac{a-b}{3ab}$. **1329.** $\frac{1}{6}\ln a$. **1330.** -2. **1331.** 1. **1332.** $\left(\frac{a}{b}\right)^2$. **1333.** $\frac{1}{6}$. **1334.** $\frac{2}{3}$. **1335.** 1. **1336.** 0. **1337.** 0. **1338.** 0. **1339.** 0. **1340.** 0. **1341.** 0. **1342.** 1. **1343.** 1. **1344.** -1. **1345.** e^k. **1346.** e^{-1}. **1347.** $e^{\frac{2}{\pi}}$. **1348.** e^{-1}. **1349.** 1. **1350.** 1. **1351.** 1. **1352.** $e^{\frac{2}{\sin 2a}}$ $(a\neq\frac{k\pi}{2}$, k 为整

数). **1353.** $e^{\frac{1}{2}(\ln^2 a-\ln^2 b)}$. **1354.** $\frac{1}{2}$. **1355.** $\frac{1}{2}$. **1356.** 0. **1357.** $-\frac{1}{2}$. **1358.** $a^a(\ln a-1)$. **1359.** $-\frac{e}{2}$. **1360.** $\frac{1}{a}$. **1361.** $e^{-\frac{2}{\pi}}$. **1362.** 1. **1363.** (a) $e^{\frac{1}{6}}$; (b) $e^{-\frac{1}{6}}$; (c) $e^{\frac{1}{3}}$; (d) $e^{-\frac{1}{3}}$; (f) $e^{-\frac{1}{6}}$. **1364.** $e^{-\frac{1}{2}}$. **1365.** $e^{-\frac{2}{\pi}}$. **1366.** e^{-1}. **1367.** $\frac{mn}{n-m}$. **1368.** (a) $\sqrt{e}$; (b) 0. **1369.** $-\frac{1}{6}$. **1370.** a. **1371.** $\tan\alpha$. **1373.2.** $f'(0)=-\frac{1}{12}$. **1373.3.** $y=\frac{1}{e}\left(x+\frac{1}{2}\right)$. **1374.** (a) 洛必达法则不适用, 极限为 0; (b) 洛必达法则不适用, 极限为 1; (c) 形式地应用洛必达法则得到错误结果 (等于 0), 极限不存在; (d) 不能应用洛必达法则, 否则得到错误结果 0, 极限不存在. **1375.** $\frac{4}{3}$. **1376.** $5-13(x+1)+11(x+1)^2-2(x+1)^3$. **1377.** $1+2x+2x^2-2x^4+o(x^4)$; -48. **1378.** $1+60x+1950x^2+o(x^2)$. **1379.** $a+\frac{x}{ma^{m-1}}-\frac{(m-1)x^2}{2m^2a^{2m-1}}+o(x^2)$. **1380.** $\frac{1}{6}x^2+x^3+o(x^3)$. **1381.** $1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5+o(x^5)$. **1382.** $1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}+o(x^4)$. **1383.** $x-\frac{x^7}{18}-\frac{x^{13}}{3\,240}+o(x^{13})$. **1384.** $-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}+o(x^6)$. **1385.** $x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$. **1386.** $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5)$. **1387.** $-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\frac{x^6}{2835}+o(x^6)$. **1388.** $1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+o((x-1)^2)$. **1389.** $(x-1)+(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^3+o((x-1)^3)$. **1390.** $y=a+\frac{x^2}{2a}+o(x^2)$. **1391.** $\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$. **1392.** $\ln x+\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{h^n}{nx^n}+o(h^n)$. **1394.** (a) 小于 $\frac{3}{(n+1)!}$; (b) 不超过 $\frac{1}{3\,840}$; (c) 小于 $2\cdot10^{-6}$; (d) 小于 $\frac{1}{16}$. **1395.1.** $|x|<0.222=\mathrm{arc}\,12°30'$. **1396.** (a) 3.107 2; (b) 3.017 1; (c) 1.996 1; (d) 1.648 72; (e) 0.309 017; (f) 0.182 321; (g) 0.674 74 = arc 38°39′35″; (h) 0.466 76 = arc 26°44′37″; (i) 1.121 17. **1397.** (a) 2.718 281 828; (b) 0.017 452 41; (c) 0.987 69; (d) 2.236 1; (e) 1.041 39. **1398.** $-\frac{1}{12}$. **1399.** $\frac{1}{3}$. **1400.** $-\frac{1}{4}$. **1401.** $\frac{1}{3}$. **1402.** $\frac{1}{6}$. **1403.** $\ln^2 a$. **1404.** $\frac{1}{2}$. **1405.** 0. **1406.** (a) $\frac{1}{3}$; (b) $\frac{19}{90}$; (c) $\frac{1}{2}$; (d) $\frac{1}{3}$. **1407.** $\frac{x^7}{30}$. **1408.** x^2. **1409.** $\frac{x}{2}$. **1410.1.** $a=\frac{4}{3}; b=-\frac{1}{3}$. **1410.2.** $A=-\frac{2}{5}; B=-\frac{1}{15}$. **1410.3.** $A=\frac{1}{2}, B=\frac{1}{12}, C=-\frac{1}{2}, D=\frac{1}{12}$. **1411.** (a) $\frac{2x}{R^3}$; (b) $\frac{4}{3}x$; (c) $\frac{An}{100}$; (d) $\frac{70}{x}$. **1412.** $\alpha=\frac{2}{3}; \beta=\frac{1}{3}$. **1413.** $\frac{\alpha^4}{180}$, 其中 α 为弧所对圆心角的一半. **1414.** 当 $x=\frac{1}{2}$ 时极大值 $y=2\frac{1}{4}$. **1415.** 没有极值. **1416.** 当 $x=1$ 时有极小值 $y=0$. **1417.** 在 $x=0$ 处, 当 m 为偶数时有极小值 $y=0$, 当 m 为奇数时在 $x=0$ 处没有极值; 在 $x=\frac{m}{m+n}$ 处有极大值 $y=\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$; 在 $x=1$ 处, 当 n 为偶数时有极小值 $y=0$, 当 n 为奇数时在 $x=1$ 处没有极值. **1418.** 在 $x=0$ 处有极小值 $y=2$. **1419.** 在 $x=-1$ 处有极小值 $y=0$; 在 $x=9$ 处有极大值 $y=10^{10}e^{-9}\approx 1\,234\,000$. **1420.** 当 n 为奇数时, 在 $x=0$ 处有极大值 $y=1$; 当 n 为偶数时, 在 $x=0$ 处没有极值. **1421.** 在 $x=0$ 处有极小值 $y=0$. **1422.** 在 $x=\frac{1}{3}$ 处有极大值 $y=\frac{1}{3}\sqrt[3]{4}\approx 0.529$; 在 $x=1$ 处有极小值 $y=0$; 在 $x=0$ 处没有极值. **1423.** 当 $\varphi(x_0)>0$, n 为偶数时, 有极小值 $f(x_0)=0$, 当 $\varphi(x_0)<0$, n 为偶数时, 有极大值 $f(x_0)=0$; n 为奇数时 $f(x_0)$ 不是极值. **1425.** 不能. **1427.** (a) 极小值 $f(0)=0$; (b) 极小值 $f(0)=0$. **1428.** 极小值 $f(0)=0$. **1429.** 在 $x=1$ 处有极大值 $y=0$; 在 $x=3$ 处有极小值 $y=-4$. **1430.** 在 $x=0$ 处有极小值 $y=0$; 在 $x=\pm1$ 处有极大值 $y=1$. **1431.** 在 $x=\frac{5-\sqrt{13}}{6}\approx 0.23$ 处有极小值 $y\approx-0.76$; 在 $x=1$ 处有极大值 $y=0$; 在 $x=\frac{5+\sqrt{13}}{6}\approx 1.43$ 处有极小值 $y\approx-0.05$; 在 $x=2$ 处没有极值. **1432.** 在 $x=-1$ 处有极大值 $y=-2$; 在 $x=1$ 处有极小值 $y=2$. **1433.** 在 $x=-1$ 处有极小值 $y=-1$; 在 $x=1$ 处有极大值 $y=1$. **1434.** 在 $x=\frac{7}{5}$ 处有极小值 $y=-\frac{1}{24}$. **1435.** 在 $x=0$ 和 $x=2$ 处有边界极小值 $y=0$; 在 $x=1$ 处有极大值 $y=1$. **1436.** 在 $x=\frac{3}{4}$ 处有极小值 $y=-\frac{3}{8}\sqrt[3]{2}\approx-0.46$; 在 $x=1$ 处没有极值. **1437.** 在 $x=1$ 处有极大值 $y=e^{-1}\approx 0.368$. **1438.** 在 $x=+0$ 处有边界极大值 $y=0$; 在 $x=e^{-2}\approx 0.135$ 处有极小值 $y=-\frac{2}{e}\approx-0.736$. **1439.** 在 $x=1$ 处有极小值 $y=0$; 在 $x=e^2\approx 7.389$ 处有极

大值 $y=\frac{4}{e^2}\approx 0.541$. **1440.** 在 $x=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 处有极大值 $y=(-1)^k+\frac{1}{2}$; 在 $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 处有极小值 $y=-\frac{3}{4}$. **1441.** 在 $x=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 处有极大值 $y=10$; 在 $x=\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 处有极小值 $y=5$. **1442.** 在 $x=1$ 处有极大值 $y=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\approx 0.439$. **1443.** 在 $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 处有极小值 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}$; 在 $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 处有极大值 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}$. **1444.** 在 $x=-1$ 处有极大值 $y=e^{-2}\approx 0.135$; 在 $x=0$ 处有极小值 $y=0$ (角点); 在 $x=1$ 处有极大值 $y=1$. **1445.** $\frac{1}{2}$; 32. **1446.** 2; 66. **1447.** 0; 132. **1448.** 2; 100.01. **1449.** 1; 3. **1450.** 0; $\frac{100}{e}\approx 36.8$. **1451.** 0; 1. **1452.** 0; $\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})\approx 1.2$. **1453.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}\approx -0.067$; 1. **1454.1.** $m(x)=-\frac{1}{6},-\infty<x\leqslant -3; m(x)=\frac{1+x}{3+x^2},-3<x\leqslant -1; m(x)=0,-1<x<+\infty; M(x)=\frac{1}{2},-\infty<x\leqslant 1; M(x)=\frac{1+x}{3+x^2},1<x<+\infty$. **1455.** (a) $\frac{14^{10}}{2^{14}}\approx 1.77\cdot 10^7$; (b) $\frac{1}{200}$; (c) $\sqrt[3]{3}\approx 1.44$. **1457.** $\frac{9+6\sqrt{3}}{4}\approx 4.85$. **1458.** $q=-\frac{1}{2}$. **1459.** $\frac{4}{27}$. **1460.** $g(x)=(x_1+x_2)x-\frac{1}{8}(x_1^2+x_2^2+6x_1x_2); \Delta=\frac{1}{8}(x_1-x_2)^2$. **1461.** $\frac{2}{3}$. **1462.** 一个根: $(3,+\infty)$. **1463.** 当 $h>27$ 时有一个根: $-\infty<x_1<-1$; 当 $-5<h<27$ 时有三个根: $-\infty<x_1<-1, -1<x_2<3, 3<x_3<+\infty$; 当 $h<-5$ 时有一个根: $3<x_3<+\infty$. **1464.** 两个根: $-\infty<x_1<-1$ 和 $-1<x_2<+\infty$. **1465.** 当 $-\infty<a<-4$ 时有一个根: $-\infty<x_1<-1$; 当 $-4<a<4$ 时有三个根: $-\infty<x_1<-1, -1<x_2<1, 1<x_3<+\infty$; 当 $4<a<+\infty$ 时有一个根: $1<x_1<+\infty$. **1466.** 当 $-\infty<k<0$ 时有一个根: $0<x_1<1$; 当 $0<k<\frac{1}{e}$ 时有两个根; $0<x_1<\frac{1}{k}$ 和 $\frac{1}{k}<x_2<+\infty$; 当 $k>\frac{1}{e}$ 时没有根. **1467.** 当 $a<0$ 时没有根; 当 $0<a<\frac{e^2}{4}$ 时有一个根: $-\infty<x_1<0$; 当 $\frac{e^2}{4}<a<+\infty$ 时有三个根: $-\infty<x_1<0, 0<x_2<2$ 和 $2<x_3<+\infty$. **1468.** 在 $|a|<\frac{3\sqrt{3}}{16}$ 时有两个根; 当 $|a|>\frac{3\sqrt{3}}{16}$ 时没有根. **1469.** 当 $|k|>\sinh\xi\approx 1.50$ 时有两个根: $0<|x_1|<\xi$ 和 $\xi<|x_2|<+\infty$, 其中 $\xi\approx 1.2$ 是方程 $\coth x=x$ 的正根; 当 $|k|<\sinh\xi$ 时没有根. **1470.** (a) $\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}>0$; (b) $\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}<0$. **1471.**[①] 关于坐标原点对称. 函数的零点: $x=0$ 和 $x=\pm\sqrt{3}\approx\pm1.73$. 在 $x=-1$ 处有极小值 $y=-2$; 在 $x=1$ 时有极大值 $y=2$. 拐点: $x=0, y=0$. **1472.** 关于 Oy 轴对称. 零点 $x=\pm\sqrt{1+\sqrt{3}}\approx\pm1.65$. 在 $x=0$ 处有极小值 $y=1$; 在 $x=\pm1$ 时有极大值 $y=1\frac{1}{2}$. 拐点: $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\approx\pm0.58, y=1\frac{5}{18}$. **1473.** 关于点 $A(1,2)$ 对称. 零点: $x=-1$ 和 $x=2$. 在 $x=2$ 处有极小值 $y=0$; 在 $x=0$ 处有极大值 $y=4$. 拐点: $x=1, y=2$. **1474.** 关于 Oy 轴对称. 函数的零点: $x=\pm\sqrt{2}\approx\pm1.41$. 在 $x=0$ 处有极大值 $y=2$; 在 $x=\pm\sqrt{2+\sqrt{5}}\approx\pm2.06$ 处有极小值 $y=1-\frac{\sqrt{5}}{2}\approx-0.12$. 拐点: $x_{1,2}=\pm0.77, y_{1,2}=1.04; x_{3,4}\approx\pm2.67, y_{3,4}\approx-0.010$. 渐近线 $y=0$. **1475.** 间断点: $x=2$ 和 $x=3$. 零点: $x=\pm1$. 在 $x=\frac{7-\sqrt{24}}{5}\approx 0.42$ 时有极小值 $y=-(10-\sqrt{96})\approx-0.20$; 在 $x=\frac{7+\sqrt{24}}{5}\approx 2.38$ 处有极大值 $y=-(10+\sqrt{96})\approx-19.80$. 拐点: $x\approx-0.58, y\approx-0.07$. 渐近线: $x=2, x=3$ 和 $y=1$. **1476.** 间断点: $x_1=-1$ 和 $x_2=1$. 函数的零点 $x=0$. 没有极值点. 拐点: $x\approx-0.22, y\approx-0.19$. 渐近线: $x=-1, x=1$ 和 $y=0$. **1477.** 函数的零点 $x=0$. 间断点 $x=-1$. 在 $x=0$ 处有极小值 $y=0$; 在 $x=-4$ 处有极大值 $y=-9\frac{13}{27}$. 没有拐点. 渐近线: $x=-1$ 和 $y=x-3$. **1478.** 在 $x=-1$ 处有极小值 $y=0$; 拐点 $x=-4, y=\frac{81}{625}$. 渐近线: $x=1$ 和 $y=1$. **1479.** 在 $x=-\frac{3+\sqrt{17}}{2}\approx-3.56$ 处有极大值 $y=-\frac{34\sqrt{17}+142}{32}\approx-8.82$ 和在 $x=0$ 处有极大值 $y=0$; 在 $x=\frac{\sqrt{17}-3}{2}\approx 0.56$ 处有极小值 $y=\frac{34\sqrt{17}-142}{32}\approx-0.06$. 拐点

①对于作图的题目, 并非都给出完整答案.

$x=\frac{1}{5}, y=-\frac{1}{45}$. 渐近线: $x=-1$ 和 $y=x-3$. **1480.** 关于坐标原点对称. 没有极值点; 拐点 $x=0, y=0$. 渐近线 $x=-1, x=1$ 和 $y=0$. **1481.** 在 $x=5$ 处有极小值 $y=13\frac{1}{2}$; 拐点: $x=-1, y=0$. 渐近线: $x=1$ 和 $y=x+5$. **1482.** 在 $x=2$ 处有极小值 $y=2\frac{2}{3}$; 在 $x\approx-2.4$ 处有极大值 $y\approx-3.2$; 拐点 $x=0, y=8$. 渐近线: $x=-1$ 和 $y=x$. **1483.** 关于 Oy 轴对称. 函数的零点: $x=\pm\frac{\sqrt{10}}{4}\approx\pm0.79$. 没有极值点. 拐点: $x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\approx\pm0.71, y=-2\frac{2}{3}$. 渐近线: $x=-1, x=0, x=1$ 和 $y=0$. **1484.** 定义域: $0\leqslant x<+\infty$. 零点: $x=0$ 和 $x=3$. 在 $x=1$ 处有极小值 $y=-2$; 在 $x=0$ 处有边界极大值 $y=0$. 凸. **1485.** (a) 定义域: $|x|\leqslant2\sqrt{2}\approx2.83$. 关于坐标原点和坐标轴对称. 零点: $x=0$ 和 $x=\pm2\sqrt{2}$. 在 $x=\pm2$ 处有极大值 $|y|=4$; 在 $x=0$ 处有极小值 $|y|=0$; 在 $x=\pm2\sqrt{2}$ 处有边界极小值 $|y|=0$. 没有拐点. (b) 函数零点 $x=2$. 在 $x=-0.5$ 处有极小值 $y=-\sqrt{5}\approx-2.24$. 拐点 $x_1=-\frac{3+\sqrt{41}}{8}\approx-1.18; y_1\approx-2.06$ 和 $x_2=\frac{\sqrt{41}-3}{8}\approx0.42; y_2\approx-1.46$. 渐近线: 在 $x\to-\infty$ 时 $y=-1$ 和在 $x\to+\infty$ 时 $y=1$. **1486.** 定义域: $1\leqslant x\leqslant2$ 和 $3\leqslant x<+\infty$. 零点: $x=1, x=2$ 和 $x=3$. 在 $x=\frac{6-\sqrt{3}}{3}\approx1.42$ 处有极大值 $y=\frac{1}{3}\sqrt[4]{12}\approx0.62$; 在 $x=1,2,3$ 处有边界极小值 $|y|=0$. **1487.** 在 $x=1$ 处有极小值 $y=0$; 在 $x=-\frac{1}{3}$ 处有极大值 $y=\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}\approx1.06$; 拐点 $x=-1, y=0$. 渐近线 $y=x-\frac{1}{3}$. **1488.** 关于 Oy 轴对称. 在 $x=0$ 处有极小值 $y=-1$. 凹. 渐近线 $y=0$. **1489.** 关于坐标原点对称. 函数的零点: $x=0$. 在 $x=-2$ 处有极小值 $y=-\sqrt[3]{16}\approx-2.52$; 在 $x=2$ 处有极大值 $y=\sqrt[3]{16}$. 拐点: $x=0, y=0$. 渐近线 $y=0$. **1490.** 关于 Oy 轴对称. 在 $x=\pm1$ 处有极小值 $y=\sqrt[3]{4}\approx1.59$; 在 $x=0$ 处有极大值 $y=2$. 凹. **1491.** 关于坐标原点对称. 间断点 $x=\pm1$. 函数零点 $x=0$. 在 $x=\sqrt{3}$ 处有极小值 $y=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\approx1.38$; 在 $x=-\sqrt{3}$ 处有极大值 $y=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$. 拐点 $x_1=0, y_1=0$ 和 $x_{2,3}=\pm3, y_{2,3}=\pm1\frac{1}{2}$. **1492.** 函数定义域: $|x|\geqslant1$. 关于 Oy 轴对称. 在 $x=\pm1$ 处有边界极小值 $y=0$. 凹. 渐近线: 当 $x\to+\infty$ 时 $y=\frac{x}{2}$ 和当 $x\to-\infty$ 时 $y=-\frac{x}{2}$. **1493.** 函数的定义域: $x>0$. 在 $x=\frac{1}{2}$ 处有极小值 $y=\frac{3}{2}\sqrt{3}\approx2.60$. 凸. 渐近线 $y=x+\frac{3}{2}$ 和 $x=0$. **1494.** 定义域: $x\geqslant0$ 和 $x<-3$. 函数的零点 $x=\frac{5+\sqrt{13}}{2}\approx4.30$. 在 $x=-4$ 处有极小值 $y=13$; 在 $x=0$ 处有边界极大值 $y=1$. 凸. 渐近线在 $x\to-\infty$ 时 $y=\frac{5}{2}-2x$; 在 $x\to+\infty$ 时 $y=-\frac{1}{2}$; 在 $x\to-3-0$ 时 $x=-3$. **1495.** 在 $x=0$ 处有极小值 $y=0$; 在 $x=-2$ 处有极大值 $y=-\sqrt[3]{4}\approx-1.59$. 拐点: $x_1=-(2-\sqrt{3})\approx-0.27, y_1=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{27}-5}{2}}\approx0.46; x_2=-(2+\sqrt{3})\approx-3.73, y_2=-\sqrt[3]{\frac{5+\sqrt{27}}{2}}\approx-1.72$. 渐近线 $x=-1$. **1496.** 关于 Oy 轴对称. 函数值为正. 在 $x=0$ 处有极大值 $y=\sqrt{3}\approx1.73$; 在 $x=\pm1$ 处有极小值 $y=\sqrt{2}\approx1.41$. 拐点: $x_{1,2}\approx\pm0.47; y_{1,2}\approx1.14$ 和 $x_{3,4}\approx\pm4.58, y_{3,4}\approx4.55$. 渐近线 $y=\pm x$. **1497.** 函数的周期: $T=2\pi$; 基本区域 $0\leqslant x\leqslant2\pi$. 函数的零点: $x_1=\pi+\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx1.21\pi$ 和 $x_2=2\pi-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx1.79\pi$. 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处有极小值 $y=1$ 和 $x=\frac{3\pi}{2}$ 处有极小值 $y=-1$; 在 $x=\frac{\pi}{6}$ 和 $x=\frac{5\pi}{6}$ 处有极大值 $y=1\frac{1}{4}$. 拐点: $x_1=\arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8}\approx0.32\pi, y_1=\frac{19+3\sqrt{33}}{32}\approx1.13; x_2=\pi-\arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8}\approx0.68\pi, y_2=\frac{19+3\sqrt{33}}{32}; x_3=\pi+\arcsin\frac{\sqrt{33}-1}{8}\approx1.20\pi, y_3=\frac{19-3\sqrt{33}}{32}\approx0.055; x_4=2\pi-\arcsin\frac{\sqrt{33}-1}{8}\approx1.80\pi, y_4=\frac{19-3\sqrt{33}}{32}$. **1498.** 函数的周期: 2π; 基本区域 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$. 关于坐标原点对称. 零点: $x_1=0$ 和 $x_{2,3}=\pm\pi$. 在 $x=-\arccos\frac{1}{4}\approx-0.42\pi$ 处有极小值 $y=-\frac{15}{8}\sqrt{15}\approx-7.3$; 在 $x=\arccos\frac{1}{4}\approx0.42\pi$ 处有极大值 $y=\frac{15}{8}\sqrt{15}\approx7.3$. 拐点: $x_1=0, y_1=0; x_{2,3}=\pm\arccos\left(-\frac{7}{8}\right)\approx\pm0.84\pi, y_{2,3}=\pm\frac{21}{32}\sqrt{15}\approx\pm2.54; x_{4,5}=\pm\pi, y_{4,5}=0$. **1499.** 函数的周期: $T=2\pi$; 基本区域: $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$. 关于坐标原点对称. 零点: $x_1=0$ 和 $x_{2,3}=\pm\pi$. 在 $x=-\frac{3\pi}{4}$ 和 $x=-\frac{\pi}{4}$ 处有极小值 $y=-\frac{2}{3}\sqrt{2}\approx-0.94$, 在 $x=\frac{\pi}{2}$

处有极小值 $y=\frac{2}{3}$; 在 $x=-\frac{\pi}{2}$ 处有极大值 $y=-\frac{2}{3}$, 在 $x=\frac{\pi}{4}$ 和 $x=\frac{3\pi}{4}$ 处有极大值 $y=\frac{2}{3}\sqrt{2}$. 拐点: $x_1=0, y_1=0; x_{2,3}=\pm\arcsin\sqrt{\frac{5}{6}}\approx\pm0.37\pi, y_{2,3}=\pm\frac{4}{27}\sqrt{30}\approx\pm0.81; x_{4,5}=\pm\left(\pi-\arcsin\sqrt{\frac{5}{6}}\right)\approx\pm0.63\pi, y_{4,5}=\pm\frac{4}{27}\sqrt{30}; x_{6,7}=\pm\pi, y_{6,7}=0$. **1500.** 函数的周期: $T=2\pi$; 基本区域 $[-\pi;\pi]$. 关于 Oy 轴对称. 函数的零点: $x_{1,2}=\pm\arccos\frac{1-\sqrt{3}}{2}\approx\pm0.62\pi$. 在 $x=0$ 处有极小值 $y=\frac{1}{2}$; 在 $x=\pm\pi$ 处有极小值 $y=-1\frac{1}{2}$; 在 $x=\pm\frac{\pi}{3}$ 处有极大值 $y=\frac{3}{4}$. 拐点: $x_{1,2}=\pm\arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8}\approx\pm0.18\pi, y_{1,2}\approx0.63; x_{3,4}=\pm\arccos\frac{1-\sqrt{33}}{8}\approx\pm0.70\pi, y_{3,4}\approx-0.44$. **1501.** 函数的周期: $T=\frac{\pi}{2}$; 基本区域 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$. 关于 Oy 轴对称. 函数值为正. 在 $x=0$ 处有极大值 $y=1$; 在 $x=\pm\frac{\pi}{4}$ 处有极小值 $y=\frac{1}{2}$. 拐点: $x_{1,2}=\pm\frac{\pi}{8}, y_{1,2}=\frac{3}{4}$. **1502.** 函数的周期: $T=\pi$; 基本区域 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. 关于 Oy 轴对称. 函数的零点: $x_1=0$ 和 $x_{2,3}=\pm\frac{\pi}{3}$. 在 $x=0$ 处有极小值 $y=0$ 和 $x=\pm\frac{\pi}{2}$ 处有极小值 $y=-1$; 在 $x=\pm\arccos\frac{1}{4}\approx\pm0.21\pi$ 处有极大值 $y=\frac{9}{16}$. 拐点: $x_{1,2}=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1+\sqrt{129}}{16}\approx\pm0.11\pi, y_{1,2}\approx0.29; x_{3,4}=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{129}}{16}\approx\pm0.36\pi, y_{3,4}\approx-0.24$. **1503.** 函数的周期: $T=\pi$; 基本区域 $0\leqslant x\leqslant\pi$. 间断点: $x=\frac{3\pi}{4}$. 零点: $x_1=0, x_2=\pi$. 没有极值点. 函数是递增的. 拐点: $x=\frac{\pi}{4}, y=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 渐近线 $x=\frac{3\pi}{4}$. **1504.** (a) 函数的周期: $T=2\pi$; 基本区域 $[-\pi,\pi]$. 关于 Oy 轴对称. 函数的零点: $x_{1,2}=\pm\frac{\pi}{2}$. 在 $x=0$ 处有极小值 $y=1$; 在 $x=\pm\pi$ 处有极大值 $y=-1$. 拐点: $x_{1,2}=\pm\frac{\pi}{2}; y_{1,2}=0$. 渐近线: $x=\pm\frac{\pi}{4}$ 和 $x=\pm\frac{3\pi}{4}$; (b) 函数的周期: $T=2\pi$, 基本区域: $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$. 奇函数. 在 $x=-\frac{2\pi}{3}$ 处有极小值 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}\approx-0.58$; 在 $x=\frac{2\pi}{3}$ 处有极大值 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}\approx0.58$. 拐点: $x_1=0, y_1=0; x_{2,3}=\mp\pi, y_{2,3}=0$. **1505.** 对称中心 $(k\pi,2k\pi)$. 函数的零点: $x_1=0$ 和 $x_{2,3}\approx\pm0.37\pi,\cdots$. 在 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ 处有极大值 $y=\frac{\pi}{2}-1+2k\pi$; 在 $x=-\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$ 处有极小值 $y=-\left(\frac{\pi}{2}-1+2k\pi\right)$. 拐点: $x=k\pi, y=2k\pi$. 渐近线: $x=\frac{2k+1}{2}\pi$ (k 为整数). **1506.** 关于直线 $x=1$ 对称. 函数值为正. 在 $x=1$ 处有极大值 $y=\mathrm{e}$. 拐点; $x_{1,2}=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, y_{1,2}=\sqrt{\mathrm{e}}\approx1.65$. 渐近线 $y=0$. **1507.** 关于 Oy 轴对称. 函数值为正. 在 $x=0$ 处有极大值 $y=1$. 拐点: $x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\approx\pm1.22, y_{1,2}=\frac{5}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\approx0.56$. 渐近线 $y=0$. **1508.** 函数值为正. 在 $x=0$ 处有极小值 $y=1$. 凸. 渐近线: 在 $x\to+\infty$ 时 $y=x$. **1509.** (a) 函数值非负; 零点 $x=0$. 在 $x=0$ 处有极小值 $y=0$; 在 $x=\frac{2}{3}$ 处有极大值 $y=\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}}\approx0.39$. 拐点: $x_1=\frac{2-\sqrt{6}}{3}\approx-0.15, y_1\approx0.34$ 和 $x_2=\frac{2+\sqrt{6}}{3}\approx1.48, y_2\approx0.30$. 渐近线: 当 $x\to+\infty$ 是 $y=0$. (b) 函数值非负. 在 $x=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 处有极小值 $y=0$; 在 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ 处有极大值 $y=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}$. 拐点: $x_k=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi, y_k=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\left[2k+\frac{1}{3}(-1)^k\right]\pi}$. **1510.** 函数在 $x>-1$ 时是正的, 在 $x<-1$ 时是负的. 在 $x=0$ 处有极小值 $y=1$. 当 $x>-1$ 时凸和当 $x<-1$ 时凹. **1511.** 关于 Oy 轴对称. 函数值非负; 零点 $x=0$. 在 $x=0$ 处有极小值 $y=0$ (角点). 凹. **1512.** 函数的定义域: $x>0$. 函数的零点 $x=1$. 在 $x=\mathrm{e}^2\approx7.39$ 处有极大值 $y=\frac{2}{\mathrm{e}}\approx0.74$. 拐点: $x=\mathrm{e}^{\frac{8}{3}}\approx14.33, y=\frac{8}{3}\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}}\approx0.70$. 渐近线: 当 $x\to+0$ 时 $x=0$ 和当 $x\to+\infty$ 时 $y=0$. **1513.** 关于坐标原点对称. 零点 $x=0$. 没有极值点; 函数是递增的. 拐点: $x=0, y=0$. **1514.** 关于坐标原点对称. 函数的零点 $x=0$. 函数是递增的. 在 $x>0$ 时是凸的和在 $x<0$ 时是凹的; $O(0,0)$ 是拐点. **1515.** 函数的定义域: $|x|<1$. 关于坐标原点对称. 函数是单调递增的. 在 $x>0$ 时凸和在 $x<0$ 时凹; 拐点: $x=0, y=0$. 渐近线: $x=\pm1$. **1516.** 关于坐标原点对称. 函数的零点: $x=0$. 没有极值点; 函数是递增的. 拐点: $x=0, y=0$. 渐近线: 在 $x\to-\infty$ 时 $y=x-\frac{\pi}{2}$ 和在 $x\to+\infty$ 时 $y=x+\frac{\pi}{2}$. **1517.** 函数的零点 $x\approx-5.95$. 在 $x=1$ 处有极小值 $y=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\approx1.285$; 在 $x=-1$ 处有极大值 $y=-\frac{1}{2}+\frac{3\pi}{4}\approx1.856$. 在 $x>0$ 时凸和在 $x<0$ 时凹; 拐点: $x=0, y=\frac{\pi}{2}$. 渐近线: 在

$x \to -\infty$ 时 $y = \frac{x}{2} + \pi$ 和在 $x \to +\infty$ 时 $y = \frac{x}{2}$. **1518.** 关于 Oy 轴对称. 函数值非负; 零点 $x = 0$. 在 $x = 0$ 处有极小值 $y = 0$. 凸. 渐近线: 当 $x \to -\infty$ 时 $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ 和在 $x \to +\infty$ 时 $y = \frac{\pi}{2}x - 1$. **1519.** 关于坐标原点对称. 函数的零点 $x = 0$. 在 $x = -1$ 处有极小值 $y = -\frac{\pi}{2}$ (角点); 在 $x = 1$ 处有极大值 $y = \frac{\pi}{2}$ (角点). 拐点: $x = 0, y = 0$. 渐近线 $y = 0$. **1520.** 关于 Oy 轴对称. 函数值非负; 零点 $x = 0$. 在 $x = 0$ 处有极小值 $y = 0$ (角点). 凹. 渐近线 $y = \pi$. **1521.** 函数的间断点 $x = 0$. 函数的零点 $x = -2$. 在 $x = 2$ 处有极小值 $y = 4\sqrt{\mathrm{e}} \approx 6.59$; 在 $x = -1$ 处有极大值 $y = \frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0.37$. 拐点: $x = -\frac{2}{5}, y = \frac{8}{5}\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}} \approx 0.13$. 渐近线: $x = 0$ 和 $y = x + 3$. **1522.** 函数的定义域 $|x| \geqslant 1$. 关于 Oy 轴对称. 在 $x = \pm 1$ 处有边界极大值 $y = 2^{\sqrt{2}} \approx 2.67$. 凸. 渐近线 $y = 1$. **1523.** 函数的定义域 $x < 1$ 和 $x > 2$. 与坐标轴的交点为 $(0, \ln 2)$ 和 $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$. 在 $x = \frac{1-\sqrt{10}}{3} \approx -0.72$ 处有极大值 $y \approx 1.12$. 渐近线 $x = 1, x = 2$ 和 $y = 0$. **1524.** 函数的定义域 $|x| \leqslant a$. 函数与坐标轴的交点: $(0, -a)$ 和 $(0.67a, 0)$ (近似的!). 函数是单调递增的. 在 $x = -a$ 处有边界极小值 $y = -\frac{\pi}{2}a$ 和在 $x = a$ 处有边界极大值 $y = \frac{\pi}{2}a$. 凸. **1525.** 函数的定义域: $x \leqslant 0$ 和 $x \geqslant \frac{2}{3}$. 在 $x = 0$ 处有边界极小值 $y = 0$; 在 $x = \frac{2}{3}$ 处有边界极大值 $y = \pi$. 在 $x \leqslant 0$时是凹的和在 $x \geqslant \frac{2}{3}$ 时是凸的. 渐近线 $y = \frac{\pi}{3}$. **1526.** 定义域: $x > 0$. 函数值为正. 在 $x = \frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0.368$ 处有极小值 $y = \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{e}}} \approx 0.692$; 在 $x = +0$ 处有边界极大值 $y = 1$. 凸. **1527.** 函数的定义域: $x > 0$. 在 $x = +0$ 处有边界极小值 $y = 0$; 在 $x = \mathrm{e}$ 处有极大值 $y = \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}} \approx 1.44$. 渐近线 $y = 1$. **1528.** 定义域: $x > -1, x \neq 0$. 函数值为正. 可去间断点: $x = 0$. 没有极值点; 函数是递减的. 凸. 渐近线: $x = -1$ 和 $y = 1$. **1529.** 函数在 $x > 0$ 时是单调的. 在 $x = +0$ 处有边界极小值 $y = 0$. 渐近线 $y = \mathrm{e}\left(x - \frac{1}{2}\right)$. **1530.** 函数值为正的. 关于 Oy 轴对称. 间断点: $x = \pm 1$. 在 $x = 0$ 处有极小值 $y = \mathrm{e}$; 在 $x = \pm\sqrt{3}$ 处有极大值 $y = \frac{1}{4\sqrt{\mathrm{e}}} \approx 0.15$. 有 4 个拐点. 渐近线: 在 $x \to -1 + 0$ 时 $x = -1$, 在 $x \to 1 - 0$ 时 $x = 1$ 和当 $x \to \infty$ 时 $y = 0$. **1531.** 函数 x 和 y 都是非负的; 在 $t = -1$ 时 $x_{\min} = 0$; 在 $t = 1$ 时 $y_{\min} = 0$. 在 $t > -1$ 时凸和在 $t < -1$ 时凹. **1532.** 与坐标轴的交点: $t = 0$ 时 $(0, 0), t = \pm\sqrt{3}$ 时 $(\pm 2\sqrt{3} - 3, 0)$ 和 $t = 2$ 时 $(0, -2)$; 在 $t = 1$ 时 $x_{\max} = 1$ 和 $y_{\max} = 2$ (尖点); 在 $t = -1$ 时 $y_{\min} = -2$. 当 $t < 1$ 时凸和当 $t > 1$ 时凹. **1533.** 与坐标轴的交点: $t = 0$ 时 $(0, 0)$; 在 $t = 0$ 时 $x_{\max} = 0$, 在 $t = 2$ 时 $x_{\min} = 4$; y 在 t 增长时是减少的. 在 $t \approx -0.32$ 时有拐点 $(-0.08, 0.3)$ (近似的). 渐近线: $y = 0, x = -\frac{1}{2}$ 和 $y = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$. **1534.** 与 Oy 轴的交点: 在 $t = 0$ 时 (0,1); 与 Ox 轴的交点:在 $t \to \infty$ 时 $(-1, 0)$. 边界极值: 在 $t = 0$ 时 $x_{\min} = 0$ 和 $y_{\max} = 1$; 在 $t \to \infty$ 时 $x_{\max} = -1$ 和 $y_{\min} = 0$. 没有拐点. 渐近线 $y = \frac{1}{2}$. 在 $|t| > 1$ 时凸, 在 $|t| < 1$ 时凹. **1535.** 函数 x 和 y 都是正的; 在 $t = 0$ 时 $x_{\min} = 1$ 和 $y_{\min} = 1$ (尖点). 在 $t < 0$ 时凸; 在 $t > 0$ 时凹. 渐近线在 $t \to +\infty$ 时 $y = 2x$. **1536.** 基本区域: $[0, \pi]$. 与坐标轴的交点: 在 $t = \frac{\pi}{6}$ 时 $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$; 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 时 $\left(0, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$; 在 $t = \frac{\pi}{2}$ 时 $(-a, 0)$; 在 $t = \frac{3\pi}{4}$ 时 $\left(0, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$; 在 $t = \frac{5\pi}{6}$ 时 $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$. 极值: 在 $t = 0$ 时 $x_{\max} = a$ 和 $y_{\max} = a$;在 $t = \frac{\pi}{3}$ 时 $y_{\min} = -a$; 在 $t = \frac{\pi}{2}$ 时 $x_{\min} = -a$; 在 $t = \frac{2\pi}{3}$ 时 $y_{\max} = a$; 在 $t = \pi$ 时 $x_{\max} = a$ 和 $y_{\min} = -a$. 在 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 时凸; 在 $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ 时凹. **1537.** 函数 x 和 y 是非负的, 并且是周期的; 基本区域 $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. 极值: 当 $t = \frac{\pi}{2}$ 时有 $x_{\min} = 0, y_{\max} = 1$; 当 $t = 0$ 时有 $x_{\max} = 1, y_{\min} = 0$. 凸. **1538.** 定义域: $t > 0$. 关于直线 $x + y = 0$ 对称. 极值: 当 $t = \frac{1}{\mathrm{e}}$ 时有 $x_{\min} = -\frac{1}{\mathrm{e}} \approx -0.37, y = -\mathrm{e} \approx -2.72$; 当 $t = \mathrm{e}$ 时有 $y_{\max} = \frac{1}{\mathrm{e}}, x = \mathrm{e}$. 拐点: 当 $t = \mathrm{e}^{-\sqrt{2}} \approx 0.24$ 时, $x_1 = -\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\sqrt{2}} \approx 0.34, y_1 = -\sqrt{2}\mathrm{e}^{\sqrt{2}} \approx 5.82$ 和当 $t = \mathrm{e}^{\sqrt{2}} \approx 4.10$ 时 $x_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\sqrt{2}}, y_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}$. 当 $t = \frac{1}{\mathrm{e}}$ 时改变凹凸性. 渐近线: $x = 0$ 和 $y = 0$. **1539.** 函数 x

和 y 是周期为 $T = 2\pi$ 的周期函数; 基本区域: $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$. 曲线关于两坐标轴对称. 曲线有两支. 极值: 当 $t = 0$ 时有 $x_{\min} = a, y = 0$; 当 $t = \pm\pi$ 时有 $x_{\max} = -a, y = 0$. 当 $-\pi < t < -\frac{\pi}{2}$ 和 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 时凸; 当 $-\frac{\pi}{2} < t < 0$ 和 $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ 时凹. **1540.** 关于 Oy 轴对称; 当 $t = 0$ 时有 $y_{\min} = 0, x = 0$. 凹. **1541.** 参数方程: $x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}$ $(-\infty < t < +\infty)$. 关于直线 $y = x$ 对称. 与坐标轴的交点是 $O(0,0)$ (二重点). 在 $y = a\sqrt[3]{2} \approx 1.2a$ 处有 $x_{\max} = \sqrt[3]{4} \approx 1.59a$; 在 $x = a\sqrt[3]{2}$ 处有 $y_{\max} = a\sqrt[3]{4}$. 渐近线 $x + y + a = 0$. **1542.** 关于坐标原点、坐标轴和坐标的角平分线对称; $O(0,0)$ 是孤立点. 与坐标轴的交点: $(\pm1, 0)$ 和 $(0, \pm1)$. 在 $y = 0$ 处有 $|x|_{\min} = 1$; 在 $|y| = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.71$ 处有 $|x|_{\max} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2} \approx 1.10$; 在 $x = 0$ 处有 $|y|_{\min} = 1$; 在 $|x| = \sqrt{\frac{1}{2}}$ 处有 $|y|_{\max} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2}$. **1543.** 参数方程: $x = \frac{1-t^3}{t^2}, y = \frac{1-t^3}{t}$, 其中 $t = \frac{y}{x}(-\infty < t < +\infty)$. 曲线有两支. 关于直线 $x + y = 0$ 对称. 极值: 当 $t = -\sqrt[3]{2} \approx -1.26$ 时有 $x_{\min} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2} \approx 1.89, y = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{4} \approx -2.38$; 当 $t = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx -0.79$ 时有 $y_{\max} = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}, x = \frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$. 拐点: 当 $t = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5})} \approx -1.90$ 时 $x_1 \approx 2.18, y_1 \approx -4.14$; 当 $t = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}(7-3\sqrt{5})} \approx -0.53$ 时 $x_2 \approx 4.14, y_2 \approx -2.18$; 当 $t = -\sqrt[3]{2}$ 时改变凹凸性. **1544.** 曲线由直线 $y = x$ 和双曲线的一支 $x = (1+t)^{\frac{1}{t}}, y = (1+t)^{1+\frac{1}{t}}$ $(-1 < t < +\infty)$ 组成. (e,e) 是二重点. 当 $x \neq y$ 时凸. 渐近线: $x = 1$ 和 $y = 1$. **1545.** 定义域: $|x| \geqslant \ln(1+\sqrt{2}) \approx 0.88$. 关于坐标轴对称. 曲线在 $x = \pm\ln(1+\sqrt{2})$ 处有边界极小值 $|y| = 0$. 当 $y > 0$ 时凹和当 $y < 0$ 时凸. 渐近线: $y = x$ 和 $y = -x$. **1546.** 函数的定义域: $r \geqslant 0, |\varphi| \leqslant \alpha$, 其中 $\alpha = \arccos\left(-\frac{a}{b}\right)$. 曲线是封闭的. 关于极轴对称. 曲线在 $\varphi = 0$ 处有极大值 $r = a + b$; 在 $\varphi = \pm\alpha$ 处有边界极小值 $r = 0$. **1547.** 定义域: $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3} \leqslant \varphi \leqslant \pi$; $\frac{4\pi}{3} \leqslant \varphi \leqslant \frac{5\pi}{3}$. 函数 r 是以周期为 $\frac{2\pi}{3}$ 的周期函数. 曲线是封闭的, 且有三条相同的蔓叶线. 对称轴: $\varphi = \frac{\pi}{6}, \varphi = \frac{5\pi}{6}$ 和 $\varphi = \frac{3\pi}{2}$. 坐标原点 $O(0,0)$ 为三重点. 当 $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3}$ 时, 在 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ 处有极大值 $r = a$, 在 $\varphi = 0$ 和 $\varphi = \frac{\pi}{3}$ 时有极小值 $r = 0$. **1548.** 函数的定义域: $|\varphi| < \frac{\pi}{6}$ 和 $\frac{\pi}{2} < |\varphi| < \frac{5}{6}\pi$; 周期为 $\frac{2\pi}{3}$. 在 $\varphi = 0$ 和 $\varphi = \pm\frac{2\pi}{3}$ 处有极小值 $r = a$. 渐近线: $\varphi = \pm\frac{\pi}{6}, \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ 和 $\varphi = \pm\frac{5\pi}{6}$. **1549.** 以坐标原点为渐近点的螺线; r 随 φ 的递增而单调递减. 渐近线 $\varphi = 1$. **1550.** 定义域 $r \geqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.62$. 曲线当 $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时有边界极大值 $\varphi = \pi$; 当 $r = 2$ 时有极小值 $\varphi = \arccos\frac{1}{4} \approx \text{arc}\,75°30'$. 渐近线: 当 $r \to +\infty$ 时 $r\cos\varphi = 1$. **1551.** 以 $(1, a-1)$ (极小值) 为顶点的抛物线族. 与坐标轴的交点: $(0, a)$ 和 $(1 \mp \sqrt{1-a}, 0)$ $(a \leqslant 1)$. 凸. **1552.** 当 $a \neq 0$ 时为双曲线族; 当 $a = 0$ 时为直线 $y = x$. 在 $x = |a|$ 处有极小值 $y = 2|a|$; 在 $x = -|a|$ $(a \neq 0)$ 处有极大值 $y = -2|a|$. 渐近线 $y = x$ 和 $x = 0$. **1553.** 当 $0 < a < +\infty$ 为椭圆族; 当 $-\infty < a < 0$ 为双曲线族; 当 $a = 0$ 时为直线 $y = x$. 族中的所有的曲线都经过点 $(-1, -1)$ 和 $(1, 1)$. 当 $y \geqslant x$ 时有: (1) 当 $a > 0$ 时, 在 $x = \frac{1}{\sqrt{1+a}}$ 处有极大值 $y = \sqrt{1+a}$; 当 $-1 < a < 0$ 时, 在 $x = -\frac{1}{\sqrt{1+a}}$ 处有极大值 $y = -\sqrt{1+a}$; 在 $x = \mp1$ $(a \neq 0)$ 处有边界极小值 $y = \mp1$. (2) 凹. 在 $y \leqslant x$ 时有: (1) 当 $a > 0$ 时, 在 $x = -\frac{1}{\sqrt{1+a}}$ 处有极小值 $y = -\sqrt{1+a}$; 当 $-1 < a < 0$ 时, 在 $x = \frac{1}{\sqrt{1+a}}$ 处有极小值 $y = \sqrt{1+a}$; 在 $x = \mp1$ 处有边界极大值 $y = \mp1$; (2) 凸. 渐近线: $y = (1+\sqrt{-a})x$ 和 $y = (1-\sqrt{-a})x$ $(a < 0)$. **1554.** 当 $a \neq 0$ 时为指数曲线族; 当 $a = 0$ 时为直线 $y = 1 + \frac{x}{2}$. 族的公共点 $(0, 1)$. 当 $a > 0$ 时, 在 $x = \frac{1}{a}\ln 2a$ 处有极小值 $y = \frac{1}{2a}(1 + \ln 2a)$; 当 $a \leqslant 0$ 时, y 单调递增. 渐近线 $y = \frac{x}{2}$. **1555.** 曲线族过点 $(0,0)$, 且有公共的切线 $y = x$. 当 $a > 0$ 时, 在 $x = a$ 处有极大值 $y = ae^{-1} \approx 0.37a$; 当 $a < 0$ 时, 在 $x = a$ 处有极小值 $y = ae^{-1}$. 拐点

$x=2a, y=2ae^{-2}\approx 0.27a$. 渐近线 $y=0$. **1558.** $\frac{a^{m+n}m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$. **1559.** $(m+n)\left(\frac{a^{mn}}{m^m n^n}\right)^{\frac{1}{m+n}}$. **1560.** 对数组的底不能超过 $e^{\frac{1}{e}}\approx 1.445$. **1561.** 边为 $\sqrt{S}$ 的正方形. **1562.** 三角形的锐角为 30° 和 60°. **1563.** 罐子的高 $H=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 等于其底的直径; 表面积 $P=\sqrt[3]{54\pi V^2}$. **1564.** $\cos\varphi=\frac{\cos\alpha+\sqrt{\cos^2\alpha+8}}{4}$, 其中 2α 为矩形的一边所对应弧的弧度, 2φ 为弓形的弧度. **1565.** 矩形的边长分别为 $a\sqrt{2}$ 和 $b\sqrt{2}$. **1566.** 若 $h>b$, 则以底为 x、高为 y 的内接矩形的周长 P 在 $y=h$ 处取得边界最大值; 若 $h<b$, 则 P 在 $y=0$ 处取得边界最小值; 若 $h=b$, 则周长 P 为常数. **1567.** $b=\frac{d}{\sqrt{3}}, h=d\sqrt{\frac{2}{3}}$. **1568.** 长方体的尺寸为 $\frac{2R}{\sqrt{3}}, \frac{2R}{\sqrt{3}}$ 和 $\frac{R}{\sqrt{3}}$. **1569.** $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3$. **1570.** $\pi R^2(1+\sqrt{5})\approx$ 球的表面积的 81%. **1571.** 圆锥的体积为球的体积的 2 倍. **1572.** $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$. **1573.** 若 $\tan\alpha<\frac{1}{2}$, 则圆柱表面积的极大值在 $r=\frac{R}{2(1-\tan\alpha)}$ 时达到, 其中 r 为圆柱底的半径. 若 $\tan\alpha\geqslant\frac{1}{2}$, 则当 $r=R$ 时有边界极大值. **1574.** $p(\sqrt[3]{2}-1)\sqrt{\frac{2+\sqrt[3]{2}}{2}}$. **1575.** 1; 3. **1576.** 若 $b\leqslant\frac{a}{\sqrt{2}}$, 则当 $x=\pm\frac{a^2}{c^2}\sqrt{a^2-2b^2}, y=\frac{b^3}{c^2}$ 时弦长 MB 达到极大值 $\frac{a^2}{c}$, 其中 $c^2=\sqrt{a^2-b^2}$, 且点 M 的坐标为 x 和 y; 若 $b>\frac{a}{\sqrt{2}}$, 则当 $x=0, y=b$ 时弦长 MB 达到边界极大值 $2b$. **1577.** $x=\frac{a}{\sqrt{2}}, y=\frac{b}{\sqrt{2}}; ab$. **1578.** 当 $r=h=\sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$ 时表面积达到极大值, 其中 r 为圆柱的底的半径, h 为它的高. **1579.** $\varphi=60°$. **1580.** 外切于圆的梯形. 腰 $AB=CD=a\sec^2\frac{\alpha}{2}$. **1581.** $\alpha=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\approx \text{arc}\, 294°$, 其中 α 为余下部分的中心角. **1582.** 当 $\arccos\frac{q}{p}\geqslant\arctan\frac{a}{b}$ 时 $\varphi=\arccos\frac{q}{p}$; 当 $\arccos\frac{q}{p}<\arctan\frac{a}{b}$ 时 $\varphi=\arctan\frac{a}{b}$. **1583.** $\frac{|av\mp bu|\sin\theta}{\sqrt{u^2+v^2-2uv\cos\theta}}$. **1584.** $AM=a\left(1+\sqrt[3]{\frac{S_2}{S_1}}\right)^{-1}$. **1585.** 发光点到大球中心的距离, 当 $a\geqslant r+R\sqrt{\frac{R}{r}}$ 时 $x=\frac{a}{1+\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{3}{2}}}$, 当 $r+R<a<r+R\sqrt{\frac{R}{r}}$ 时, $x=a-r$, 其中 a 为两球球心之间的距离. **1586.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **1587.** $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$. **1588.** $v=\sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$, 其中 k 为比例系数. **1589.** $\arctan k$. **1590.** 当 $l\leqslant 4a$ 时, 小棒的倾角由公式 $\cos\alpha=\frac{l+\sqrt{l^2+128a^2}}{16a}$ 确定; 当 $l>4a$ 时没有平衡的位置. **1591.** $k=-3; b=3; y=3(1-x)$. **1592.** $a=\frac{1}{2}e^{x_0}; b=e^{x_0}(1-x_0); c=e^{x_0}\left(1-x_0+\frac{x_0^2}{2}\right)$. **1593.** (a) 一阶; (b) 二阶; (c) 二阶. **1595.** (a) $\sqrt{2}, (2,2)$; (b) 500 000, (150, 500 000) (近似!). **1596.** $p\left(1+\frac{2x}{p}\right)^{\frac{3}{2}}$. **1597.** $\frac{(a^2-\varepsilon^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}$, 其中 $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ 是椭圆的离心率. **1598.** $\frac{(\varepsilon^2x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}$, 其中 $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ 是双曲线的离心率. **1599.** $3|axy|^{\frac{1}{3}}$. **1600.** $\frac{a^2}{b}(1-\varepsilon^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}$, 其中 ε 为椭圆的离心率. **1601.** $2\sqrt{2ay}$. **1602.** at. **1604.** $\frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{|r^2+2r'^2-rr''|}$. **1605.** $\frac{(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2+r^2}$. **1606.** $r\sqrt{1+m^2}$. **1607.** $\frac{2}{3}\sqrt{2ar}$. **1608.** $\frac{a^2}{3r}$. **1609.** $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\ln 2}{2}\right)$. **1610.** $x_0\approx 680$ m. **1611.** 半立方抛物线 $27p\eta^2=8(\xi-p)^3$. **1612.** 星形线 $(a\xi)^{\frac{2}{3}}+(b\eta)^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}}$, 其中 $c^2=a^2-b^2$. **1613.** 星形线 $(\xi+\eta)^{\frac{2}{3}}+(\xi-\eta)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}}$. **1614.** 悬链线 $\eta=a\cosh\frac{\xi}{a}$. **1615.** 对数螺线 $\rho=mae^{m\left(\psi-\frac{\pi}{2}\right)}$. **1616.** $\xi=\pi a+a(\tau-\sin\tau); \eta=-2a+a(1-\cos\tau)$, 其中 $\tau=t-\pi$. **1617.** $x_1=-2.602; x_2=0.340; x_3=2.262$. **1618.** $x_1=-0.724; x_2=1.221$. **1619.** $x=2.087=\text{arc}\,119°35'$. **1620.** ± 0.824. **1621.** $x_1=0.472; x_2=9.999$. **1622.** $x_1=2.506\,2$. **1623.** $x_1=4.730; x_2=7.853$. **1624.** $x=-0.567\,15$. **1625.** $x=\pm 1.199\,678$. **1626.** $x_1=4.493; x_2=7.725; x_3=10.904$. **1627.** $x_1=2.081; x_2=5.940$.

第三章

为简便起见, 本章答案中要加上的任意常数 C 被省略了.

1628. $27x-9x^3+\frac{9}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7$. **1629.** $\frac{625}{3}x^3-125x^4+30x^5-\frac{10}{3}x^6+\frac{1}{7}x^7$. **1630.** $x-3x^2+\frac{11}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4$. **1631.** $x-\frac{1}{x}-2\ln|x|$. **1632.** $a\ln|x|-\frac{a^2}{x}-\frac{a^3}{2x^2}$. **1633.** $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}$. **1634.** $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}-\frac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}$. **1635.** $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\cdot\left(1+\frac{3}{2}x-\frac{3}{5}x^2+\frac{1}{8}x^3\right)$. **1636.** $\frac{4(x^2+7)}{7\sqrt[4]{x}}$. **1637.** $2x-\frac{12}{5}\sqrt[6]{72x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{9x^2}$. **1638.** $\ln|x|-\frac{1}{4x^4}$. **1639.** $x-\arctan x$. **1640.** $-x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$. **1641.** $x+2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$. **1642.** $\arcsin x+\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. **1643.** $\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right|$. **1644.** $\frac{4^x}{\ln 4}+2\cdot\frac{6^x}{\ln 6}+\frac{9^x}{\ln 9}$. **1645.** $-\frac{2}{\ln 5}\left(\frac{1}{5}\right)^x+\frac{1}{5\ln 2}\left(\frac{1}{2}\right)^x$. **1646.** $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+x$. **1647.** $x-\cos x+\sin x$. **1648.** $(\cos x+\sin x)\cdot\operatorname{sgn}(\cos x-\sin x)$. **1649.** $-x-\cot x$. **1650.** $-x+\tan x$. **1651.** $a\cosh x+b\sinh x$. **1652.** $x-\tanh x$. **1653.** $x-\coth x$. **1655.** $\ln|x+a|$. **1656.** $\frac{1}{22}(2x-3)^{11}$. **1657.** $-\frac{1}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}}$. **1658.** $-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}$. **1659.** $-\frac{2}{15(5x-2)^{\frac{3}{2}}}$. **1660.** $-\frac{5}{2}\sqrt[5]{(1-x)^2}$. **1661.** $\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\arctan\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$. **1662.** $\frac{2}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}\right|$. **1663.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$. **1664.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x\sqrt{3}+\sqrt{3x^2-2}\right|$. **1665.** $-\left(\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right)$. **1666.** $-x\sin 5\alpha-\frac{1}{5}\cos 5x$. **1667.** $-\frac{1}{2}\cot\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$. **1668.** $\tan\frac{x}{2}$. **1669.** $-\cot\frac{x}{2}$. **1670.** $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$. **1671.** $\frac{1}{2}[\cosh(2x+1)+\sinh(2x-1)]$. **1672.** $2\tanh\frac{x}{2}$. **1673.** $-2\coth\frac{x}{2}$. **1674.** $-\sqrt{1-x^2}$. **1675.** $\frac{1}{4}(1+x^3)^{\frac{4}{3}}$. **1676.** $-\frac{1}{4}\ln|3-2x^2|$. **1677.** $-\frac{1}{2(1+x^2)}$. **1678.** $\frac{1}{4}\arctan\frac{x^2}{2}$. **1679.** $\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|$. **1680.** $2\arctan\sqrt{x}$. **1681.** $\cos\frac{1}{x}$. **1682.** $-\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|$. **1683.** $-\arcsin\frac{1}{|x|}$. **1684.** $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. **1685.** $-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. **1686.** $\frac{1}{8}\sqrt[3]{8x^3+27}$. **1687.** $2\operatorname{sgn}x\ln(\sqrt{|x|}+\sqrt{|x+1|})$ $(x(1+x)>0)$. **1688.** $2\arcsin\sqrt{x}$. **1689.** $-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$. **1690.** $\ln(2+\mathrm{e}^x)$. **1691.** $\arctan\mathrm{e}^x$. **1692.** $-\ln(\mathrm{e}^{-x}+\sqrt{1+\mathrm{e}^{-2x}})$. **1693.** $\frac{1}{3}\ln^3 x$. **1694.** $\ln|\ln(\ln x)|$. **1695.** $\frac{1}{6}\sin^6 x$. **1696.** $\frac{2}{\sqrt{\cos x}}$. **1697.** $-\ln|\cos x|$. **1698.** $\ln|\sin x|$. **1699.** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{1-\sin 2x}$. **1700.** (a) $\frac{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}{a^2-b^2}$ $(a^2\neq b^2)$; (b) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\sqrt{2}\cos x+\sqrt{\cos 2x}|$; (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin(\sqrt{2}\sin x)$; (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}\cosh x+\sqrt{\cosh 2x})$. **1701.** $-\frac{4}{3}\sqrt[4]{\cot^3 x}$. **1702.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)$. **1703.** $\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$. **1704.** $\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. **1705.** $\ln\left|\tanh\frac{x}{2}\right|$. **1706.** $2\arctan\mathrm{e}^x$. **1707.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\ln\left(\frac{\cosh 2x}{\sqrt{2}}+\sqrt{\sinh^4 x+\cosh^4 x}\right)$. **1708.** $3\sqrt[3]{\tanh x}$. **1709.** $\frac{1}{2}(\arctan x)^2$. **1710.** $-\frac{1}{\arcsin x}$. **1711.** $\frac{2}{3}\ln^{\frac{2}{3}}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$. **1712.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}$. **1713.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}$. **1714.** $-\frac{1}{15(x^5+1)^3}$. **1715.** 当 $n\neq-2$ 时为 $\frac{2}{n+2}\ln(x^{\frac{n+2}{2}}+\sqrt{1+x^{n+2}})$; 当 $n=-2$ 时为 $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|x|$. **1716.** $\frac{1}{4}\ln^2\frac{1+x}{1-x}$. **1717.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x\right)$. **1718.** $\frac{1}{2}\arctan(\cos 2x)$. **1719.** $\frac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\ln\left|\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right|$. **1720.** $2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$. **1721.** (a) $\frac{4}{3}x^3-\frac{12}{5}x^5+\frac{9}{7}x^7$; (b) $-\frac{(1-x)^{11}}{11}+\frac{(1-x)^{12}}{12}$. **1722.** $-x-2\ln|1-x|$. **1723.** $\frac{1}{2}(1-x)^2+\ln|1+x|$. **1724.** $9x-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-27\ln|3+x|$. **1725.** $x+\ln(1+x^2)$. **1726.** $\frac{3}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right|+2\ln|2-x^2|-x$. **1727.** $\frac{1}{99(1-x)^{99}}-\frac{1}{49(1-x)^{98}}+\frac{1}{97(1-x)^{97}}$. **1728.** $\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln|x+1|$. **1729.** $\frac{1}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}}-(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]$. **1730.** $-\frac{8+30x}{375}(2-5x)^{\frac{3}{2}}$ **1731.** $-\frac{1+2x}{10}(1-3x)^{\frac{3}{2}}$. **1732.** $\frac{3}{14}(1+x^2)^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}}$. **1733.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|$. **1734.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|$. **1735.** $\arctan x-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}$. **1736.** $\frac{1}{10\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|-\frac{1}{5\sqrt{3}}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}$ **1737.** $\ln\frac{|x+3|^3}{(x+2)^2}$.

1738. $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2+2}$. **1739.** $-\frac{2x+a+b}{(a-b)^2(x+a)(x+b)}+\frac{2}{(a-b)^3}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right|$. **1740.** $\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{1}{b}\arctan\frac{x}{b}-\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\right)(|a|\neq|b|)$. **1741.** $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x$. **1742.** $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x$. **1743.** $\frac{x}{2}\cos\alpha-\frac{1}{4}\sin(2x+\alpha)$. **1744.** $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x$. **1745.** $3\sin\frac{x}{6}+\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6}$. **1746.** $-\frac{1}{10}\cos\left(5x+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{1}{12}\cos\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)$. **1747.** $-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x$. **1748.** $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x$. **1749.** $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x$. **1750.** $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x$. **1751.** $-x-\cot x$. **1752.** $\frac{1}{2}\tan^2 x+\ln|\cos x|$. **1753.** $-\frac{3}{16}\cos 2x-\frac{3}{64}\cos 4x+\frac{1}{48}\cos 6x+\frac{3}{128}\cos 8x-\frac{1}{192}\cos 12x$. **1754.** $\tan x-\cot x$. **1755.** $-\frac{1}{\sin x}+\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. **1756.** $\frac{1}{2\cos^2 x}+\ln|\tan x|$. **1757.** $\ln|\sin x|-\frac{1}{2}\sin^2 x$. **1758.** $\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x$. **1759.** $x-\ln(1+e^x)$. **1760.** $x+2\arctan e^x$. **1761.** $-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sinh 2x$. **1762.** $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sinh 2x$. **1763.** $\frac{2}{3}\sinh^3 x$. **1764.** $\frac{1}{4}\sinh 2x+\frac{1}{8}\sinh 4x$. **1765.** $-(\tanh x+\coth x)$. **1766.** $-\frac{3}{140}(9+12x+14x^2)(1-x)^{\frac{4}{3}}$. **1767.** $-\frac{1+55x^2}{6\,600}(1-5x^2)^{11}$. **1768.** $-\frac{2}{15}(32+8x+3x^2)\sqrt{2-x}$. **1769.** $-\frac{1}{15}(8+4x^2+3x^4)\sqrt{1-x^2}$. **1770.** $-\frac{6+25x^3}{1000}(2-5x^3)^{\frac{5}{3}}$. **1771.** $\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{7}\sin^2 x+\frac{2}{11}\sin^4 x\right)\sqrt{\sin^3 x}$. **1772.** $-\frac{1}{2}\cos^2 x+\frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x)$. **1773.** $\frac{1}{3}\tan^3 x+\frac{1}{5}\tan^5 x$. **1774.** $\frac{2}{3}(-2+\ln x)\sqrt{1+\ln x}$. **1775.** $-x-2e^{-\frac{x}{2}}+2\ln(1+e^{\frac{x}{2}})$. **1776.** $x-2\ln(1+\sqrt{1+e^x})$. **1777.** $(\arctan\sqrt{x})^2$. **1778.** $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **1779.** $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln|x+\sqrt{x^2-2}|$. **1780.** $\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x$. **1781.** $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$. **1782.** $-\sqrt{a^2-x^2}+a\arcsin\frac{x}{a}$. **1783.** $-\frac{3a+x}{2}\sqrt{x(2a-x)}+3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}$. **1784.** $2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$. **1785.** $\frac{2x-(a+b)}{4}\sqrt{(x-a)(b-a)}+\frac{(b-a)^2}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$. **1786.** $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$. **1787.** $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$. **1788.** 当 $x>a$ 时为 $\sqrt{x^2-a^2}-2a\ln(\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a})$; 当 $x<-a$ 时为 $-\sqrt{x^2-a^2}-2a\ln(\sqrt{-x+a}+\sqrt{-x-a})$. **1789.** 当 $x+a>0$ 和 $x+b>0$ 时为 $2\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})$; 当 $x+a<0$ 和 $x+b<0$ 时为 $-2\ln(\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x-b})$. **1790.** 当$x+a>0$ 和 $x+b>0$ 时为 $\frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)}-\frac{(b-a)^2}{4}\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})$. **1791.** $x(\ln x-1)$. **1792.** $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)$ $(n\neq-1)$. **1793.** $-\frac{1}{x}(\ln^2 x+2\ln x+2)$. **1794.** $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(\ln^2 x-\frac{4}{3}\ln x+\frac{8}{9}\right)$. **1795.** $-(x+1)e^{-x}$. **1796.** $-\frac{e^{-2x}}{2}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)$. **1797.** $-\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2}$. **1798.** $x\sin x+\cos x$. **1799.** $-\frac{2x^2-1}{4}\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x$. **1800.** $x\cosh x-\sinh x$. **1801.** $\left(\frac{x^3}{3}+\frac{2x}{9}\right)\sinh 3x-\left(\frac{x^2}{3}+\frac{2}{27}\right)\cosh 3x$. **1802.** $x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. **1803.** $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$. **1804.** $-\frac{x}{2}+\frac{1+x^2}{2}\arctan x$. **1805.** $-\frac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2}+\frac{x^3}{3}\arccos x$. **1806.** $-\frac{\arcsin x}{x}-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|$. **1807.** $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$. **1808.** $x-\frac{1-x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$. **1809.** $-\sqrt{x}+(1+x)\arctan\sqrt{x}$. **1810.** $\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|-\cos x\cdot\ln\tan x$. **1811.** $\frac{1}{3}(x^3-1)e^{x^3}$. **1812.** $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x$. **1813.** $\frac{1+x^2}{2}(\arctan x)^2-x\arctan x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. **1814.** $-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}\ln|1-x^2|+\frac{x^3}{3}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$. **1815.** $\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x$. **1816.** $-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\arctan x$. **1817.** $\frac{x}{2a^2(a^2+x^2)}+\frac{1}{2a^3}\arctan\frac{x}{a}$ $(a\neq 0)$. **1818.** $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{|a|}$ $(a\neq 0)$. **1819.** $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a}|$. **1820.** $\frac{x(2x^2+a^2)}{8}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$. **1821.** $\frac{x^2}{4}-\frac{x}{4}\sin 2x-\frac{\cos 2x}{8}$. **1822.** $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}$. **1823.** $2(6-x)\sqrt{x}\cos\sqrt{x}-6(2-x)\sin\sqrt{x}$. **1824.** $-\frac{(1-x)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}$. **1825.** $\frac{(1+x)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}$. **1826.** $\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]$. **1827.** $\frac{x}{2}[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]$. **1828.** $\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax}$. **1829.** $\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}$. **1830.** $\frac{e^{2x}}{8}(2-\sin 2x-\cos 2x)$. **1831.** $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x-e^x(\cos x+\sin x)+\frac{1}{2}e^{2x}$. **1832.** $-x+\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})-e^{-x}\operatorname{arccot}(e^x)$. **1833.** $-[x+\cot x+\cot x\ln(\sin x)]$. **1834.** $x\tan x+\ln|\cos x|$. **1835.** $\frac{e^x}{x+1}$. **1836.** 当 $ab>0$

时为 $\frac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{ab}} \arctan\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$; 当 $ab < 0$ 时为 $\frac{\operatorname{sgn} a}{2\sqrt{-ab}} \ln\left|\frac{\sqrt{|a|}+x\sqrt{|b|}}{\sqrt{|a|}-x\sqrt{|b|}}\right|$. **1837.** $\frac{2}{\sqrt{7}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{7}}$.
1838. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{3x+1}\right|$. **1839.** $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-(\sqrt{2}+1)}{x^2+(\sqrt{2}-1)}\right|$. **1840.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.
1841. $\frac{1}{2}\ln(x^2-2x\cos\alpha+1)+\cot\alpha\cdot\arctan\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ ($\alpha\neq k\pi$, k 为整数). **1842.** $\frac{1}{4}\ln(x^4-x^2+2)+\frac{1}{2\sqrt{7}}\arctan\frac{2x^2-1}{\sqrt{7}}$. **1843.** $\frac{1}{9}\ln\{|x^3+1|(x^3-2)^2\}$. **1844.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3\sin x-5\cos x}{\sin x-\cos x}\right|$. **1845.** $\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{2}$. **1846.** 当 $b>0$ 时为 $\frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2}\right|$; 当 $a>0$ 且 $b<0$ 时为 $\frac{1}{\sqrt{-b}}\arcsin\left(x\sqrt{-\frac{b}{a}}\right)$. **1847.** $\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}$. **1848.** $\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right|$. **1849.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+1}\right)$. **1851.** $-\sqrt{5+x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{21}}$. **1852.** $\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)$. **1853.** (a) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x^2+3}{\sqrt{17}}$; (b) $\arcsin\frac{2\sin x-1}{3}$. **1854.** $\frac{1}{2}\sqrt{x^4-2x^2-1}+\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1+\sqrt{x^4-2x^2-1}\right|$. **1855.** $-\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2-x^4}+\frac{3}{4}\arcsin\frac{2x^2-1}{\sqrt{5}}$.
1856. $-\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right|$. **1857.** $\frac{\sqrt{x^2+x-1}}{x}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{x-2}{|x|\sqrt{5}}$ $\left(\left|x+\frac{1}{2}\right|>\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.
1858. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2(1+x^2)}}{1+x}\right|$. **1859.** $\arcsin\frac{x-2}{|x-1|\sqrt{2}}$ ($|x|>\sqrt{2}$). **1860.** $\frac{1}{5}\frac{\sqrt{x^2+2x-5}}{x+2}+\frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{x+7}{|x+2|\sqrt{6}}$ ($|x+1|>\sqrt{6}$). **1861.** $\frac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2}+\frac{9}{8}\arcsin\frac{2x-1}{3}$.
1862. $\frac{2x+1}{4}\sqrt{2+x+x^2}+\frac{7}{8}\ln\left(\frac{1}{2}+x+\sqrt{2+x+x^2}\right)$. **1863.** $\frac{x^2+1}{4}\cdot\sqrt{x^4+2x^2-1}-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1+\sqrt{x^4+2x^2-1}\right|$. **1864.** $-\sqrt{1+x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1-2x}{\sqrt{5}}-\ln\left|\frac{2+x+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right|$ $\left(\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{\sqrt{5}}{2}\right.$ 及 $\left.x\neq 0\right)$. **1865.** $\ln\left|\frac{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}{x}\right|$. **1866.** $\ln|x-2|+\ln|x+5|$. **1867.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3}\right|$.
1868. $\frac{x^9}{9}-\frac{x^8}{8}+\frac{3x^7}{7}-\frac{5x^6}{6}+\frac{11x^5}{5}-\frac{21x^4}{4}+\frac{43x^3}{3}-\frac{85x^2}{2}+171x+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{(x+2)^{1024}}\right|$. **1869.** $x+\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+\frac{28}{3}\ln|x-3|$. **1870.** $x+\frac{1}{3}\arctan x-\frac{8}{3}\arctan\frac{x}{2}$. **1871.** $-\frac{1}{3(x-1)}+\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|$. **1872.** $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln|x^2-1|$. **1873.** $-\frac{5x-6}{x^2-3x+2}+4\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|$. **1874.** $\frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}}\right|$. **1875.** $-\frac{3x^2+3x-2}{8(x-1)(x+1)^2}+\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$. **1876.** $\arctan x+\frac{5}{6}\ln\frac{x^2+1}{x^2+4}$. **1877.** $\frac{1}{2}\operatorname{arccot}x+\frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$. **1878.** $-\frac{1}{x-2}-\arctan(x-2)$. **1879.** $-\frac{1}{5(x-1)}+\frac{1}{50}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+2x+2}-\frac{7}{25}\arctan(x+1)$. **1880.** $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1+2x}{\sqrt{3}}$. **1881.** $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.
1882. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. **1883.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\arctan x$.
1884. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$. **1885.** $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}$. **1886.** $\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2}+\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{6}\arctan x^3$. **1887.** $-\frac{1}{6(1+x)}+\frac{1}{6}\ln\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}+\frac{1}{2}\arctan x-\frac{1}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. **1888.** $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. **1889.** $\frac{2}{5}\ln\frac{x^2+2x+2}{x^2+x+\frac{1}{2}}+\frac{8}{5}\arctan(x+1)-\frac{2}{5}\arctan(2x+1)$. **1890.** $a+2b+3c=0$. **1891.** $-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2}+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$. **1892.** $\frac{x}{3(x^3+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{3}$. **1893.** $\frac{x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^2}+\frac{3}{8}\arctan x$. **1894.** $\frac{1}{x^2+2x+2}+\arctan(x+1)$. **1895.** $\frac{x}{4(x^4+1)}+\frac{3}{16\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\frac{3}{8\sqrt{2}}\arctan\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}$. **1896.** $\frac{5x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{8}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. **1897.** $\frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2}+\frac{21}{128}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{21}{64}\arctan x$.
1898. $\frac{x^3+2x}{6(x^4+x^2+1)}$. **1899.** $\frac{-486x^5+357x^4-810x^3-315x^2+312x-488}{1922(x^3+x+1)^2}$.
1900. $-\frac{x}{x^5+x+1}$ (整个积分!). **1901.** $\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. **1902.** $a\gamma+c\alpha=2b\beta$ 或 $b^2-ac=0$. **1903.** $\frac{1}{96(x-1)^{96}}-\frac{3}{97(x-1)^{97}}-\frac{3}{98(x-1)^{98}}-\frac{1}{99(x-1)^{99}}$. **1904.** $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|-$

$\frac{1}{4}\arctan x^2$. **1905.** $\frac{1}{4\sqrt{3}}\arctan\frac{x^4}{\sqrt{3}}$. **1906.** $\frac{1}{12}\ln\frac{(x^2+1)^2}{x^4-x^2+1}+\frac{1}{3}\arctan x^3+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}$. **1907.** $\frac{5}{8}\ln\frac{x^4}{x^4+2}-\ln\frac{x^4}{x^4+1}$. **1908.** $-\frac{1}{100}\left(\frac{x^5}{x^{10}-10}+\frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x^5-\sqrt{10}}{x^5+\sqrt{10}}\right|\right)$. **1909.** $\frac{x^4}{4}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^4+1}{(x^4+2)^4}$. **1910.** $-\frac{x^5+2}{10(x^{10}+2x^5+2)}-\frac{1}{10}\arctan(x^5+1)$. **1911.** $\frac{1}{n}(x^n-\ln|x^n+1|)(n\neq 0)$, 当 $n=0$ 时为 $\frac{1}{2}\ln|x|$. **1912.** $\frac{1}{2n}\left(\arctan x^n-\frac{x^n}{x^{2n}+1}\right)$ $(n\neq 0)$. **1913.** $\frac{1}{20}\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+2}$. **1914.** $\frac{1}{10(x^{10}+1)}+\frac{1}{10}\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+1}$. **1915.** $\frac{1}{7}\ln\frac{|x^7|}{(1+x^7)^2}$. **1916.** $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x(x^4-5)}{x^5-5x+1}\right|$. **1917.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}$. **1918.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{2x^2+(1-\sqrt{5})x+2}{2x^2+(1+\sqrt{5})x+2}$. **1919.** $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^4-x^2\sqrt{2}+1}{x^4+x^2\sqrt{2}+1}$. **1920.** $\arctan x+\frac{1}{3}\arctan x^3$. **1921.** $I_n=\frac{2ax+b}{(n-1)\Delta(ax^2+bx+c)^{n-1}}+\frac{2n-3}{n-1}\cdot\frac{2a}{\Delta}I_{n-1}$, 其中 $\Delta=4ac-b^2\neq 0$; $I_3=\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2}+\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. $\Delta=0$时, $I_n=\frac{1}{a^n(1-2n)}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^{1-2n}$. **1922.** $I=\frac{1}{(b-a)^{m+n-1}}\int\frac{(1-t)^{m+n-2}}{t^m}\,dt$; $\frac{1}{625}\left(-\frac{1}{t}+3t-\frac{t^2}{2}-3\ln|t|\right)$, 其中 $t=\frac{x-2}{x+3}$. **1923.** $-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{P_n^{(k)}(a)}{k!(n-k)(x-a)^{n-k}}+\frac{P_n^{(n)}(a)}{n!}\ln|x-a|$. **1924.** $R(x)=P(x^2)+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left[\frac{A_{ij}}{(a_i-x)^j}+\frac{A_{ij}}{(a_i+x)^j}\right]$, 其中 P 为多项式, $\pm a_i$ $(i=1,\cdots,k)$ 为分母的根, A_{ij} 为常系数. **1925.** $-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\cdot\cos\frac{\pi(2k-1)}{2n}\ln\left(1-2x\cos\frac{\pi(2k-1)}{2n}+x^2\right)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\sin\frac{\pi(2k-1)}{2n}\arctan\frac{x-\cos\frac{\pi(2k-1)}{2n}}{\sin\frac{\pi(2k-1)}{2n}}\right\}$. **1926.** $2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})$. **1927.** $\frac{3}{4}\ln\frac{x\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[6]{x})^2(1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x})^3}-\frac{3}{2\sqrt{7}}\arctan\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}}$. **1928.** $\frac{3}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{4}\ln|t-1|+\frac{15}{8}\ln(t^2+t+2)-\frac{27}{8\sqrt{7}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{7}}$, $t=\sqrt[3]{2+x}$. **1929.** $6t-3t^2-2t^3+\frac{3}{2}t^4+\frac{6}{5}t^5-\frac{6}{7}t^7+3\ln(1+t^2)-6\arctan t$, 其中 $t=\sqrt[6]{x+1}$. **1930.** $\frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2}-\frac{4}{1+\sqrt[4]{x}}$. **1931.** $\frac{x^2}{2}-\frac{x\sqrt{x^2-1}}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$. **1932.** $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$. **1933.** $-\frac{at^3}{1+t^4}+\frac{a}{4\sqrt{2}}\ln\frac{1+t\sqrt{2}+t^2}{1-t\sqrt{2}+t^2}+\frac{a}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{1-t^2}{t\sqrt{2}}$, 其中 $t=\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}$. **1934.** $-\frac{n}{a-b}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}$. **1935.** $\frac{x}{2}+\sqrt{x}-\frac{1}{2}\sqrt{x(1+x)}-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})$. **1937.** $-\frac{3-2x}{4}\sqrt{1+x+x^2}-\frac{1}{8}\ln\left(\frac{1}{2}+x+\sqrt{1+x+x^2}\right)$. **1938.** $-\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|$. **1939.** $\frac{2-x}{3(1-x)^2}\sqrt{1-x^2}$. **1940.** $R+\ln(x+1+R)-\sqrt{2}\ln\left|\frac{x+2+\sqrt{2}R}{x}\right|$, 其中 $R=\sqrt{x^2+2x+2}$. **1941.** $\arcsin\frac{1+2x}{\sqrt{5}}+\ln\left|\frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}\right|$. **1942.** $\frac{1-2x}{4}\sqrt{1+x-x^2}-\frac{11}{8}\arcsin\frac{1-2x}{\sqrt{5}}$. **1943.** $-\frac{19+5x+2x^2}{6}\cdot\sqrt{1+2x-x^2}-4\arcsin\frac{1-x}{\sqrt{2}}$. **1944.** $\left(\frac{63}{256}x-\frac{21}{128}x^3+\frac{21}{160}x^5-\frac{9}{80}x^7+\frac{x^9}{10}\right)\sqrt{1+x^2}-\frac{63}{256}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$. **1945.** $\left(-\frac{a^4x}{16}-\frac{a^2x^3}{24}+\frac{x^5}{6}\right)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^6}{16}\arcsin\frac{x}{|a|}$. **1946.** $\left(\frac{x^2}{3}-\frac{14x}{3}+37\right)\sqrt{x^2+4x+3}-66\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}|$. **1947.** $-\frac{1}{2x^2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|}$. **1948.** $\frac{2x^2+1}{3x^3}\sqrt{x^2-1}$. **1949.** $\frac{3x-5}{20(x-1)^2}\sqrt{x^2+3x+1}-\frac{11}{40\sqrt{5}}\ln\left|\frac{(x+1)\sqrt{5}+2\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1}\right|$. **1950.** $\frac{3x^2+6x+5}{8(x+1)^4}\sqrt{x^2+2x}-\frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{|x+1|}$, 其中 $x<-2$ 或 $x>0$. **1951.** $4a(ca_1+bb_1)=8a^2c_1+3b^2a_1$ $(a\neq 0)$. **1952.** $\frac{\sqrt{1+2x-x^2}}{2(1-x)}-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+2x-x^2}}{1-x}\right|$. **1953.** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x-3}{|x-1|\sqrt{5}}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3x+1-2\sqrt{x^2-x-1}}{x+1}\right|$. **1954.** $-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}+\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|$. **1955.** $-\frac{1+x}{2}\sqrt{1+2x-x^2}-2\arcsin\frac{1-x}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{|1+x|}$. **1956.** $-\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1}-2\arcsin\frac{1}{|x-2|}$ $(x<1$ 或 $x>3)$. **1957.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$. **1958.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{2}-\sqrt{x^2-1}}\right|$. **1959.** $\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right|$. **1960.** $\ln(x+\sqrt{x^2+2})-$

$\arctan\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}$. **1961.** $\frac{1}{\sqrt6}\ln\left|\frac{(2x+1)\sqrt2+\sqrt{3(x^2+x-1)}}{(2x+1)\sqrt2-\sqrt{3(x^2+x-1)}}\right|$. **1962.** $\arcsin\frac{x-1}{\sqrt3}-\frac{\sqrt2}{3}\arctan\frac{(1-x)\sqrt2}{\sqrt{2+2x-x^2}}-\frac{1}{\sqrt6}\ln\frac{\sqrt6+\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt6-\sqrt{2+2x-x^2}}$. **1963.** $\frac{2(x-1)}{3\sqrt{x^2+x+1}}$. **1964.** $-\frac{1}{\sqrt2}\arctan\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x-1)\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt6}\ln\left|\frac{(x+1)\sqrt2-\sqrt{3(x^2+x+1)}}{\sqrt{x^2-x+1}}\right|$ $(x+1>0)$. **1965.** $\frac{1}{6\sqrt2}\ln\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+(x-2)}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-(x-2)}-\frac13\arctan\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1}$.
1966. $\frac{3}{2(2z+1)}+\frac12\ln\frac{z^4}{|2z+1|^3}$，其中 $z=x+\sqrt{x^2+x+1}$. **1967.** $\ln\left|\frac{z-1}{z}\right|-2\arctan z$，其中 $z=\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$. **1968.** $\frac18\left\{\frac13[(z-1)^3+(z-1)^{-3}]+[(z-1)^2-(z-1)^{-2}]+[(z-1)+(z-1)^{-1}]\right\}+\frac12\ln|z-1|$，其中 $z=x+\sqrt{x^2-2x+2}$. **1969.** $-\frac{5}{18(z+1)}-\frac{1}{6(z+1)^2}+\frac34\ln|z-1|-\frac{16}{27}\ln|z-2|-\frac{17}{108}\ln|z+1|$，其中 $z=\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}$. **1970.** $\frac{2(3-4z)}{5(1-z-z^2)}+\frac{2}{5\sqrt5}\ln\left|\frac{\sqrt5+1+2z}{\sqrt5-1-2z}\right|$，其中 $z=-x+\sqrt{x(1+x)}$. **1971.** $\frac{x}{4}(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})+\frac14\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right|$.
1972. $\frac13\sqrt z-\frac{1}{3\sqrt[4]{12}}\left(\ln\frac{z\sqrt3+\sqrt[4]{12z^2}+1}{z\sqrt3-\sqrt[4]{12z^2}+1}-2\arctan\frac{\sqrt[4]{12z^2}}{z\sqrt3-1}\right)$，其中 $z=\frac{1+x}{1-x}$. **1973.** $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-\frac{1}{\sqrt2}\arcsin x$. **1974.** $\sqrt{1+x+x^2}+\frac12\ln\frac{1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}}{(2+x+2\sqrt{1+x+x^2})^2}$. **1975.** $\frac23\left[(x+1)^{\frac32}+x^{\frac32}\right]-\frac25\left[(x+1)^{\frac52}-x^{\frac52}\right]$. **1976.** $-\frac{1}{\sqrt2}\arcsin\frac{x\sqrt2}{x^2+1}$. **1977.** $-\frac{1}{\sqrt2}\ln\left|\frac{x\sqrt2+\sqrt{x^4+1}}{x^2-1}\right|$. **1978.** $\frac12\arcsin\frac{x^2-1}{x^2\sqrt2}\left(|x|>\sqrt{\sqrt2-1}\right)$. **1979.** $\frac12\ln\frac{x^2(2x^2+1+2\sqrt{x^4+x^2+1})}{x^2+2+2\sqrt{x^4+x^2+1}}$. **1981.** $\frac13\sqrt{(x+x^2)^3}-\frac{1+2x}{8}\sqrt{x+x^2}+\frac18\ln(\sqrt x+\sqrt{1+x})$ $(x>0)$. **1982.** $\frac65x^{\frac56}-4x^{\frac12}+18x^{\frac16}+\frac{3x^{\frac16}}{1+x^{\frac13}}-21\arctan x^{\frac16}$.
1983. $\frac35z^5-2z^3+3z, z=\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$. **1984.** $-z+\frac23z^3-\frac{z^5}{5}$，其中 $z=\sqrt{1-x^2}$. **1985.** $\frac16\ln\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2}-\frac{1}{\sqrt3}\arctan\frac{2z+1}{\sqrt3}$，其中 $z=\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$. **1986.** $\frac14\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|-\frac12\arctan z$，其中 $z=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$. **1987.** $\frac16\ln\frac{z-1}{z+1}+\frac{1}{12}\ln\frac{z^2-z+1}{z^2+z+1}+\frac{1}{2\sqrt3}\cdot\arctan\frac{z^2-1}{z\sqrt3}$，其中 $z=\sqrt[6]{1+x^6}$. **1988.** $\frac54z^4-\frac59z^9$，其中 $z=\sqrt[5]{1+\frac1x}$. **1989.** $\frac{3z}{2(z^3+1)}-\frac14\ln\frac{(z+1)^2}{z^2-z+1}-\frac{\sqrt3}{2}\arctan\frac{2z-1}{\sqrt3}$，其中 $z=\frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}$. **1990.** $m=\frac2k$，其中 $k=\pm1,\pm2,\cdots$. **1991.** $\sin x-\frac23\sin^3x+\frac15\sin^5x$. **1992.** $\frac{5}{16}x-\frac14\sin2x+\frac{3}{64}\sin4x+\frac{1}{48}\sin^32x$. **1993.** $\frac{5}{16}x+\frac14\sin2x+\frac{3}{64}\sin4x-\frac{1}{48}\sin^32x$. **1994.** $\frac{x}{16}-\frac{\sin4x}{64}+\frac{\sin^32x}{48}$. **1995.** $\frac{\sin^5x}{5}-\frac{2\sin^7x}{7}+\frac{\sin^9x}{9}$. **1996.** $-\frac{\cos2x}{64}+\frac{\cos^32x}{96}-\frac{\cos^52x}{320}$.
1997. $\frac{1}{3\cos^3x}-\frac{1}{\cos x}$. **1998.** $-\frac32\cos x-\frac{\cos^3x}{2\sin^2x}-\frac32\ln\left|\tan\frac x2\right|$. **1999.** $-\frac{\cos x}{2\sin^2x}+\frac12\ln\left|\tan\frac x2\right|$. **2000.** $\frac{\sin x}{2\cos^2x}+\frac12\ln\left|\tan\left(\frac x2+\frac\pi4\right)\right|$. **2001.** $-8\cot2x-\frac83\cot^32x$. **2002.** $\frac{\tan^4x}{4}+\frac{3\tan^2x}{2}-\frac{\cot^2x}{2}+3\ln|\tan x|$. **2003.** $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{3\cos^3x}+\ln\left|\tan\frac x2\right|$. **2004.** $\frac{\tan^4x}{4}-\frac{\tan^2x}{2}-\ln|\cos x|$. **2005.** $-x-\frac{\cot^5x}{5}+\frac{\cot^3x}{3}-\cot x$. **2006.** $\frac{\tan^5x}{5}$. **2007.** $-2\sqrt{\cot x}+\frac23\sqrt{\tan^3x}$. **2008.** $\frac14\ln\left|\frac{(1+t)^3(1-t^3)}{(1-t)^3(1+t^3)}\right|-\frac{\sqrt3}{2}\arctan\frac{1-t^2}{t\sqrt3}$，其中 $t=\sqrt[3]{\sin x}$. **2009.** $\frac{1}{2\sqrt2}\ln\frac{z^2+z\sqrt2+1}{z^2-z\sqrt2+1}-\frac{1}{\sqrt2}\arctan\frac{z\sqrt2}{z^2-1}$，其中 $z=\sqrt{\tan x}$. **2010.** $\frac14\ln\frac{(z^2+1)^2}{z^4-z^2+1}+\frac{\sqrt3}{2}\arctan\frac{2z^2-1}{\sqrt3}$，其中 $z=\sqrt[3]{\tan x}$. **2011.** $I_n=-\frac{\cos x\sin^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$; $K_n=\frac{\sin x\cos^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}K_{n-2}$; $I_6=-\frac16\cos x\sin^5x-\frac{5}{24}\cos x\sin^3x-\frac{5}{16}\cos x\sin x+\frac{5}{16}x$; $K_8=\frac18\sin x\cos^7x+\frac{7}{48}\sin x\cos^5x+\frac{35}{192}\sin x\cos^3x+\frac{35}{128}\sin x\cos x+\frac{35}{128}x$.
2012. $I_n=-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$; $K_n=\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}K_{n-2}$; $I_5=-\frac{\cos x}{4\sin^4x}-\frac{3\cos x}{8\sin^2x}+\frac38\ln\left|\tan\frac x2\right|$; $K_7=\frac{\sin x}{6\cos^6x}+\frac{5\sin x}{24\cos^4x}+\frac{5\sin x}{16\cos^2x}+\frac{5}{16}\ln\left|\tan\left(\frac x2+\frac\pi4\right)\right|$. **2013.** $-\frac18\cos4x-\frac{1}{12}\cos6x$.
2014. $\frac x4+\frac{\sin2x}{8}+\frac{\sin4x}{16}+\frac{\sin6x}{24}$. **2015.** $\frac32\cos\frac x6-\frac{3}{10}\cos\frac{5x}{6}-\frac{3}{14}\cos\frac{7x}{6}+\frac{3}{22}\cos\frac{11x}{6}$. **2016.** $-\frac12\cos(a-b)\cos x-\frac14\cos(x+a+b)+\frac{1}{12}\cos(3x+a+b)$. **2017.** $\frac x4+\frac{\sin2ax}{8a}+\frac{\sin2bx}{8b}+\frac{\sin2(a-b)x}{16(a-b)}+\frac{\sin2(a+b)x}{16(a+b)}$. **2018.** $-\frac{3}{16}\cos2x+\frac{3}{64}\cos4x+\frac{1}{48}\cos6x-\frac{3}{128}\cos8x+\frac{1}{192}\cos12x$.

2019. $\frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right|$ $(\sin(a-b)\neq 0)$. **2020.** $\frac{1}{\cos(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+a)}{\cos(x+b)}\right|$ $(\cos(a-b)\neq 0)$. **2021.** $\frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\cos(x+b)}{\cos(x+a)}\right|$ $(\sin(a-b)\neq 0)$. **2022.** $\frac{1}{\cos a}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|$ $(\cos a\neq 0)$. **2023.** $\frac{1}{\sin a}\ln\left|\frac{\cos\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|$ $(\sin a\neq 0)$. **2024.** $-x+\cot a\cdot\ln\left|\frac{\cos x}{\cos(x+a)}\right|$ $(\sin a\neq 0)$. **2025.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}$. **2026.** $\frac{1}{6}\ln\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}$. **2027.** $-\frac{1}{5}(2\sin x+\cos x)+\frac{4}{5\sqrt{5}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\arctan 2}{2}\right)\right|$. **2028.** (a) $\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\tan\frac{x}{2}\right)$ $(0<\varepsilon<1)$; (b) $\frac{2}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\frac{\varepsilon+\cos x+\sqrt{\varepsilon^2-1}\sin x}{1+\varepsilon\cos x}$ $(\varepsilon>1)$. **2029.** $x-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)$. **2030.** $\frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a\tan x}{b}\right)$, $ab\neq 0$. **2031.** $\frac{(2b^2)^{-1}z}{a^2z^2+b^2}+\frac{1}{2ab^3}\arctan\frac{az}{b}$ $(ab\neq 0)$, 其中 $z=\tan x$. **2032.** $\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|$. **2033.** $-\frac{\cos x}{a(a\sin x+b\cos x)}$. **2034.** $-\frac{1}{6}\ln\frac{(\sin x+\cos x)^2}{1-\sin x\cos x}-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\cos x-\sin x}{\sqrt{3}\sin x}\right)$. **2035.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan 2x}{\sqrt{2}}\right)$. **2036.** $\frac{1}{4}\left\{\sqrt{2+\sqrt{2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}-\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot\arctan\frac{u}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\right\}$, 其中 $u=\tan 2x$. **2037.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}-\sin 2x}{\sqrt{2}+\sin 2x}$. **2038.** $\frac{1}{2}\arctan(\sin^2 x)$. **2039.** $\arctan\left(\frac{1}{2}\tan 2x\right)$. **2040.** $-\frac{z}{4(z^2+2)}+\frac{3}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{z}{\sqrt{2}}$, 其中 $z=\tan x$. **2041.** $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)\right|$, 其中 $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **2043.** (a) $-\frac{x}{5}-\frac{3}{5}\ln|\sin x+2\cos x|$; (b) $0.1x+0.3\ln|\sin x-3\cos x|$. **2044.** $\frac{3x}{34}+\frac{5}{34}\ln|5\sin x+3\cos x|$. **2045.** $-\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{a\sin x+b\cos x}+\frac{aa_1+bb_1}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)\right|$, 其中 $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **2047.** $-\frac{3x}{5}+\frac{4}{5}\ln|\sin x-2\cos x+3|-\frac{6}{5}\arctan\frac{5\tan\frac{x}{2}+1}{2}$. **2048.** $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)-\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{2}+\sin x+\cos x\right|$. **2049.** $\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}\ln|3\sin x+4\cos x-2|+\frac{4}{5\sqrt{21}}\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}\left(2\tan\frac{x}{2}-1\right)}{\sqrt{7}-\sqrt{3}\left(2\tan\frac{x}{2}-1\right)}\right|$. **2051.** $-\sin x+3\cos x+2\sqrt{2}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|$. **2052.** $\frac{1}{5}(\sin x+3\cos x)+\frac{8}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}-1+2\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{5}+1-2\tan\frac{x}{2}}\right|$. **2054.** $-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\cos x}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{4}\ln\frac{2+\sin x}{2-\sin x}$. **2055.** $\frac{3}{5}\arctan(\sin x-2\cos x)+\frac{1}{10\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}+2\sin x+\cos x}{\sqrt{6}-2\sin x-\cos x}\right|$. **2056.** $\frac{3}{4\sqrt{2}}\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{2}(\sin x+\cos x)+1}{\sqrt{2}(\sin x+\cos x)-1}\right|-\frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}(\sin x-\cos x)}{\sqrt{3}-\sqrt{2}(\sin x-\cos x)}\right|$. **2058.** $\frac{2\sin x-\cos x}{10(\sin x+2\cos x)^2}+\frac{1}{10\sqrt{5}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\arctan 2}{2}\right)\right|$. **2059.** $A=-\frac{b}{(n-1)(a^2-b^2)}$, $B=\frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2-b^2)}$, $C=-\frac{n-2}{(n-1)(a^2-b^2)}$. **2060.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\sin^2 x}}{|\cos x|}$. **2061.** $2\sqrt{\tan x}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\ln\left|\frac{\tan x+\sqrt{2\tan x}+1}{\tan x-\sqrt{2\tan x}+1}\right|+\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\sqrt{2\tan x}}{\tan x-1}$ $(\tan x>0)$. **2062.** $\frac{1}{2}\left(\arcsin\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}\right)\right)-\frac{1}{2}\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x})$. **2063.** $-\frac{\varepsilon\sin x}{(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon\cos x)}+\frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\cdot\tan\frac{x}{2}\right)$. **2064.** $-\frac{2}{n\cos a}\left(\cos\frac{x+a}{2}\right)^n\left(\sin\frac{x-a}{2}\right)^{-n}$ $(\cos a\neq 0)$. **2065.** $I_n=2I_{n-1}\cos a-I_{n-2}+\frac{2\sin a}{n-1}t^{n-1}$, 其中 $n>2, t=\sin\frac{x-a}{2}\left(\sin\frac{x+a}{2}\right)^{-1}$. **2068.** $e^{3x}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{3}+\frac{2x}{9}-\frac{2}{27}\right)$. **2069.** $-e^{-x}(x^2+2)$. **2070.** $-\left(\frac{x^5}{5}-\frac{4x^3}{25}+\frac{24x}{625}\right)\cos 5x+\left(\frac{x^4}{5}-\frac{12x^2}{125}+\frac{24}{3125}\right)\sin 5x$. **2071.** $(21-10x^2+x^4)\sin x-(20x-4x^3)\cos x$. **2072.** $-\frac{e^{-x^2}}{2}(x^6+3x^4+6x^2+6)$. **2073.** $2e^t(t^5-5t^4+20t^3-60t^2+120t-120)$, 其中 $t=\sqrt{x}$. **2074.** $e^{ax}\left[\frac{1}{2a}+\frac{a\cos 2bx+2b\sin 2bx}{2(a^2+4b^2)}\right]$. **2075.** $\frac{e^{ax}}{4}\left[\frac{3(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}-\frac{a\sin 3bx-3b\cos 3bx}{a^2+9b^2}\right]$. **2076.** $\frac{e^x}{2}[x(\sin x-\cos x)+\cos x]$. **2077.** $\frac{e^x}{2}[x^2(\sin x+\cos x)-2x\sin x+(\sin x-\cos x)]$. **2078.** $e^x\left[\frac{x-1}{2}-\frac{x}{10}(2\sin 2x+\cos 2x)+\frac{1}{50}(4\sin 2x-3\cos 2x)\right]$. **2079.** $\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{4}x^2+3x^2\cos x-x\left(6\sin x+\frac{3}{4}\sin 2x\right)-\left(5\cos x+\frac{3}{8}\cos 2x\right)-\frac{1}{3}\cos^3 x$. **2080.** $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x}\sin(2\sqrt{x})+\frac{1}{4}\cos(2\sqrt{x})$. **2082.** $x+\frac{1}{1+e^x}-\ln(1+e^x)$. **2083.** $e^x-\ln(1+e^x)$. **2084.** $-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\ln|e^x-1|+\frac{1}{6}\ln(e^x+2)$.

2085. $x-3\ln\left\{(1+e^{\frac{x}{6}})\sqrt{1+e^{\frac{x}{3}}}\right\}-3\arctan e^{\frac{x}{6}}$. **2086.** $x+\frac{8}{1+e^{\frac{x}{4}}}$. **2087.** $-2\arcsin\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)$. **2088.** $\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-1})+\arcsin(e^{-x})$. **2089.** $\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}+2\ln(e^x+2+\sqrt{e^{2x}+4e^x-1})-\arcsin\frac{2e^x-1}{e^x\sqrt{5}}$. **2090.** $-\frac{1}{2}e^{-x}(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})+\frac{1}{4}\ln\frac{(\sqrt{1+e^x}-1)(1-\sqrt{1-e^x})}{(\sqrt{1+e^x}+1)(1+\sqrt{1-e^x})}$. **2092.** $a_1+\frac{a_2}{1!}+\frac{a_3}{2!}+\cdots+\frac{a_n}{(n-1)!}=0$. **2093.** $e^x\left(1-\frac{4}{x}\right)$. **2094.** $-e^{-x}-\mathrm{li}(e^{-x})$. **2095.** $e^4\mathrm{li}(e^{2x-4})-e^2\mathrm{li}(e^{2x-2})$. **2096.** $\frac{e^x}{x+1}$. **2097.** $\frac{e^{2x}}{2}\left(x^2+3x+\frac{21}{2}-\frac{32}{x-2}\right)+64e^4\mathrm{li}(e^{2x-4})$. **2098.** $x[\ln^n x-n\ln^{n-1}x+n(n-1)\ln^{n-2}x+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot n(n-1)\cdots 2\ln x+(-1)^n n!]$. **2099.** $\frac{x^4}{4}\left(\ln^3 x-\frac{3}{4}\ln^2 x+\frac{3}{8}\ln x-\frac{3}{32}\right)$. **2100.** $-\frac{1}{2x^2}\left(\ln^3 x+\frac{3}{2}\ln^2 x+\frac{3}{2}\ln x+\frac{3}{4}\right)$. **2101.** $\ln(x+a)\ln(x+b)$. **2102.** $x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2x$. **2103.** $-\frac{x}{2}+x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})+\frac{1}{2}\arcsin x$. **2104.** $\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}-\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. **2105.** $-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+\frac{x^2}{2}\arctan(x+1)$. **2106.** $-\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\ln(1+x)+\frac{2x\sqrt{x}}{3}\arctan\sqrt{x}$. **2107.** $-\frac{3+x}{4}\sqrt{2x-x^2}+\frac{2x^2-3}{4}\arcsin(1-x)$. **2108.** $\frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}+\left(x-\frac{1}{2}\right)\arcsin\sqrt{x}$. **2109.** $-\frac{\mathrm{sgn}x}{2}\sqrt{x^2-1}+\frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x}$. **2110.** $-2\sqrt{x}\,\mathrm{sgn}(1-x)+(1+x)\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$. **2111.** $\frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}-\ln\sqrt{1-x^2}$. **2112.** $\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$. **2113.** $x-\arctan x+\left(\frac{1+x^2}{2}\arctan x-\frac{x}{2}\right)[\ln(1+x^2)-1]$. **2114.** $x-\frac{1-x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$. **2115.** $-\ln\sqrt{1+x^2}+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. **2116.** $-\frac{x}{8}+\frac{\sinh 4x}{32}$. **2117.** $\frac{3x}{8}+\frac{\sinh 2x}{4}+\frac{\sinh 4x}{32}$. **2118.** $\frac{\cosh^3 x}{3}-\cosh x$. **2119.** $\frac{\cosh 6x}{24}-\frac{\cosh 4x}{16}-\frac{\cosh 2x}{8}$. **2120.** $\ln\cosh x$. **2121.** $x-\coth x$. **2122.** $0.5\left[\ln(e^{2x}+\sqrt{e^{4x}-1})+\arcsin(e^{-2x})\right]$. **2123.** (a) $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan 3^{-\frac{1}{2}}\left(2\tanh\frac{x}{2}+1\right)$; (b) $\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{\tanh x-2}{\sqrt{5}}$; (c) $\frac{20}{3\sqrt{11}}\arctan\left(\frac{3\tanh\frac{x}{2}}{\sqrt{11}}\right)$; (d) $-\frac{4}{7}x-\frac{3}{7}\ln|3\sinh x-4\cosh x|$. **2124.** $\frac{a\cosh ax\sin bx-b\sinh ax\cos bx}{a^2+b^2}$. **2125.** $\frac{a\cosh ax\cos bx+b\sinh ax\sin bx}{a^2+b^2}$. **2126.** $-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}-\arctan x$. **2127.** $\frac{1}{8}\frac{x+x^3}{(1-x^2)^2}-\frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$. **2128.** $\frac{1}{4\sqrt{3}}\cdot\ln\frac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{1-x^2}{x\sqrt{3}}$. **2129.** $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)$ $(x>0)$. **2130.** $-\frac{1}{24}(15+10x+8x^2)\sqrt{x(1-x)}+\frac{5}{8}\arcsin\sqrt{x}$ $(0<x<1)$. **2131.** $-\frac{2}{x}\sqrt{1-x^2}-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|}$ $(|x|<1)$. **2132.** $-\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}}$ $(x>0)$. **2133.** $\frac{1}{15}(8-4x^2+3x^4)\sqrt{1+x^2}$. **2134.** $\frac{1}{2}\ln\frac{(1+z)^2}{1-z+z^2}-\sqrt{3}\arctan\frac{2z-1}{\sqrt{3}}$, 其中 $z=\sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}$. **2135.** $-\frac{1}{3}\cdot\ln\left|\frac{2+x^3+2\sqrt{1+x^3+x^6}}{x^3}\right|$. **2136.** $\frac{1}{2}\arccos\frac{x^2+1}{x^2\sqrt{2}}$. **2137.** $-\frac{2+x^2}{x}-\frac{2}{x}\sqrt{1-x^2}-2\arcsin x(|x|<1)$. **2138.** $-\frac{1}{2}(1+x)^2+\frac{5+2x}{4}\sqrt{x+x^2}+\frac{3}{8}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right|$ $(x>0;x<-1)$. **2139.** $-\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x}-\frac{1}{2}\ln\frac{(1+x)^2}{1+x+x^2}+\sqrt{3}\arctan\frac{1+2x}{\sqrt{3}}$. **2140.** $-\frac{2x+21}{4}\sqrt{-x^2+3x-2}+\left(x^2+3x-\frac{55}{8}\right)\arccos(2x-3)$ $(1<x<2)$. **2141.** $-x^2+\frac{x^2}{2}\ln(4+x^4)+2\arctan\frac{x^2}{2}$. **2142.** $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x+\ln|x|+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2$. **2143.** $(1+\sqrt{1+x^2})\ln(1+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$. **2144.** $-\frac{x^2+7}{9}\sqrt{x^2+1}+\frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3}\ln\sqrt{x^2-1}-\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}}\right|$ $(|x|>1)$. **2145.** $\left(\frac{1}{2}-\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}\right)\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$ $(0<x<1)$. **2146.** $\frac{\cos x}{3(2+\sin x)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}$. **2147.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{7+4\sqrt{2}+\cos 4x}{7-4\sqrt{2}+\cos 4x}$. **2148.** $\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}$. **2149.** $a\left[x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]-\frac{a-b}{2}(\arctan x)^2$. **2150.** $a\left(x\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\ln|x^2-1|\right)+\frac{a+b}{4}\ln^2\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$. **2151.** $-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}(x>0)$. **2152.** $\sqrt{1+x^2}\arctan x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. **2153.** $-\ln(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x})$. **2154.** $-\frac{6x+x^3}{9}-\frac{2+x^2}{3}\sqrt{1-x^2}\arccos x(|x|<1)$. **2155.** $-\frac{x^2}{6}-\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\arctan x+\frac{1}{2}(\arctan x)^2+\frac{2}{3}\ln(1+x^2)$. **2156.** $-\frac{x}{4(1+x^2)}-\frac{1-x^2}{4(1+x^2)}\arctan x$.

2157. $\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}\right|$ $(|x|<1)$. **2158.** $-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\arcsin x+\frac{1}{4}(\arcsin x)^2$ $(|x|<1)$. **2159.** $\frac{x}{4}+\frac{x^3}{12}+\frac{1}{4}(1+x^2)^2\operatorname{arccot} x$. **2160.** $x^x(x>0)$. **2161.** $x-\mathrm{e}^{-x}\arcsin(\mathrm{e}^x)-\ln(1+\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}})$ $(x<0)$. **2162.** $x-\ln(1+\mathrm{e}^x)-2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\arctan\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-\left(\arctan\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)^2$. **2163.** $-\frac{\coth 1}{4}[x-\ln(1+\mathrm{e}^x\cosh 1)]-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{4\sinh 1}$. **2164.** $-\ln(\tanh x+\sqrt{1+\tanh^2 x})+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1+\tanh^2 x}+\sqrt{2}\tanh x}{\sqrt{1+\tanh^2 x}-\sqrt{2}\tanh x}$. **2165.** $\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}$. **2166.** $\frac{x|x|}{2}$. **2167.** $\frac{x^2|x|}{3}$. **2168.** $\frac{2x^2}{3}(x+|x|)$. **2169.** $\frac{(1+x)|1+x|}{2}+\frac{(1-x)|1-x|}{2}$. **2170.** 当 $x<0$ 时为 e^x-1; 当 $x\geqslant 0$ 时为 $1-\mathrm{e}^{-x}$. **2171.** 当 $|x|\leqslant 1$ 时为 x, 当 $|x|>1$ 时为 $\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}\operatorname{sgn}x$. **2172.** $\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\left((x)-\frac{1}{2}\right)\left\{1-2\left|(x)-\frac{1}{2}\right|\right\}$,其中$(x)=x-[x]$. **2173.** $\frac{[x]}{\pi}\left\{|x|-(-1)^{[x]}\cos\pi x\right\}$. **2174.** 当 $|x|\leqslant 1$ 时为 $x-\frac{x^3}{3}$; 当 $|x|>1$ 时为 $x-\frac{x}{2}|x|+\frac{1}{6}\operatorname{sgn}x$. **2175.** 当 $-\infty<x<0$ 时为 x; 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时为 $\frac{x^2}{2}+x$; 当 $x>1$ 时为 $x^2+\frac{1}{2}$. **2176.** $xf'(x)-f(x)$. **2177.** $\frac{1}{2}f(2x)$. **2178.** $f(x)=2\sqrt{x}$. **2179.** (a) $x-\frac{x^2}{2}$; (b) $f(x)=x$ $(-\infty<x\leqslant 0)$; $f(x)=\mathrm{e}^x-1$ $(0<x<+\infty)$.

第四章

2181. $12\frac{1}{2}$. **2182.** (a) $\underline{S_n}=16\frac{1}{4}-\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2}, \overline{S_n}=16\frac{1}{4}+\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2}$; (b) $\underline{S_n}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\sqrt{\frac{i}{n}}, \overline{S_n}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}$; (c) $\underline{S_n}=\frac{10230}{n\left(2^{\frac{10}{n}}-1\right)}, \overline{S_n}=\frac{10230\cdot 2^{\frac{10}{n}}}{n\left(2^{\frac{10}{n}}-1\right)}$. **2183.** $\underline{S_n}=31\frac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{32}-1}$; $\frac{31}{5}$. **2184.** $v_0T+\frac{1}{2}gT^2$. **2185.** 3. **2186.** $\frac{a-1}{\ln a}$. **2187.** 1. **2188.** $\sin x$. **2189.** $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$. **2190.** $\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$. **2191.** $\ln\frac{b}{a}$. **2192.** (a) 当 $|\alpha|<1$ 时为 0; (b) 当 $|\alpha|>1$ 时为 $\pi\ln\alpha^2$. **2193.** 5. $\frac{b-a}{2}[f(a)-f(b)]$. **2201.** 一般而言, 否. **2203.** 未必. **2206.** $11\frac{1}{4}$. **2207.** 2. **2208.** $\frac{\pi}{6}$. **2209.** $\frac{\pi}{3}$. **2210.** 1. **2211.** 1. **2212.** $\frac{\pi}{2\sin\alpha}$. **2213.** $\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$. **2214.** $\frac{1}{\sqrt{ab}}\ln\frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}$. **2215.** $\frac{\pi}{2|ab|}$. **2216.** (a) 被积函数 $\frac{1}{x}$ 及其原函数 $\ln|x|$ 在积分区间 $[-1,1]$ 上不连续; (b) 原函数 $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)$ 当 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 时不连续; (c) 函数 $\arctan\frac{1}{x}$ 当 $x=0$ 时不连续. **2217.** $\frac{2}{3}$. **2218.** $200\sqrt{2}$. **2219.** $\frac{1}{2}$. **2220.** $\ln 2$. **2221.** $\frac{\pi}{4}$. **2222.** $\frac{2}{\pi}$. **2223.** $\frac{1}{p+1}$. **2224.** $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$. **2225.** $\frac{1}{\mathrm{e}}$. **2226.** $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **2227.** $\frac{5}{6}\pi$. **2228.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. **2229.** $x+\frac{1}{2}$. **2230.** $\frac{1}{\ln 2}$. **2231.** $0; -\sin a^2; \sin b^2$. **2232.** (a) $2x\sqrt{1+x^4}$; (b) $\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}-\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$; (c) $(\sin x-\cos x)\cos(\pi\sin^2 x)$. **2233.** (a) 1; (b) $\frac{\pi^2}{4}$; (c) 0; (d) A. **2235.** 1. **2237.** (a) $\frac{5}{6}$; (b) $\frac{t}{2}$. **2238.** (a) 当 $\alpha<0$ 时 $\frac{1}{3}-\frac{\alpha}{2}$; 当 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ 时 $\frac{1}{3}-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^3}{3}$; 当 $\alpha>1$ 时$\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{3}$; (b) 当 $|\alpha|\leqslant 1$ 时 $\frac{\pi}{2}$; 当 $|\alpha|>1$ 时 $\frac{\pi}{2\alpha^2}$; (c) 当 $|\alpha|\leqslant 1$ 时 2; 当 $|\alpha|>1$ 时 $\frac{2}{|\alpha|}$. **2239.** $\frac{1}{2}\ln\frac{\mathrm{e}}{2}$. **2240.** π. **2241.** 4π. **2242.** $2\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$. **2243.** 1. **2244.** $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **2245.** $\frac{1}{6}$. **2246.** $\frac{\pi a^4}{16}$. **2247.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$. **2248.** $2-\frac{\pi}{2}$. **2249.** $\frac{\pi^2}{4}$. **2250.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. **2251.** (a) 反函数 $x=\pm t^{\frac{3}{2}}$ 是双值的; (b) 函数 $x=\frac{1}{t}$ 在 $t=0$ 处不连续; (c) 定义于有限区间 $[\alpha,\beta]$ 且取值遍历从 0 到 π 的函数 $x=\arctan t$ 无单值连续的一支. **2252.** 不可以. **2253.** 可以. **2256.** $f(x+b)-f(x+a)$. **2260.** $\frac{3}{2}\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}$. **2261.** $\int_0^1[f(\arcsin t)-f(\pi-\arcsin t)]\,\mathrm{d}t+\int_{-1}^0[f(2\pi+\arcsin t)-f(\pi-\arcsin t)]\,\mathrm{d}t$. **2262.** $4n$. **2263.** $\frac{\pi^2}{4}$. **2264.** $\arctan\frac{32}{27}-2\pi$. **2268.** $315\frac{1}{26}$. **2269.** $\frac{1}{2}\ln 3-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. **2270.** $\frac{5}{27}\mathrm{e}^3-\frac{2}{27}$. **2271.** $-66\frac{6}{7}$. **2272.** $-\frac{\pi}{3}$. **2273.** $\frac{29}{270}$. **2274.** $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$. **2275.** $2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$. **2276.** $2\pi\sqrt{2}$. **2277.** $\frac{1}{6}$. **2278.** $\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}$. **2279.**

$\frac{3}{5}(e^{\pi}-1)$. **2280.** $\frac{3}{8}\ln 2-\frac{225}{1\,024}$. **2281.** 当 $n=2k$ 时 $I_n=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$; 当 $n=2k+1$ 时 $I_n=\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$. **2282.** 参看习题 2281. **2283.** $(-1)^n\left[\frac{\pi}{4}-\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right)\right]$. **2284.** $2^{2n}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$. **2285.** 参看习题 2281. **2286.** $I_n=\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$. **2287.** $I_n=(-1)^n\left\{-\ln\sqrt{2}+\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right]\right\}$. **2290.** $\frac{\pi(2m)!(2n)!}{2^{2m+2n+1}m!n!(m+n)!}$. **2291.** 当 n 为偶数时 0, 当 n 为奇数时 π. **2292.** $(-1)^n\pi$. **2293.** $\frac{\pi}{2^n}$. **2294.** $\frac{\pi}{2^n}\sin\frac{n\pi}{2}$. **2295.** 0. **2296.** 0. **2297.** $\frac{1}{2^{2n}a}(1-e^{-2a\pi})\cdot\left[C_{2n}^n+2\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n}^k\frac{a^2}{a^2+(2n-2k)^2}\right]$. **2298.** $\frac{\pi}{4n}(-1)^{n-1}$. **2299.** $\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$. **2302.** 在函数 $f(x)$ 的间断点上导数 $F'(x)$ 可能存在, 也可能不存在. **2303.** $|x|+C$. **2304.** $\arccos(\cos x)+C$. **2305.** $x[x]-\frac{[x]([x]+1)}{2}+C$. **2306.** $\frac{x^2[x]}{2}-\frac{[x]([x]+1)(2[x]+1)}{12}+C$. **2307.** $C+\frac{1}{\pi}\arccos(\cos\pi x)$. **2308.** $\frac{1}{2}(|l+x|-|l-x|)+C$. **2309.** -1. **2310.** $14-\ln(7!)$. **2311.** $\frac{30}{\pi}$. **2312.** $-\frac{\pi^2}{4}$. **2313.** $\ln(n!)$. **2314.** $-\tanh\frac{\pi}{2}$. **2315.** $\frac{8}{3}$. **2316.** (a) $-$; (b) $+$; (c) $+$; (d) $-$. **2317.** (a) 第二个; (b) 第二个; (c) 第一个. **2318.** (a) $\frac{1}{3}$; (b) $6\frac{2}{3}$; (c) 10; (d) $\frac{1}{2}\cos\varphi$. **2319.1.** $\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}=b$ 为椭圆的短半轴. **2319.2.** $v_{cp}=\frac{1}{2}(v_0+v_1)$, 其中 v_1 为物体的最终速度. **2320.** $\frac{1}{2}i_0^2$. **2321.** A. **2322.** (a) $\theta=\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}$; (b) $\theta=\frac{1}{e}$; (c) $\theta=\frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\theta=\frac{1}{2}$, $\lim_{x\to+\infty}\theta=1$. **2323.** $\frac{8\pi}{3}\pm\frac{4\pi}{3}\theta$ $(|\theta|<1)$. **2324.** 介于 $\frac{1}{10\sqrt{2}}$ 和 $\frac{1}{10}$ 之间. **2325.** $0.01-0.005\theta$ $(0<\theta<1)$. **2326.2.** (a) 1; (b) $f(0)\ln\frac{b}{a}$. **2328.** $\frac{\theta}{50\pi}$ $(0<\theta<1)$. **2329.** $\frac{2}{a}\theta$ $(|\theta|<1)$. **2330.** $\frac{\theta}{a}$ $(|\theta|<1)$. **2334.** $\frac{1}{a}$. **2335.** -1. **2336.** π. **2337.** π. **2338.** $\frac{2}{3}\ln 2$. **2339.** $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$. **2340.** $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. **2341.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. **2342.** $\frac{\pi}{2}$. **2343.** $\frac{1}{5}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$. **2344.** 0. **2345.** $\frac{\pi}{2}-1$. **2346.** $\frac{a}{a^2+b^2}$. **2347.** $\frac{b}{a^2+b^2}$. **2348.** $I_n=n!$. **2349.** $I_n=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi a^{n-1}\mathrm{sgn}a}{(ac-b^2)^{n-\frac{1}{2}}}$. **2350.** $I_n=\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^n(-1)^{k+1}C_n^k\ln(k+1)$, 其中 C_n^k 为 n 个元素中取 k 个的组合数. **2351.** 当 n 为偶数时 $I_n=\frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}$, 当 n 为奇数时 $I_n=\frac{(n-1)!!}{n!!}$. **2352.** 当 n 为偶数时 $I_n=\frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}$, 当 n 为奇数时 $I_n=\frac{(n-1)!!}{n!!}$. **2353.** (a) $-\frac{\pi}{2}\ln 2$; (b) $-\frac{\pi}{2}\ln 2$. **2354.** $\frac{2\sqrt[4]{8}e^{-\frac{\pi}{8}}}{1-e^{-\pi}}$. **2356.** (a) 1; (b) $\frac{\pi}{2}$; (c) 0. **2357.** (a) 1; (b) $\frac{1}{3}$; (c) 1; (d) $\frac{1}{\alpha}f(0)$. **2358.** 收敛. **2359.** 收敛. **2360.** 发散. **2361.** 当 $p>0$ 时收敛. **2362.** 当 $p>-1$ 且 $q>-1$ 时收敛. **2363.** 当 $m>-1$ 且 $n-m>1$ 时收敛. **2364.** 当 $1<n<2$ 时收敛. **2365.** 当 $1<n<2$ 时收敛. **2366.** 当 $m>-2$ 且 $n-m>1$ 时收敛. **2367.** 当 $n>0$ $(a\neq 0)$ 时收敛. **2368.** 发散. **2369.** 当 $p<1$ 且 $q<1$ 时收敛. **2370.** (a) 当 $n>-1$ 时收敛; (b) 收敛. **2371.** 当 $\min(p,q)<1$ 且 $\max(p,q)>1$ 时收敛. **2372.** 收敛. **2373.** 收敛. **2374.** 当 $p>1$ 且 $q<1$ 时收敛. **2375.** 当 $p>1,q$ 为任意数, $r<1$ 时, 以及当 $p=1,q>1,r<1$ 时收敛. **2376.** (a) 当$p_i<1$ $(i=1,2,\cdots,n)$, $\sum_{i=1}^n p_i>1$ 时收敛; (b) 当 $\alpha>-1,\beta>-1,\alpha+\beta<-1$ 时收敛. **2377.** 当$P_n(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上无根且 $n>m+1$ 时收敛. **2378.** 不是绝对收敛. **2379.** 不是绝对收敛. **2380.** (a) 当 $-1<\frac{p+1}{q}<0$ 时绝对收敛; 当 $0\leqslant\frac{p+1}{q}<1$ 时条件收敛; (b) 绝对收敛; (c) 收敛. **2381.** 当 $p>-2,q>p+1$ 时绝对收敛; 当 $p>-2,p<q\leqslant p+1$ 时条件收敛. **2382.** 当 $0<n<2$ 时条件收敛. **2383.** 当 $n>m+1$ 时绝对收敛; 当 $m<n=m+1$ 时条件收敛. **2385.** 不可能. **2392.** $\ln\frac{1}{2}$. **2393.** 0. **2394.** π. **2395.** 0. **2397.** $\frac{a^2}{3}$. **2398.** $4\frac{1}{2}$. **2399.** $4\frac{1}{2}$. **2400.** (a) $9.9-8.1\lg e\approx 6.38$; (b) $2-\frac{1}{\ln 2}\approx 0.56$; (c) $\frac{1}{3}+\frac{2}{\pi}\approx 0.97$. **2401.** $\frac{\pi}{2}$. **2402.** πa^2. **2403.** πab. **2404.** $\frac{4}{3}a^3$. **2405.**

$\frac{88}{15}\sqrt{2}p^2$. **2406.** $\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$. **2407.** $3\pi a^2$. **2408.** $\frac{\pi a^2}{2}$. **2409.** $\frac{2\pi}{n+2}$. **2410.** $\frac{1}{2}\coth\frac{\pi}{2}\approx 0.546$. **2411.** $(3\pi+2):(9\pi-2)$. **2412.** $x=\cosh S, y=\sinh S$. **2413.** $3\pi a^2$. **2414.** $\frac{8}{15}$. **2415.** $\frac{a^2}{3}(4\pi^3+3\pi)$. **2416.** $6\pi a^2$. **2417.** (a) $\frac{3\pi}{8}\cdot\frac{c^4}{ab}$; (b) $\pi a^2\left(\frac{16}{\sqrt{3}}-9\right)$. **2418.** a^2. **2419.** $\frac{3\pi a^2}{2}$. **2420.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **2421.** $\frac{p^2}{6}(3+4\sqrt{2})$. **2422.** (a) $\frac{\pi p^2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$; (b) 11π; (c) $\frac{1}{\pi}$. **2423.** $(\pi-1)\frac{a^2}{4}$. **2424.** $\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{3}\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$. **2425.** (a) $\frac{2}{3}$; (b) $\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}$; (c) $4\frac{4}{15}$; (d) $\pi\left(1+\frac{\pi^2}{6}\right)$; (e) $\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)a^2$. **2426.** $\frac{3}{2}a^2$. **2427.** $\pi a^2\sqrt{2}$. **2428.** a^2. **2429.** $\frac{3}{8}\pi a^2$. **2430.** $\frac{\pi a^2}{8\sqrt{2}}$. **2431.** $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$. **2432.** $2\sqrt{x_0\left(x_0+\frac{p}{2}\right)}+p\ln\frac{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0+\frac{p}{2}}}{\sqrt{\frac{p}{2}}}$. **2433.** $\sqrt{h^2-a^2}$. **2434.** $x_0-\sqrt{2}+\sqrt{1+e^{2x_0}}-\ln\frac{1+\sqrt{1+e^{2x_0}}}{1+\sqrt{2}}$. **2435.** $\frac{e^2+1}{4}$. **2436.** $a\ln\frac{a+b}{a-b}-b$. **2437.** $\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)$. **2438.** $a\ln\frac{a}{b}$. **2439.** $4a\left(1+3\sqrt{3}\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$. **2440.** $6a$. **2441.** $\frac{4(a^3-b^3)}{ab}$. **2442.** $\left[1+\frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}\right]a$. **2443.** $8a$. **2444.** $2\pi^2 a$. **2445.** (a) $2a\left(\cosh\frac{T}{2}\sqrt{\cosh T}-1\right)-\sqrt{2}a\ln\frac{\sqrt{2}\cosh\frac{T}{2}+\sqrt{\cosh T}}{1+\sqrt{2}}$; (b) $\frac{1}{2}(\cosh^{\frac{3}{2}}2T-1)$. **2446.** $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$. **2447.** $\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}a$. **2448.** $8a$. **2449.** $p[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$. **2450.** $\frac{3\pi a}{2}$. **2451.** $a(2\pi-\tanh\pi)$. **2452.** (a) $2+\frac{1}{2}\ln 3$; (b) $6\frac{1}{3}$; (c) $\sinh R$; (d) T. **2455.** $\frac{2\pi}{5\sqrt{3}}\approx 0.73$. **2456.** $\frac{bh}{6}(2a+c)$. **2457.** $\frac{h}{6}[(2A+a)B+(A+2a)b]$. **2458.** $\frac{\pi h}{6}[(2A+a)B+(A+2a)b]$. **2459.** $\frac{1}{2}SH$. **2462.** $\frac{2}{3}abc$. **2463.** $\frac{4}{3}\pi abc$. **2464.** $\frac{8\pi abc}{3}$. **2465.** $\frac{16}{3}a^3$. **2466.** $\frac{2}{3}a^3\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$. **2467.** $\frac{16}{15}a^2\sqrt{ab}$. **2468.** $\frac{\pi a^3}{2}$. **2469.** $\frac{4}{15}$. **2470.** $\frac{4\pi\sqrt{2}}{3}a^3$. **2472.** $\frac{3}{7}\pi ab^2$. **2473.** (a) $\frac{16\pi}{15}$; (b) $\frac{8\pi}{3}$. **2474.** (a) $\frac{\pi^2}{2}$; (b) $2\pi^2$. **2475.** (a) $\frac{4}{15}\pi ab^2$; (b) $\frac{\pi a^2 b}{6}$. **2476.** (a) $\frac{\pi}{2}$; (b) 2π. **2477.** $2\pi^2a^2b$. **2478.** $\frac{8\pi a^3}{3}$. **2479.** $\frac{\pi}{5(1-e^{-2\pi})}$. **2480.** (a) $5\pi^2a^3$; (b) $6\pi^3a^3$; (c) $7\pi^2a^3$. **2481.** (a) $\frac{32}{105}\pi ab^2$; (b) $\frac{32}{105}\pi a^2 b$. **2482.1.** $V_x=\frac{64}{35}\pi$; $V_y=\frac{64}{105}\pi$. **2483.1.** (a) $\frac{8}{3}\pi a^3$; (b) $\frac{13}{4}\pi^2a^3$. **2483.2.** (a) $\frac{\pi a^3}{4}\left[\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})-\frac{2}{3}\right]$; (b) $\frac{\pi^2a^3}{4\sqrt{2}}$; (c) $\frac{\pi^2a^3}{4}$. **2484.1.** $\frac{2}{3}(\pi^4+6\pi^2)a^3$. **2484.2.** $\frac{2}{3}\pi$. **2485.** $\frac{\pi^2a^3}{2\sqrt{2}}$. **2486.** $\frac{4\pi a^2}{243}\left(21\sqrt{13}+2\ln\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$. **2487.** $2a\sqrt{\pi^2a^2+4b^2}+\frac{8b^2}{\pi}\ln\frac{\pi a+\sqrt{\pi^2a^2+4b^2}}{2b}$. **2488.** $\pi\left[(\sqrt{5}-\sqrt{2})+\ln\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)}{2}\right]$. **2489.** (a) $\frac{2\pi}{3}\left[(2x_0+p)\sqrt{2px_0+p^2}-p^2\right]$; (b) $\frac{\pi}{4}\left[(p+4x_0)\sqrt{2x_0(p+2x_0)}-p^2\ln\frac{\sqrt{2x_0}+\sqrt{p+2x_0}}{\sqrt{p}}\right]$. **2490.** (a) $2\pi b^2+2\pi ab\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}$; (b) $2\pi a^2+\frac{2\pi b^2}{\varepsilon}\ln\left[\frac{a}{b}(1+\varepsilon)\right]$, 其中 $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ 为椭圆的离心率. **2491.** $4\pi^2ab$. **2492.** $\frac{12}{5}\pi a^2$. **2493.** (a) $\pi a\left(2b+a\sinh\frac{2b}{a}\right)$; (b) $2\pi a\left(a+b\sinh\frac{b}{a}-a\cosh\frac{b}{a}\right)$. **2494.** $4\pi a^2$. **2495.** (a) $\frac{64}{3}\pi a^2$; (b) $16\pi^2a^2$; (c) $\frac{32}{3}\pi a^2$. **2496.** $\frac{3\pi}{5}a^2(4\sqrt{2}-1)$. **2497.** $\frac{32}{5}\pi a^2$. **2498.** (a) $2\pi a^2(2-\sqrt{2})$; (b) $2\pi a^2\sqrt{2}$; (c) $4\pi a^2$. **2499.** $\frac{5}{128\sqrt[4]{10}}[14\sqrt{5}+17\ln(2+\sqrt{5})]\approx 1.013$. **2500.** $V=\frac{4\pi}{3}p^2$; $P=2\pi p^2[(2+\sqrt{2})+\ln(1+\sqrt{2})]$. **2501.1.** $M_1=2a^2$; $M_2=\frac{\pi a^3}{2}$. **2501.2.** $\frac{p^2}{8}[\sqrt{2}+5\ln(1+\sqrt{2})]$. **2502.1.** $M_1=\frac{bh^2}{6}$; $M_2=\frac{bh^3}{12}$. **2502.2.** $I_x=\frac{8}{35}a^4, I_y=\frac{8}{5}a^4, r_x=a\sqrt{\frac{6}{35}}, r_y=a\sqrt{\frac{6}{5}}$. **2503.** $M_2^{(x)}=\frac{\pi ab^3}{4}$; $M_2^{(y)}=\frac{\pi a^3b}{4}$. **2504.1.** $M_1=\frac{\pi r^2h^2}{12}, M_2=\frac{\pi}{30}r^2h^3$. **2504.2.** $I=\frac{1}{20}MR^2$. **2507.** $x_0=a\frac{\sin\alpha}{\alpha}$; $y_0=0$. **2508.** $\left(\frac{9}{20}a,\frac{9}{20}a\right)$. . **2509.** $\left(\frac{4a}{3\pi},\frac{4b}{3\pi}\right)$. **2510.** $\left(0,0,\frac{3}{8}a\right)$. **2511.** $\varphi_0=\varphi-\alpha$, 其中 $\alpha=\arctan\frac{1}{2m}$; $r_0=\frac{mr}{\sqrt{1+4m^2}}$. 对数螺线 $r_0=\frac{am}{\sqrt{1+4m^2}}e^{m(\varphi_0+\alpha)}$. **2512.** $\varphi_0=0, r_0=\frac{5}{6}a$. **2513.** $x_0=\pi a, y_0=\frac{5}{6}a$. **2514.** $x_0=\frac{2}{3}a, y_0=0$. **2515.** $\left(0,0,\frac{a}{2}\right)$. **2516.** 75 kg. **2517.** $A_h=mg\frac{Rh}{R+h}$, $A_\infty=mgR$, 其中 g 为地球表面的重力加速度. **2518.** 5 J. **2519.** 17400 J. **2520.** $\frac{2}{3}a^3\rho g$ (ρ 为水的密度, g 为重力加速度). **2521.** 7×10^6 N ($708\frac{1}{3}$ 吨力). **2522.** $v_0T+\frac{a}{2}T^2$. **2523.** $\frac{4}{15}\pi\delta\omega^2R^5$. **2524.** 引

力在坐标轴上的射影 $X=0, y=-\frac{2km\mu_0}{a}$, 其中 k 为引力常数. **2525.** $2\pi km\delta_0\left(1-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$, 其中 k 为引力常数. **2526.** 大约 3 小时. **2527.** 容器应当是把曲线 $y=Cx^4$ 环绕 Oy 轴旋转所成的曲面围成的. **2528.** $Q=Q_0\cdot 2^{-\frac{t}{1600}}$. **2529.** 99.99%. **2530.** $\frac{\rho g H^2}{6E}$. 表中的值给出定积分近似计算出的答案. **2531.** −6.283 2. **2532.** 0.693 15. **2533.** 0.835 66. **2534.** 1.467 5. **2535.** 17.333. **2536.** 5.402 4. **2537.** 1.370 39. **2538.** 1.229 3. **2539.** 0.915 966. **2540.** 3.141 59. **2541.** 1.463. **2542.** 0.317 9. **2543.** 0.886 2. **2544.** 51.04. **2545.**

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

第五章

2546. $\frac{2}{3}$. **2547.** $\frac{3}{2}$. **2548.** 3. **2549.** 1. **2550.** $\frac{1}{3}$. **2551.** (a) $\frac{q\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}$; (b) $\frac{q\cos\alpha-q^2}{1-2q\cos\alpha+q^2}$. **2552.** $1-\sqrt{2}$. **2553.** 仅当 $x=k\pi$(k 为整数) 时收敛. **2556.** 发散. **2557.** 发散. **2558.** 收敛. **2559.** 发散. **2560.** 发散. **2561.** 发散. **2562.** 收敛. **2563.** 收敛. **2564.** 发散. **2566.** 可能收敛, 也可能发散. **2567.** (a) 可能收敛, 也可能发散; (b) 发散. **2578.** 收敛. **2579.** 收敛. **2580.** 收敛. **2581.** (a) 收敛; (b) 发散. **2582.** 收敛. **2583.** 收敛. **2584.** 收敛. **2585.** (a) 收敛; (b) 收敛; (c) 对任意的 α 和 x 都收敛. **2586.** 收敛. **2587.** 发散. **2588.** 发散. **2589.** (a) 收敛; (b) 收敛; (c) 收敛; (d) 收敛. **2591.2.** $n\geqslant 13$. **2595.** 收敛. **2596.** 收敛. **2597.** (a) 收敛; (b) 发散. **2598.** 当 $p>2$ 时收敛. **2599.** 当 $\frac{b-a}{d}>1$ 时收敛. **2600.** 当 $p>\frac{3}{2}$ 时收敛. **2601.** 收敛. **2602.** 当 $p+q>1$ 时收敛. **2603.** 当 $q>p$ 时收敛. **2604.** 当 $\frac{p}{2}+q>1$ 时收敛. **2605.** 当 $\alpha(q-p)>1$ 时收敛. **2607.** 当$q>p+1$ 时收敛. **2608.** 当 $p>0$ 时收敛. **2609.** 当 $p>0$ 时收敛. **2610.** 当 $p>\frac{1}{2}$ 时收敛. **2611.** 当 $b\neq 1$ 时收敛. **2612.** 当 $p>1$ 时收敛. **2613.** (a) 发散; (b) 发散. **2616.** 当$x<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 收敛. **2617.** 收敛. **2618.** 发散. **2619.** (a) 当 $p>1$ 时收敛; (b) 当 $p>1, q$ 为任意数时, 以及当 $p=1, q>1$ 时均收敛. **2620.** (a) 发散; (b) 收敛; (c) 发散. **2621.** 收敛. **2623.** 1.20. **2626.** 当 $\alpha>\frac{1}{2}$ 时收敛. **2627.** 当 $a=\frac{1}{2}$ 时收敛. **2628.** 发散. **2629.** 收敛. **2630.** 当 $a>2$ 时收敛. **2631.** 收敛. **2632.** 收敛. **2633.** 收敛. **2634.** 当 $c=0, \frac{a}{d}<-1$ 时收敛. **2635.** 发散. **2636.** 当 $\alpha\neq 0$ 时收敛. **2637.** 收敛. **2638.** 发散. **2639.** 收敛. **2640.** 当 $a=\sqrt{bc}$ 时收敛. **2641.** 收敛, 其中 $a<-1$. **2642.** 收敛, 其中 $\alpha>\frac{1}{2}$. **2643.** 当$a^b>\mathrm{e}, c=0$ 时, 以及当 $a^c>1$ 时均收敛. **2644.** 当 $a+b>1$ 时收敛. **2645.** 收敛. **2646.** 收敛. **2647.** 收敛. **2648.** 发散. **2649.** 收敛. **2650.** 收敛. **2651.** 收敛. **2652.** 当 $\alpha>2$ 时收敛. **2653.** 收敛. **2654.** 收敛. **2655.** (a) $N>100\,000$; (b) $N\geqslant 12$; (c) $N>4$. **2659.** $\frac{2}{9}$. **2660.** $1\frac{3}{7}$. **2661.** $\ln 2$. **2662.** (a) $\frac{3}{2}\ln 2$; (b) $\frac{1}{2}\ln 2$. **2664.** 收敛. **2665.** (a) 收敛; (b) 收敛. **2666.** 不能得到. **2667.** 收敛. **2668.** 收敛. **2669.** 收敛. **2670.** 发散. **2671.** 收敛. **2672.** 收敛. **2673.** (a) 发散; (b) 收敛. **2675.** 当 $p>1$ 时绝对收敛; 当 $0<p\leqslant 1$ 时条件收敛. **2676.** 当 $p>1$ 时绝对收敛; 当 $0<p\leqslant 1$ 时条件收敛. **2677.** 当 $p>1$ 时绝对收敛; 当 $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$ 时条件收敛. **2678.** 当 $|x-\pi k|<\frac{\pi}{4}$ (k 为整数) 时绝对收

敛; 当 $x=\pi k\pm\frac{\pi}{4}$ 时条件收敛. **2679.** 当 x 不为任意负整数时条件收敛. **2680.** 当 $p>1$ 时绝对收敛; 当 $0<p\leqslant 1$ 时条件收敛. **2681.** 当 $p>2$ 时绝对收敛; 当 $1<p\leqslant 2$ 时条件收敛. **2682.** 当 $p>1$ 时绝对收敛; 当 $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$ 时条件收敛. **2683.** 条件收敛. **2684.** 绝对收敛. **2685.** 发散. **2686.** 条件收敛. **2687.** 当 $p>1$ 时绝对收敛; 当 $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$ 时条件收敛. **2688.** 发散. **2689.** 当 $p>2$ 时绝对收敛; 当 $0<p\leqslant 2$ 时条件收敛. **2690.** 收敛. **2691.** 发散. **2692.** 当 $q>p+1$ 时绝对收敛; 当 $p<q\leqslant p+1$ 时条件收敛. **2693.** 当 $p>1, q>1$ 时绝对收敛; 当 $0<p=q\leqslant 1$ 时条件收敛. **2694.** 当 $p>1$ 时绝对收敛; 当 $p=1$ 时条件收敛. **2695.** (a) 当 $p>1$ 时绝对收敛; 当 $p=1$ 时条件收敛; (b) 当 $p>1, q>1$ 时绝对收敛; 当 $0<p=q\leqslant 1$ 时条件收敛. **2697.** (a) $p>1$; (b) $0<p\leqslant 1$. **2698.** (a) 收敛; (b) 收敛; (c) 收敛. **2699.** (a) $q>p+1$; (b) $p<q\leqslant p+1$. **2700.** 当 $m\geqslant 0$ 时绝对收敛; 当 $-1<m<0$ 时条件收敛. **2703.** (a) $n\geqslant 1\,000\,000$; (b) $n\geqslant 1.32\cdot 10^{16}$. **2706.** (a) 发散; (b) 可能收敛, 也可能发散. **2707.** $\frac{2}{3}$. **2708.** $\frac{3}{4}$. **2709.** $-\frac{2}{7}$. **2710.** $\frac{1+y}{1-xy}$. **2716.** 当 $|x|>1$ 时绝对收敛. **2717.** 当 $x>0$ 时绝对收敛; 当 $x=0$ 时条件收敛. **2718.** 当 $x>-\frac{1}{3}$ 和 $x<-1$ 时绝对收敛. **2719.** 当 $|x|\neq 1$ 时绝对收敛, 当 $x=-1$ 时条件收敛. **2720.** 当 $-\frac{\sqrt{17}-3}{6}<x<\frac{1}{3}$ 和 $\frac{2}{3}<x<\frac{\sqrt{17}+3}{6}$ 时绝对收敛. **2721.** 当 $|x-\pi k|\leqslant\frac{\pi}{6}$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 时绝对收敛. **2722.** 当 $p>1$ 和 $x\neq k$ $(k=-1,-2,\cdots)$ 时绝对收敛, 当 $0<p\leqslant 1, x\neq k$ 时条件收敛. **2723.** 当 $q>p+1$ 时绝对收敛, 当 $p<q\leqslant p+1$ 时条件收敛. **2724.** 当 $|x|<1$ 时绝对收敛. **2725.** 当 $|x|<1$ 时绝对收敛. **2726.** 当 $|x|\neq 1$ 时绝对收敛. **2727.** 当 $x\neq -1$ 时绝对收敛. **2728.** 当 $x>0$ 时绝对收敛. **2729.** 当 $0<|x|<+\infty$ 时绝对收敛, 其中 $|a|>1$; 而当 $|a|\leqslant 1$ 或 $x=0$ 时发散. **2730.** 当 $x=2$ 和 $x>\mathrm{e}$ 时绝对收敛. **2731.** 当 $x>1$ 时绝对收敛. **2732.** 当 $0<\min(x,y)<1$ 时收敛. **2733.** 当 $|x|<1, 0\leqslant y<+\infty$ 和 $|x|>1, y>|x|$ 时绝对收敛; 当 $x=-1, 0\leqslant y\leqslant 1$ 时条件收敛. **2734.** 当 $\max(|x|,|y|)<1$ 时绝对收敛. **2735.** 绝对收敛域为: (1) $0\leqslant x<1, -\infty<y<+\infty$; (2) $x=1, y>1$; (3) $x>1, y>2$. **2736.** 当 $|x-k\pi|<\frac{\pi}{4}$ 时绝对收敛, 其中 k 为整数. **2738.** $\frac{1}{2}<|x|<2$; $\frac{6x(x^2-1)}{(2-x)^2(2x-1)^2}$. **2739.** (a) 当$x\geqslant 0$ 时绝对收敛, 当 $-1<x<0$ 时条件收敛; (b) 当 $p+x>0$ 和 $x=0,1,2,\cdots$ 时绝对收敛, 当 $-1<p+x\leqslant 0$ 时条件收敛; (c) 绝对收敛域为: (1) $|x|<1, y$ 为任意数; (2) $x=\pm 1, y>\frac{1}{2}$; (3) x 为任意数, $y=0,1,2,\cdots$; 当 $x=1, -\frac{1}{2}<y<\frac{1}{2}$ 时条件收敛. **2743.** 当 $\varepsilon=0.001, x=\sqrt[m]{0.1}$ 时 $N\geqslant 3m$. 非一致收敛. **2744.** $n>\frac{1}{\varepsilon}$. **2745.** $n\geqslant 39$. **2746.** (a) 一致收敛; (b) 非一致收敛. **2747.** 一致收敛. **2748.** 非一致收敛. **2749.** 一致收敛. **2750.** 一致收敛. **2751.** (a) 一致收敛; (b) 非一致收敛; (c) 一致收敛. **2752.** (a) 非一致收敛; (b) 一致收敛. **2753.** 一致收敛. **2754.** 非一致收敛. **2755.** (a) 一致收敛; (b) 非一致收敛. **2756.** (a) 非一致收敛; (b) 一致收敛. **2757.** 非一致收敛. **2758.** (a) 一致收敛; (b) 非一致收敛. **2759.** 一致收敛. **2760.** (a) 一致收敛; (b) 非一致收敛. **2761.** 一致收敛. **2762.** 一致收敛. **2763.** 不一致收敛. **2767.** (a) 一致收敛; (b) 非一致收敛. **2768.** (a) 一致收敛. (b) 非一致收敛. **2769.** 非一致收敛. **2770.** 一致收敛. **2771.** 非一致收敛. **2772.** 一致收敛. **2773.** (a) 非一致收敛; (b) 一致收敛. **2775.** (a) 一致收敛; (b) 非一致收敛. **2776.** 非一致收敛. **2777.** 一致收敛. **2778.** 一致收敛. **2779.** 一致收敛. **2780.** 一致收敛. **2781.** 一致收敛. **2782.** 一致收敛. **2783.** 能. **2785.** 不一定. **2795.** (a) 当 $|x|<1$ 时存在且连续; (b) 当 $|x|<+\infty$ 时存在且连续; (c) 当 $|x|<+\infty$ 时存在, 当 $x=0$ 时不连续. **2799.** (a)

当 $x \neq -k$ $(k = 1,2,3,\cdots)$ 时存在且可微; (b) 当 $|x| < +\infty$ 时存在, 除 $x = 0$ 外处处可微. **2802.** (a) α 为任意数; (b) $\alpha < 1$; (c) $\alpha < 2$. **2805.** 不合理. **2806.** $\frac{1}{2}\ln 2$. **2807.** 1. **2808.** (a) 1; (b) $\frac{\pi^2}{6}$. **2809.** 合理. **2810.** 合理. **2811.** (b) 不一定. **2812.** $R = 1; (-1,1)$. 在 $x = -1$ 处, 当 $p > 1$ 时绝对收敛, 而当 $0 < p \leqslant 1$ 时条件收敛; 在 $x = 1$ 处, 当 $p > 1$ 时绝对收敛, 而当 $p \leqslant 1$ 时发散. **2813.** $R = \frac{1}{3}; \left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. 在 $x = -\frac{4}{3}$ 处条件收敛, 在 $x = -\frac{2}{3}$ 处发散. **2814.** $R = 4; (-4,4)$. 在 $x = \pm 4$ 处发散. **2815.** $R = +\infty; (-\infty, +\infty)$. **2816.** $R = \frac{1}{\mathrm{e}}; \left(-\frac{1}{\mathrm{e}}, \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$. 在 $x = \pm\frac{1}{\mathrm{e}}$ 处发散. **2817.** $R = +\infty; (-\infty, +\infty)$. **2818.** $R = 2; (-1,3)$. 在 $x = -1$ 处, 当 $p > 2$ 时绝对收敛, 当 $0 < p \leqslant 2$ 时条件收敛; 在 $x = 3$ 处, 当 $p > 2$ 时绝对收敛, 当 $p \leqslant 2$ 时发散. **2819.** $R = 2^p; (-2^p, 2^p)$. 在 $x = -2^p$ 处, 当 $p > 2$ 时绝对收敛, 当 $p \leqslant 2$ 时发散; 在 $x = 2^p$ 处, 当 $p > 2$ 时绝对收敛, 当 $0 < p \leqslant 2$ 时条件收敛. **2820.** $R = 1; (-1,1)$. 在 $x = -1$ 处, 当 $m \geqslant 0$ 时绝对收敛, 当 $m < 0$ 时发散; 在 $x = 1$ 处, 当 $m \geqslant 0$ 时绝对收敛, 当 $-1 < m < 0$ 时条件收敛. **2821.** $R = \min\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right); (-R, R)$. 在 $x = -R$ 处, 当 $a \geqslant b$ 时条件收敛; 当 $a < b$ 时绝对收敛; 在 $x = R$ 处, 当 $a \geqslant b$ 时发散, 当 $a < b$ 时绝对收敛. **2822.** $R = \max(a,b); (-R,R)$. 在 $x = \pm R$ 处发散. **2823.** $R = 1; (-1,1)$. 在 $x = \mp 1$ 处, 当 $a > 1$ 时绝对收敛; 当 $a \leqslant 1$ 时发散. **2824.** $R = 1; (-1,1)$. 在 $x = \pm 1$ 处绝对收敛. **2825.** $R = 1; (-1,1)$. 在 $x = -1$ 处条件收敛; 在 $x = 1$ 处发散. **2826.** $R = 1; (-1,1)$. 在 $x = -1$ 处发散; 在 $x = 1$ 处条件收敛. **2827.** $R = 1; (-1,1)$. 在 $x = \pm 1$ 处发散. **2828.** $R = \frac{1}{4}; \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. 在 $x = \pm\frac{1}{4}$ 处发散. **2829.** $R = \frac{1}{3}; \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. 在 $x = \pm\frac{1}{3}$ 处发散. **2830.** $R = 1; (-1,1)$. 在 $x = \pm 1$ 处绝对收敛. **2831.** (a) $R = 1; (-1,1)$. 当 $x = \pm 1$ 时条件收敛; (b) 当 $0 < x < 2$ 时绝对收敛, 当 $x = 2$ 时条件收敛; (c) 仅当 $x = 0$ 时收敛. **2832.** $R = 1; (-1,1)$. 在 $x = -1$ 处, 当 $\gamma - \alpha - \beta > 0$ 时绝对收敛, 当 $-1 < \gamma - \alpha - \beta \leqslant 0$ 时条件收敛; 在 $x = 1$ 处, 当 $\gamma - \alpha - \beta > 0$ 时绝对收敛, 当 $\gamma - \alpha - \beta \leqslant 0$ 时发散. **2833.** $x > 0$. **2834.** $|x| > \frac{1}{2}$. **2835.** $0 < |x| < +\infty$. **2836.** $x > -1$. **2837.** $|x - k\pi| < \frac{\pi}{4}$, 其中 k 为整数. **2838.** $-1+3(x+1)-3(x+1)^2+(x+1)^3$. **2839.** (a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}}$ $(|x| < |a|)$; (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-b)^n}{(a-b)^{n+1}}$ $(|x-b| < |a-b|)$; (c) $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{x^{n+1}}$ $(|x| > |a|)$. **2840.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$ $(0 < x \leqslant 2); \ln 2$. **2841.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} (|x| < +\infty)$. **2842.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $(|x| < +\infty)$. **2843.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$ $(|x| < +\infty)$. **2844.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n a}{n!} x^n$ $(|x| < +\infty)$. **2845.** $\mu x + \frac{\mu(1^2-\mu^2)}{3!} x^3 + \frac{\mu(1-\mu^2)(3^2-\mu^2)}{5!} x^5 + \cdots$ $(|x| < 1)$. **2846.** $1 - \frac{\mu^2}{2!} x^2 - \frac{\mu^2(2^2-\mu^2)}{4!} x^4 - \cdots$ $(|x| < 1)$. **2847.** $1 + (x-1) + (x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{2} + \cdots$ $(0 < x < 2)$. **2848.** $\mathrm{e}\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24} x^2 - \frac{7}{16} x^3 + \cdots\right)$ $(|x| < 1)$. **2849.** $\sin(x+h) = \sin x + h\cos x - \frac{h^2}{2!} \sin x - \frac{h^3}{3!} \cos x + \cdots$ $(|h| < +\infty); \cos(x+h) = \cos x - h\sin x - \frac{h^2}{2!} \cos x + \frac{h^3}{3!} \sin x + \cdots$ $(|h| < +\infty)$. **2850.1.** (a) $(-2,2)$; (b) $(3,7)$. **2850.2.** 不存在. **2851.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} (|x| < +\infty)$. **2852.** $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$ $(|x| < +\infty)$. **2853.** $\frac{3}{4} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^{2n-1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ $(|x| < +\infty)$. **2854.** $\sum\limits_{n=10}^{\infty} x^n$ $(|x| < 1)$. **2855.** $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$ $(|x| < 1)$. **2856.** $x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} x^{n+1}$ $\left(-\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{1}{2}\right)$. **2857.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} (|x| < 1)$. **2858.** $\frac{1}{3} \sum\limits_{n=1}^{\infty} [1 - (-2)^n] x^n$ $\left(|x| < \frac{1}{2}\right)$. **2859.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{6^n}\right] x^n$ $(|x| < 1)$.

2860. $\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[n+\frac{1-(-1)^n}{2}\right]x^n$ $(|x|<1)$. **2861.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 其中 $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1}+(-1)^n\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1}\right]$ (斐波那契数), $x\in\left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$. **2862.** (a) $\frac{2}{\sqrt{3}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n\sin\frac{2\pi(n+1)}{3}$ $(|x|<1)$; (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$, 其中当 $n=4k$ 时 $c_n=1$; 当 $n=4k+1$ 时 $c_n=-1$; 当 $n=4k+2$ 或者 $n=4k+3$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时 $c_n=0$. $f^{(1000)}(0)=1000!$. **2863.** $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\cos n\alpha$ $(|x|<1)$. **2864.** $\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sin n\alpha$ $(|x|<1)$. **2865.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n\sinh n\alpha$ $(|x|<\mathrm{e}^{-|\alpha|})$. **2866.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}x^{2n}(|x|<1)$. **2867.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}+[1+(-1)^n](-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}}{n}x^n$ $(-1<x\leqslant1)$. **2868.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n!}x^n(|x|<+\infty)$. **2869.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x|\leqslant1)$; $\frac{\pi}{4}$. **2870.** $x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x|\leqslant1)$. **2871.** $x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right\}$ $(|x|\leqslant1)$. **2872.** $-2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n}x^n$ $(|x|<1)$. **2873.** (a) $x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ $(-1\leqslant x\leqslant1)$; (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ $(-1<x<1)$; (c) $\arctan 2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2^{2n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$ $\left(-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right)$; (d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left\{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{x^{2n+1}}{2^n(2n+1)}\right\}$ $(|x|\leqslant\sqrt{2})$; (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$ $(|x|\leqslant1)$; (f) 当 $0\leqslant x\leqslant1,-1\leqslant x\leqslant0$ 时 $2|x|\left\{1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n}}{2n+1}\right\}$; (g) $1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\frac{x^{2n+2}}{2n+1}\right\}$ $(|x|\leqslant1)$; (h) $-1+\frac{x^2}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{x^{2n+2}}{2n+1}(|x|\leqslant1)$. **2874.** (a) $\mathrm{e}^{x^2}\left[(2x)^n+\frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4}+\cdots\right]$; (b) $\frac{(-1)^n}{x^{2n}}\mathrm{e}^{\frac{a}{x}}\left[a^n+\frac{n(n-1)}{1!}a^{n-1}x+\frac{n(n-1)(n-2)}{2!}a^{n-2}x^2+\cdots\right]$; (c) $(-1)^n\frac{n!}{(1+x^2)^n}\left[\frac{1}{3}x^{n-1}+\frac{1}{5}(n-1)x^{n-2}+\cdots\right]$. **2875.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(x+1)^{2n}(-2\leqslant x\leqslant0)$. **2876.** $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}$ $(|x|>1)$. **2877.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}$ $(x>0)$. **2878.** $\frac{x}{1+x}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{n+1}$ $\left(x\geqslant-\frac{1}{2}\right)$. **2881.** $1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{24}x^3-\cdots$ $(|x|<1)$. **2882.** $1+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{n!}x^n$ $(|x|<+\infty)$. **2883.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n)!}-\frac{2}{(2n-2)!}+\frac{1}{(2n-4)!}\right]x^n(|x|<+\infty)$, 其中 $0!=1,(-1)!=\infty,(-2)!=\infty$, 等等. **2884.** $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}(-1\leqslant x<1)$. **2885.** $x+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}(|x|\leqslant1)$. **2886.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n(|x|<+\infty)$. **2887.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n(|x|<+\infty)$. **2888.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n\right\}(-1<x<1)$. **2889.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)\frac{x^n}{n}$ $(|x|\leqslant1)$. **2890.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!}x^{2n}(|x|\leqslant1)$. **2891.** $x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\cdots$ $\left(|x|<\frac{\pi}{2}\right)$. **2892.** $x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\cdots$ $\left(|x|<\frac{\pi}{2}\right)$. **2893.** $-\frac{1}{3}x-\frac{1}{45}x^3-\frac{2}{945}x^5-\cdots$ $(|x|<\pi)$. **2894.** $E_0=1$, $\sum\limits_{k=0}^{n}\left\{(-1)^k\frac{E_{n-k}}{(2k)!(2n-2k)!}\right\}=0, n=1,2,\cdots$. **2895.** $P_0(t)=1$; $P_n(t)=\frac{(2n-1)!!}{n!}\left[t^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}t^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot4\cdot(2n-1)(2n-3)}t^{n-4}-\cdots\right](n\geqslant1)$ (勒让德多项式). **2896.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}s_nx^n$, 其中 $s_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k, x\in(-1,1)$. **2897.** (a) $R\geqslant\min(R_1,R_2)$; (b) $R\geqslant R_1R_2$. **2901.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$

$(|x| < +\infty)$. **2902.** $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ $(|x| \leqslant 1)$. **2903.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$ $(|x| < +\infty)$. **2904.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$ $(|x| \leqslant 1)$. **2905.** $x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{36} + \frac{x^4}{96} - \cdots$ $(|x| < 1)$. **2906.** $\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ $(|x| < 1)$. **2907.** $\arctan x$ $(|x| \leqslant 1)$. **2908.** $\cosh x (|x| < +\infty)$. **2909.** $1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x)$ $(0 < |x| < 1)$. **2910.** $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ $(-1 \leqslant x < 1)$. **2911.** $\frac{x}{(1-x)^2}$ $(|x| < 1)$. **2912.** $\frac{x(1-x)}{(1-x)^3}$ $(|x| < 1)$. **2913.** $\frac{2x}{(1-x)^3}$ $(|x| < 1)$. **2916.** $R = 2; (x-1)^2 + (y-1)^2 < 4$. **2917.** $R = \frac{1}{\sqrt{2}}; x^2 + y^2 < \frac{1}{2}$. **2918.** $R = 1; x^2 + y^2 < 1$. **2919.** $R = 1; x^2 + y^2 < 1$. **2920.** $R = \left|2 \sin \frac{\alpha}{2}\right|; (x - \cos\alpha)^2 + (y - \sin\alpha)^2 < 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$. **2921.** 2.080, $|R_3| < 0.001$. **2922.** (a) $0.876\,06 = \text{arc}\, 50°11'40''$; (b) 1.995 27; (c) 0.606 53; (d) 0.223 14. **2923.** 0.309 02. **2924.** 0.999 848. **2925.** 0.158. **2926.** 2.718 282. **2927.** 0.182 3. **2928.** 3.141 6. **2929.** 3.142. **2930.** 3.141 592 654. **2931.** $\ln 2 = 0.693\,15; \ln 3 = 1.098\,61$. **2932.** (a) 0.747; (b) 2.835; (c) 1.605; (d) 0.905; (e) 1.057; (f) 0.119; (g) 0.337; (h) 0.927; (i) 8.041; (j) 0.488; (k) 0.507; (l) 0.783. **2933.** 3.82. **2934.** 4.84. **2935.** 20.02 m. **2936.** $\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$. **2937.** 傅里叶级数就是多项式 $P_n(x)$. **2938.** $\frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}; \frac{\pi}{4}$. **2939.** $\frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1)\frac{\pi x}{l}$. **2940.** $2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$. **2941.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$. **2942.** $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$. **2943.** $\frac{(b-a)\pi}{4} + \frac{2(a-b)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)} + (a+b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$. **2944.** $\frac{2}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx$. **2945.** $\frac{2\sin \pi a}{\pi} \left[\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{a \cos nx}{n^2 - a^2}\right]$. **2946.** $\frac{2 \sin \pi a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n \sin nx}{n^2 - a^2}$. **2947.** $\frac{2 \sinh \pi a}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n \sin nx}{n^2 + a^2}$. **2948.** $2 \sinh ah \left[\frac{1}{2ah} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{ah \cos \frac{n\pi x}{h} - \pi n \sin \frac{n\pi x}{h}}{(ah)^2 + (\pi n)^2}\right]$. **2949.** $a + l + \frac{2l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{n\pi a}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} - \cos \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}\right)$ $(a < x < a + 2l)$. **2950.** $1 - \frac{1}{2}\cos x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - 1} \cos nx$. **2951.** $\frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{(4n^2-1)^2} \sin 2nx$. **2952.** $\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{(-1)^k \frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}\right\}$. **2953.** $\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin(2k+1)x$. **2954.** $\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$. **2955.** $\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi nx}{n}$ ($x \neq$ 整数). **2956.** $\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2\pi(2n+1)x}{(2n+1)^2}$. **2957.** $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1}$. **2958.** $\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1} \cos 2kx$. **2959.** $\frac{\alpha}{1-\alpha^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha^2} \cos nx$. **2960.** $\frac{4}{\pi} \ln(1 + \sqrt{2}) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{8}{\pi} \ln(1+\sqrt{2}) - \frac{16\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(4k-3)(4k-1)}\right] \cos 4nx \left(-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}\right)$. **2961.** (a) $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx (-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$; (b) $2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx - \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3} (0 \leqslant x < \pi)$; (c) $\frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ $(0 < x < 2\pi)$; $\frac{\pi^2}{6}, \frac{\pi^2}{12}, \frac{\pi^2}{8}$. **2962.** $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$; $x^3 = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} + 12 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n^3}$; $x^4 = \frac{1}{5}\pi^4 + 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} + 48 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} \cos nx$. **2963.** $\frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}; \frac{\pi^2 - 3\pi\alpha + 3\alpha^2}{6}$. **2964.** $\frac{2}{3} - \frac{9}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{2\pi nx}{3} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi nx}{n^2}$ $(0 \leqslant x \leqslant 3)$. **2965.** $\frac{1}{2^{2m}} C_{2m}^m + \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{k=1}^{m} C_{2m}^{m-k} \cos 2kx$. **2966.** $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx$ $(|q| < 1)$. **2967.** $1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos nx$ $(|q| < 1)$. **2968.** $\sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos nx$. **2969.** $-2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \cos nx$.

2970. $-\ln 2-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$. **2971.** $-\ln 2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{n}$. **2972.** $-2\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}$. **2973.** $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^2}$. **2974.** $x(s)=\frac{a}{2}-\frac{4a}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cdot\cos\frac{(2k+1)\pi s}{2a}+\frac{4a}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cdot\sin\frac{(2k+1)\pi s}{2a}$; $y(s)=\frac{a}{2}-\frac{4a}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi s}{2a}+\frac{4a}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi s}{2a}$. **2975.** $f(-x)=f(x); f(\pi-x)=-f(x)$. **2976.** $f(-x)=-f(x); f(\pi-x)=f(x)$. **2977.** (a) $-\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{2}{(2k+1)^2}-\frac{8}{\pi}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}\right]\cos(2k+1)x\right\}\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$; (b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{2(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}+\frac{8}{\pi}\frac{1}{(2k+1)^3}\right]\sin(2k+1)x\right\}\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$. **2978.** $a_{2n}=0\ (n=0,1,2,\cdots), b_{2n}=0\ (n=1,2,\cdots)$. **2979.** $a_{2n-1}=b_{2n-1}=0\ (n=1,2,3,\cdots)$. **2980.** (a) $a_n=0, b_{2k-1}=0$; (b) $a_n=0, b_{2k}=0$. **2981.** $\alpha_n=a_n, \beta_n=-b_n$. **2982.** $\alpha_n=-a_n, \beta_n=b_n$. **2983.** $\overline{a}_n=a_n\cos nh+b_n\sin nh, \overline{b}_n=b_n\cos nh-a_n\sin nh$. **2984.** $A_0=a_0, A_n=a_n\frac{\sin nh}{nh}, B_n=b_n\frac{\sin nh}{nh}\ (n=1,2,\cdots)$. **2985.** $A_0=a_0^2, A_n=a_n^2+b_n^2; B_n=0(n=1,2,\cdots)$. **2986.** $\frac{1}{2}$. **2987.** $\frac{1}{4}$. **2988.** $2\ln 2-1$. **2989.** $\frac{1}{4}$. **2990.** $\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)$. **2991.** $\ln 2-\frac{1}{2}$. **2992.** $\frac{3}{4}$. **2993.** 1. **2994.** $2(1-\ln 2)$. **2995.** $2\mathrm{e}$. **2996.** $3\mathrm{e}^2$. **2997.** $\frac{\pi^2}{3}-3$. **2998.** $\frac{\pi^2}{4}-\frac{39}{16}$. **2999.** $\frac{1}{2}(\cos 1-\sin 1)$. **3000.** $\frac{1}{3}\left(2\ln 2-\frac{5}{6}\right)$. **3001.** $\mathrm{e}^x(\alpha_m x^m+\alpha_{m-1}x^{m-1}+\cdots+\alpha_0)$, 其中系数 $\alpha_k\ (k=0,1,\cdots,m)$ 由等式 $P(n)=\alpha_m n(n-1)\cdots(n-m+1)+\alpha_{m-1}n(n-1)\cdots(n-m+2)+\cdots+\alpha_1 n+\alpha_0$ 所确定. **3002.** $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+1\right)$. **3003.** $\left(x^2+x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{x}$. **3004.** $\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\cos x-\frac{x}{2}\sin x$. **3005.** 当 $x>0$ 时 $\frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\sinh\sqrt{x}-\cosh\sqrt{x}\right)$; 当 $x<0$ 时 $\frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\sin\sqrt{|x|}-\cos\sqrt{|x|}\right)$; 当 $x=0$ 时级数和为 0. **3006.** $\ln\frac{1}{1-x}$. **3007.** $2x\arctan x-\ln(1+x^2)\ (|x|\leqslant 1)$. **3008.** $\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}\ (|x|<1)$. **3009.** $(1-x)^{-\frac{a}{d}}-1\ (|x|<1)$. **3010.** $\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}-1$. **3011.** $\frac{1+x}{(1-x)^3}(|x|<1)$. **3012.** $\frac{x(3-x)}{(1-x)^3}\ (|x|<1)$. **3013.** $(1+2x^2)\mathrm{e}^{x^2}$. **3014.** $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\ln 2$. **3015.** $\frac{\pi}{4}$. **3016.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **3017.** $\frac{\pi}{2}$. **3018.** $\frac{\pi-x}{2}\ (0<x<2\pi)$. **3019.** $-\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|\ (0<x<2\pi)$. **3020.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin\frac{x+\alpha}{2}}{\sin\frac{x-\alpha}{2}}\right|$. **3021.** 当 $0<x<2\alpha$ 时 $\frac{\pi}{4}$; 当 $2\alpha<x<2\pi-2\alpha$ 时 0; 当 $2\pi-2\alpha<x<2\pi$ 时 $-\frac{\pi}{4}$. **3022.** $\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}x\ (|x|<\pi)$. **3023.** $\frac{1}{2}\left(1-\frac{\cos x}{2}\right)-\frac{x}{2}\sin x\ (|x|<\pi)$. **3024.** $\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}|x|\ (|x|\leqslant\pi)$. **3025.** $\frac{x}{2}(1+\cos x)-\sin x\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)(|x|<\pi)$. **3026.** $\mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x)(|x|<+\infty)$. **3027.** $x=i\pi, y=j\pi\ (i,j=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. **3028.** $2(\arcsin x)^2\ (|x|\leqslant 1)$. **3029.** 当 $x\geqslant 0$ 时 $\frac{4}{4-x}+\frac{4\sqrt{x}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}}\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}$; 当 $x<0$ 时 $\frac{4}{4-x}-\frac{4\sqrt{|x|}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}}\ln\frac{\sqrt{|x|}+\sqrt{4-x}}{2}$. **3030.** $\frac{1}{x-1}$. **3031.** $\frac{a_1}{x}$. **3032.** (a) $\frac{x}{1-x}$; (b) $\frac{1}{1-x}$. **3033.** (a) $\frac{x^2}{(1-x)^2}$; (b) $\frac{x}{(x-1)^2}$. **3034.** 1. **3035.** $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{(2n+1)^2}$. **3036.** $\frac{\pi^2}{12}$. **3037.** $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(p+nq)}$. **3038.** $2-\frac{\pi^2}{6}$. **3039.** $\frac{1}{24}$. **3040.** $\frac{\pi^2}{12}$. **3041.** $F(k)=\frac{\pi}{2}\left\{1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2k^{2n}\right\}$. **3042.** $E(k)=\frac{\pi}{2}\left\{1-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\frac{k^{2n}}{2n-1}\right\}$. **3043.** $2\pi a\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2-\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\cdot\frac{\varepsilon^4}{3}-\cdots\right]$, 其中 ε 为椭圆的离心率. **3047.** $\frac{2\pi a^n}{n!}$. **3048.** 当 $\alpha=-1$ 时为 ∞; 当 $\alpha=0$ 时为 π; 当 $|\alpha|<1\ (\alpha\neq 0)$ 时为 $\frac{\pi}{\alpha}\ln(1+\alpha)$; 当 $|\alpha|>1$ 时 $\frac{\pi}{\alpha}\ln\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$. **3049.** 当 $|\alpha|\leqslant 1$ 时 0; 当 $|\alpha|>1$ 时 $\pi\ln\alpha^2$. **3050.** $2\cdot 10^{-6}$. **3061.** $\frac{1}{4}$. **3062.** 2. **3063.** $\frac{3}{7}$. **3064.** $a^{-\ln 2}$. **3065.** (a) 不能; (b) 能; (c) 能; (d) 能. **3066.** 发散于 0. **3067.** 收敛. **3068.** 当 $p>1$ 时收敛. **3069.** 发散于 0. **3070.** 对任意 p 均收

敛. **3071.** 当 $a_1 = a$ 时收敛. **3072.** 当 $\sum\limits_{i=1}^{p} a_i = \sum\limits_{i=1}^{p} b_i$ 时收敛. **3073.** 发散于 0. **3074.** 收敛. **3075.** 收敛. **3076.** 收敛. **3077.** 对任意 x 均收敛. **3078.** 对任意 x 均收敛. **3079.** 当 $|x| < 1$ 时收敛. **3080.** 当 $|x| < 2$ 时收敛. **3081.** 当 $|x| > \mathrm{e}$ 时收敛. **3082.** 对任意 x 均收敛. **3083.** 当 $|x| < 1, p$ 为任意数, 以及 $x = \pm 1, p > 1, q > \frac{1}{2}$ 时收敛. **3084.** 对任意 x 和 p 均收敛. **3085.** 发散. **3088.** 条件收敛. **3089.** 发散. **3090.** 当 $p > 1$ 时绝对收敛; 当 $\frac{1}{2} < p \leqslant 1$ 时条件收敛. **3091.** 发散. **3092.** 发散. **3093.** 发散. **3094.** 条件收敛. **3095.** 条件收敛. **3096.** 发散. **3097.** 当 $\alpha > 1$ 时绝对收敛; 当 $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$ 时条件收敛. **3109.** $F'(x) = F(x) \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(x)}{1+f_n(x)}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < +\infty, |f_n'(x)| < c_n \ (n = 1, 2, \cdots)$, 其中 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty$. **3111.** $157.970 + \theta \cdot 0.000\ 4 \ (0 < \theta < 1)$. **3112.** $10^{2\ 866} \cdot 7.7\left(1 + \frac{\theta}{12\ 000}\right) \ (|\theta| < 1)$. **3113.** $0.079\ 8 \cdot \left(1 + \frac{\theta}{300}\right) \ (|\theta| < 1)$. **3114.** $10^{28} \cdot 1.378\left(1 + \frac{\theta}{288}\right) \ (|\theta| < 1)$. **3115.** $10^{42} \cdot 4.792\left(1 + \frac{\theta}{120}\right) \ (|\theta| \leqslant 1)$. **3116.** $0.124\left(1 + \frac{\theta}{300}\right) \ (|\theta| < 1)$. **3117.** $0.355\left(1 + \frac{\theta}{600}\right) \ (|\theta| < 1)$. **3118.** $(2n-1)!! = \sqrt{2}(2n)^n \mathrm{e}^{-n+\frac{\theta_n}{12n}} \ (|\theta_n| < 1)$. **3119.** $\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} \mathrm{e}^{\frac{\theta_n}{6n}} \ (|\theta_n| < 1)$. **3120.** (a) 1; (b) e; (c) $\frac{\mathrm{e}}{2}$; (d) 1. **3121.** $P_3(x) = 1 - \frac{55}{21}x - \frac{1}{14}x^2 + \frac{5}{42}x^3; P_3(-1) \approx 3.43; P_3(1) = -1.57; P_3(6) \approx 8.43$. **3122.** $y = y_0 + \frac{y_1 - y_{-1}}{2h}(x - x_0) + \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{2h^2}(x - x_0)^2$. **3123.** $y = 0.808 + 0.193x - 0.001\ 01x^2$. **3124.** $\sin x^\circ \approx \frac{5x}{288}\left[1 - \left(\frac{x}{150}\right)^2\right]; \sin 20^\circ \approx 0.341; \sin 40^\circ \approx 0.645; \sin 80^\circ \approx 0.994$. **3125.** $P(x) = \frac{1}{3}(7x^2 - 4x^4)$. **3126.** $7\frac{1}{3}$. **3127.** $B_n(x) = x; B_n(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}; B_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)x^3 + \frac{3}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)x^2 + \frac{1}{n^2}x$. **3128.** $B_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} f\left(a + \frac{i}{n}l\right) \cdot \mathrm{C}_n^i \frac{(x-a)^i (b-x)^{n-i}}{l^n}$, 其中 $l = b - a$. **3129.** $B_n(x) = \frac{1}{8}(1-x)(1+x)^3 + \frac{1}{16}(1+x)^4$. **3130.** $B_{2n}(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{1-x^2}{4}\right)^n \sum\limits_{i=1}^{n} i\mathrm{C}_{2n}^{n-i}\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^i + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^i\right]$. **3131.** $B_n(x) = \mathrm{e}^{ka}\left[1 + \left(\mathrm{e}^{\frac{kl}{n}} - 1\right)\frac{x-a}{l}\right]^n$, 其中 $l = b - a$. **3132.** $B_n(x) = \frac{1}{2}\left[\left(\cos\frac{\pi}{2n} + \mathrm{i}\frac{2x}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right)^n + \left(\cos\frac{\pi}{2n} - \mathrm{i}\frac{2x}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right)^n\right]$, 其中 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. **3135.** $\sigma_{2n-1}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$.

第六章

3136. 半平面 $y \geqslant 0$. **3137.** $|x| \leqslant 1; |y| \geqslant 1$. **3138.** 圆 $x^2 + y^2 \leqslant 1$. **3139.** 圆的外部 $x^2 + y^2 > 1$. **3140.** 环 $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$. **3141.** 月形 $x \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2x$. **3142.** $-1 \leqslant x^2 + y \leqslant 1$. **3143.** 半平面 $x + y < 0$. **3144.** 一对对顶的直角 $|y| \leqslant |x| (x \neq 0)$. **3145.** 由直线 $y = 0$ 和 $y = -2x$ 所围成的一对对顶的角, 包含边界, 但不包括公共顶点 $O(0,0)$. **3146.** 由抛物线 $y^2 = x, y^2 = -x$ 和直线 $y = 2$ 所围成的曲边三角形, 不包括顶点 $O(0,0)$. **3147.** 同心环族 $2\pi k \leqslant x^2 + y^2 \leqslant \pi(2k+1) \ (k = 0, 1, 2, \cdots)$. **3148.** 圆锥 $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ 的外部, 除去顶点, 包含边界在内. **3149.** 空间四个卦限的总体. **3150.** 双叶双曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ 的内部. **3151.** 平行直线. **3152.** 同心圆. **3153.** 以 $y = \pm x$ 为公共渐近线的等轴双曲线族. **3154.** 平行直线. **3155.** 以坐标原点为顶点的直线束, 但顶点除外. **3156.** 相似椭圆族. **3157.** 位于第一、三象限内且以坐标轴为渐近线的等轴双曲线. **3158.** 两节的折线族, 其顶点位于 Oy 轴. **3159.** (a) 在 $z = 0$ 时为第一、三象限; 在 $z > 0$ 时为两节的折线族, 它的各节平行于坐标轴, 而顶点位于直线 $x + y = 0$ 上; (b) 两节折线, 各节分别平行于 Ox 轴和 Oy 轴, 并指向其正

向, 顶点位于直线 $y = x$ 上; (c) 带有公共中心 $O(0,0)$ 的正方形围线族, 其边在 $z > 0$ 时平行于 Ox 轴和 Oy 轴; 在 $z = 0$ 时退化为点 $O(0,0)$; (d) 当 $z < 0$ 时, 平行于 Ox 轴的直线; 当 $z > 0$ 时, 顶点在抛物线 $y = x^2$ 上的折线的二节, 此二节分别平行于 Ox 轴和 Oy 轴, 其中一节指向 Oy 轴的正向; 当 $z = 0$ 时, Oy 轴的正半轴. **3160.** 经过坐标原点 (不包括此原点在内) 且与 Ox 轴正交的圆束. **3161.** 曲线 $y = \frac{C}{\ln x}$. **3162.** 曲线 $y = \frac{C+x}{\ln x}$. **3163.** 圆心在 Ox 轴上且与圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 正交的圆族. **3164.** 与 Oy 轴正交且经过点 $(-a, 0), (a, 0)$ 的圆族 (不包括这两点). **3165.** 若 $z = 0$ 直线族 $x = m\pi, y = n\pi$ $(m, n = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$; 若 $z = -1$ 或 $z = 1$, 正方形族 $m\pi < x < (m+1)\pi, n\pi < y < (n+1)\pi$, 其中 $(-1)^{m+n} = z$. **3166.** 平行平面族. **3167.** 中心在坐标原点的同心球族. **3168.** 当 $u < 0$, 双叶双曲面族; 当 $u > 0$, 单叶双曲面族; 当 $u = 0$, 圆锥. **3169.** 椭圆柱族, 其公共轴为 $x + y = 0, z = 0$. **3170.** 若 $u = 0$, 同心球族 $x^2 + y^2 + z^2 = \pi n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$; 若 $u = -1$ 或 $u = 1$, 球层族 $\pi n < x^2 + y^2 + z^2 < \pi(n+1)$, 其中 $(-1)^n = u$. **3171.** 方向为 $z = f(y), x = 0$ 的圆柱面, 其母线平行于直线 $y = ax, z = 0$. **3172.** 曲线 $z = f(x), y = 0$ 绕 Oz 轴旋转所成的曲面. **3173.** 顶点在坐标原点, 方向为 $x = 1, z = f(y)$的圆锥面. **3174.** 方向为 $x = 1, z = f(y)$ 且母线平行于 Oxy 平面的曲面. **3176.** $f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f(x, y)$. **3177.** $\sqrt{1 + x^2}$. **3178.** $f(t) = 2 + t^2; z = x - 1 + \sqrt{y}$ $(x > 0)$. **3179.** $f(x) = x^2 - x; z = 2y + (x - y)^2$. **3180.** $f(x, y) = x^2 \frac{1-y}{1+y}$. **3183.2.** 不存在. **3183.3.** 0; 不能. **3184.** (a) 0, 1; (b) $\frac{1}{2}$, 1; (c) 0, 1; (d) 0, 1; (e) $1, \infty$. **3185.** 0. **3186.** 0. **3187.** a. **3188.** 0. **3189.** 0. **3190.** 1. **3191.** e. **3192.** $\ln 2$. **3193.** (a) $\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{2}$; (b) $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}$ 和 $\frac{5\pi}{4} < \varphi < \frac{7\pi}{4}$. **3194.** 间断点 $x = 0, y = 0$. **3195.** 直线 $x + y = 0$ 的所有点. **3196.** $O(0,0)$ 是无穷型间断点; 直线 $x + y = 0$ $(x \neq 0)$ 上的点为可去间断点. **3197.** 在坐标轴上的诸点. **3198.** 直线 $x = m\pi$ 和 $y = n\pi$ $(m, n = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 上的点的全体. **3199.** 圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上的点. **3200.** 坐标平面 $x = 0, y = 0$ 和 $z = 0$ 上的点. **3201.** (a, b, c). **3203.1.** 一致连续. **3203.2.** 一致连续. **3203.3.** 非一致连续. **3203.4.** 函数在 E 上连续, 但非一致连续. **3211.2.** $f'_x(x, 1) = 1$. **3212.1.** $f'_x(0,0) = 0, f'_y(0,0) = 0$; 函数在点 $O(0,0)$ 不可微. **3212.2.** 函数在点 $O(0,0)$不可微. **3212.3.** 函数在点 $O(0,0)$ 可微. **3213.** $\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 - 8xy^2, \frac{\partial u}{\partial y} = 4y^3 - 8x^2y, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 12x^2 - 8y^2, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -16xy, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12y^2 - 8x^2$. **3214.** $\frac{\partial u}{\partial x} = y + \frac{1}{y}, \frac{\partial u}{\partial y} = x - \frac{x}{y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1 - \frac{1}{y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}$. **3215.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2x}{y^3}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{2}{y^3}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{6x}{y^4}$. **3216.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{3xy^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{y(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{x(x^2-2y^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}}$. **3217.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \sin(x+y) + x\cos(x+y), \frac{\partial u}{\partial y} = x\cos(x+y), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\cos(x+y) - x\sin(x+y), \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \cos(x+y) - x\sin(x+y), \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -x\sin(x+y)$. **3218.** $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2x\sin x^2}{y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\cos x^2}{y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2\sin x^2 + 4x^2\cos x^2}{y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{2x\sin x^2}{y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2\cos x^2}{y^3}$. **3219.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y}\sec^2\frac{x^2}{y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}\sec^2\frac{x^2}{y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2}{y}\sec^2\frac{x^2}{y} + \frac{8x^2}{y^2}\sin\frac{x^2}{y}\sec^3\frac{x^2}{y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{2x}{y^2}\sec^2\frac{x^2}{y} - \frac{4x^3}{y^3}\sin\frac{x^2}{y}\sec^3\frac{x^2}{y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x^2}{y^3}\sec^2\frac{x^2}{y} + \frac{2x^4}{y^4}\sin\frac{x^2}{y}\sec^3\frac{x^2}{y}$. **3220.** $\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}, \frac{\partial u}{\partial y} = x^y\ln x, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^{y-1}(1 + y\ln x), \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^y\ln^2 x$ $(x > 0)$. **3221.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x+y^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x+y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x+y^2)^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{2y}{(x+y^2)^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}$. **3222.** $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$. **3223.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}$ $(xy \neq 1)$. **3224.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{|y|}{x^2+y^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x\,\mathrm{sgn}\,y}{x^2+y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{(x^2-y^2)\mathrm{sgn} y}{(x^2+y^2)^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2}$ $(y \neq 0)$. **3225.** $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =$

$-\frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$. **3226.** $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z$, $\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{x}{y}\right)^z\ln\frac{x}{y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{z(z-1)}{x^2}\left(\frac{x}{y}\right)^z$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{z(z+1)}{y^2}\left(\frac{x}{y}\right)^z$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\left(\frac{x}{y}\right)^z\ln^2\frac{x}{y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{z^2}{xy}\left(\frac{x}{y}\right)^z$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=\frac{1}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z\left(1+z\ln\frac{x}{y}\right)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=-\frac{1}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z\left(1+z\ln\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}>0\right)$. **3227.** $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{yu}{xz}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u\ln x}{z}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{yu}{z^2}\ln x$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{y(y-z)u}{x^2z^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{u\ln^2 x}{z^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{yu\ln x}{z^4}(2z+y\ln x)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{(z+y\ln x)u}{xz^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=-\frac{yu(z+y\ln x)}{xz^3}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=-\frac{u\ln x(z+y\ln x)}{z^3}$ $(xz\neq 0)$. **3228.** $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^z}{x}u$, $\frac{\partial u}{\partial y}=zy^{z-1}u\ln x$, $\frac{\partial u}{\partial z}=y^zu\ln x\ln y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{y^z(y^z-1)}{x^2}u$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=zy^{z-2}u(z-1+zy^z\ln x)\ln x$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=y^zu(1+y^z\ln x)\ln x\ln^2 y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{zy^{z-1}u}{x}(1+y^z\ln x)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=\frac{y^zu\ln y}{x}(1+y^z\ln x)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=y^{z-1}u\ln x[1+z\ln y(1+y^z\ln x)]$ $(x>0,y>0)$. **3230.2.** $f''_{xy}(0,0)$ 不存在. **3235.** $\mathrm{d}u=x^{m-1}y^{n-1}(my\,\mathrm{d}x+nx\,\mathrm{d}y)$, $\mathrm{d}^2u=x^{m-2}y^{n-2}[m(m-1)y^2\,\mathrm{d}x^2+2mnxy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+n(n-1)x^2\,\mathrm{d}y^2]$. **3236.** $\mathrm{d}u=\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{y^2}$, $\mathrm{d}^2u=-\frac{2}{y^3}\mathrm{d}y(y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y)$. **3237.** $\mathrm{d}u=\frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\mathrm{d}^2u=\frac{(y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$. **3238.** $\mathrm{d}u=\frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, $\mathrm{d}^2u=\frac{(y^2-x^2)(\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}y^2)-4xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2}$. **3239.** $\mathrm{d}u=\mathrm{e}^{xy}(y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)$; $\mathrm{d}^2u=\mathrm{e}^{xy}[y^2\,\mathrm{d}x^2+2(1+xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+x^2\,\mathrm{d}y^2]$. **3240.** $\mathrm{d}u=(y+z)\,\mathrm{d}x+(z+x)\,\mathrm{d}y+(x+y)\,\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}^2u=2(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x)$. **3241.** $\mathrm{d}u=\frac{(x^2+y^2)\,\mathrm{d}z-2z(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y)}{(x^2+y^2)^2}$, $\mathrm{d}^2u=\frac{2z[(3x^2-y^2)\,\mathrm{d}x^2+8xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+(3y^2-x^2)\,\mathrm{d}y^2]-4(x^2+y^2)(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}z}{(x^2+y^2)^3}$. **3242.** $\mathrm{d}x-\mathrm{d}y,-2(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)(\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)$. **3244.** (a) $1+mx+ny$; (b) xy; (c) $x+y$. **3245.** (a) 108.972; (b) 1.055; (c) 2.95; (d) 0.502; (e) 0.97. **3246.** 对角线减小约 3 mm; 面积减小约 140 cm^2. **3247.** 减小 1.7 mm. **3249.** $\Delta\approx 10.2\,\mathrm{m}^3;\delta\approx 13\%$. **3250.** $\Delta\approx 7.6\,\mathrm{m}$. **3251.** $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的邻域内无界. **3256.** $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=24$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}=0$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}=-16$. **3257.** $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=0$. **3258.** $\frac{\partial^6 u}{\partial x^3\partial y^3}=-6(\cos x+\cos y)$. **3259.** $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=0$. **3260.** $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=\mathrm{e}^{xyz}(1+3xyz+x^2y^2z^2)$. **3261.** $\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y\partial\xi\partial\eta}=-\frac{6}{r^4}+\frac{48(x-\xi)^2(y-\eta)^2}{r^8}$, 其中 $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$. **3262.** $\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p\partial y^q}=p!q!$. **3263.** $\frac{2(-1)^m(m+n-1)!(nx+my)}{(x-y)^{m+n+1}}$. **3264.** $\mathrm{e}^{x+y}\cdot[x^2+y^2+2(mx+ny)+m(m-1)+n(n-1)]$. **3265.** $(x+p)(y+q)(z+r)\mathrm{e}^{x+y+z}$. **3266.** $\sin\frac{n\pi}{2}$. **3267.** $F(t)=f'(t)+3tf''(t)+t^2f'''(t)$. **3268.** $\mathrm{d}^4u=24(\mathrm{d}x^4-2\,\mathrm{d}x^3\,\mathrm{d}y-2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y^3+\mathrm{d}y^4)$; $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=24$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}=-12$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}=0$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y^3}=-12$, $\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=24$. **3269.** $\mathrm{d}^3u=6(\mathrm{d}x^3-3\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}y+3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}y^3)$. **3270.** $\mathrm{d}^3u=-8(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y)^3\cos(x^2+y^2)-12(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y)(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)\sin(x^2+y^2)$. **3271.** $\mathrm{d}^{10}u=-\frac{9!(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)^{10}}{(x+y)^{10}}$. **3272.** $\mathrm{d}^6u=-(\mathrm{d}x^6-15\,\mathrm{d}x^4\,\mathrm{d}y^2+15\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}y^4-\mathrm{d}y^6)\cos x\cosh y-2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y(3\,\mathrm{d}x^4-10\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}y^2+3\,\mathrm{d}y^4)\sin x\sinh y$. **3273.** $\mathrm{d}^3u=6\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. **3274.** $\mathrm{d}^4u=2\left(\frac{\mathrm{d}x^4}{x^3}+\frac{\mathrm{d}y^4}{y^3}+\frac{\mathrm{d}z^4}{z^3}\right)$. **3275.** $\mathrm{d}^nu=\mathrm{e}^{ax+by}(a\,\mathrm{d}x+b\,\mathrm{d}y)^n$. **3276.** $\mathrm{d}^nu=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^kX^{(n-k)}(x)Y^{(k)}(y)\,\mathrm{d}x^{n-k}\,\mathrm{d}y^k$. **3277.** $d^nu=f^{(n)}(x+y+z)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)^n$. **3278.** $\mathrm{d}^nu=\mathrm{e}^{ax+by+cz}(a\,\mathrm{d}x+b\,\mathrm{d}y+c\,\mathrm{d}z)^n$. **3280.** (a) $Au=-u,A^2u=u$; (b) $Au=1,A^2u=0$. **3281.** (a) $\Delta u=0$; (b) $\Delta u=0$. **3282.** (a) $\Delta_1u=9[(x^2-yz)^2+(y^2-xz)^2+(z^2-xy)^2],\Delta_2u=6(x+y+z)$; (b) $\Delta_1u=\frac{1}{r^4}$, 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\Delta_2u=0$. **3283.** $\frac{\partial u}{\partial x}=2xf'(x^2+y^2+z^2)$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2f'(x^2+y^2+z^2)+4x^2f''(x^2+y^2+z^2)$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=4xyf''(x^2+y^2+z^2)$. **3284.** $\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1\left(x,\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{y}f'_2\left(x,\frac{x}{y}\right)$; $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f'_2\left(x,\frac{x}{y}\right)$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{11}\left(x,\frac{x}{y}\right)+\frac{2}{y}f''_{12}\left(x,\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{y^2}f''_{22}\left(x,\frac{x}{y}\right)$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{x^2}{y^2}f''_{12}\left(x,\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^3}f''_{22}\left(x,\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{y^2}f'_2\left(x,\frac{x}{y}\right)$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2}{y^4}f''_{22}\left(x,\frac{x}{y}\right)+\frac{2x}{y^3}f'_2\left(x,\frac{x}{y}\right)$. **3285.** $\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1+yf'_2+yzf'_3$; $\frac{\partial u}{\partial y}=xf'_2+xzf'_3$; $\frac{\partial u}{\partial z}=xyf''_3$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{11}+y^2f''_{22}+y^2z^2f''_{33}+2yf''_{12}+2yzf''_{13}+2y^2zf''_{23}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2f''_{22}+2x^2zf''_{23}+x^2z^2f''_{33}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=x^2y^2f''_{33}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=xyf''_{22}+xyz^2f''_{33}+xf''_{12}+xzf''_{13}+2xyzf''_{23}+f'_2+zf'_3$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=xyf''_{13}+xy^2f''_{23}+xy^2zf''_{33}+yf'_3$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=x^2yf''_{23}+x^2yzf''_{33}+xf'_3$. **3286.**

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f''_{11} + (x+y)f''_{12} + xyf''_{22} + f'_2$. **3287.** $\Delta u = 3f''_{11} + 4(x+y+z)f''_{12} + 4(x^2+y^2+z^2)f''_{22} + 6f'_2$. **3288.** $\mathrm{d}u = f'(t)(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)$; $\mathrm{d}^2u = f''(t)(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)^2$. **3289.** $\mathrm{d}u = f'(t)\frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2}$; $\mathrm{d}^2u = f''(t)\frac{(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)^2}{x^4} - 2f'(t)\frac{\mathrm{d}x(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)}{x^3}$. **3290.** $\mathrm{d}u = f' \cdot \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\mathrm{d}^2u = f'' \cdot \frac{(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y)^2}{x^2+y^2} + f' \cdot \frac{(y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$. **3291.** $\mathrm{d}u = f'(t)\,\mathrm{d}t$; $\mathrm{d}^2u = f''(t)\,\mathrm{d}t^2 + f'(t)\,\mathrm{d}^2t$, 其中 $\mathrm{d}t = yz\,\mathrm{d}x + zx\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}^2t = 2(z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z)$. **3292.** $\mathrm{d}u = 2f' \cdot (x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z)$; $\mathrm{d}^2u = 4f'' \cdot (x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z)^2 + 2f' \cdot (\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)$. **3293.** $\mathrm{d}u = af'_1\,\mathrm{d}x + bf'_2\,\mathrm{d}y$; $\mathrm{d}^2u = a^2f''_{11}\,\mathrm{d}x^2 + 2abf''_{12}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + b^2f''_{22}\,\mathrm{d}y^2$. **3294.** $\mathrm{d}u = f'_1 \cdot (\mathrm{d}x + \mathrm{d}y) + f'_2 \cdot (\mathrm{d}x - \mathrm{d}y)$; $\mathrm{d}^2u = f''_{11} \cdot (\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)^2 + 2f''_{12} \cdot (\mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2) + f''_{22} \cdot (\mathrm{d}x - \mathrm{d}y)^2$. **3295.** $\mathrm{d}u = f'_1 \cdot (y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y) + f'_2 \cdot \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{y^2}$; $\mathrm{d}^2u = f''_{11} \cdot (y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)^2 + 2f''_{12} \cdot \frac{y^2\,\mathrm{d}x^2 - x^2\,\mathrm{d}y^2}{y^2} + f''_{22} \cdot \frac{(y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y)^2}{y^4} + 2f'_1 \cdot \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - 2f'_2 \cdot \frac{(y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}y}{y^3}$. **3296.** $\mathrm{d}u = f'_1 \cdot (\mathrm{d}x + \mathrm{d}y) + f'_2 \cdot \mathrm{d}z$; $\mathrm{d}^2u = f''_{11} \cdot (\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)^2 + 2f''_{12} \cdot (\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)\,\mathrm{d}z + f''_{22} \cdot \mathrm{d}z^2$. **3297.** $\mathrm{d}u = f'_1 \cdot (\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z) + 2f'_2 \cdot (x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z)$; $\mathrm{d}^2u = f''_{11} \cdot (\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z)^2 + 4f''_{12} \cdot (\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z)(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z) + 4f''_{22} \cdot (x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z)^2 + 2f'_2 \cdot (\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)$. **3298.** $\mathrm{d}u = f'_1 \cdot \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{y^2} + f'_2 \cdot \frac{z\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}z}{z^2}$; $\mathrm{d}^2u = f''_{11} \cdot \frac{(y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y)^2}{y^4} + 2f''_{12} \cdot \frac{(y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y)(z\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}z)}{y^2z^2} + f''_{22} \cdot \frac{(z\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}z)^2}{z^4} - 2f'_1 \cdot \frac{(y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}y}{y^3} - 2f'_2 \cdot \frac{(z\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}z}{z^3}$. **3299.** $\mathrm{d}u = (f'_1 + 2tf'_2 + 3t^2f'_3)\,\mathrm{d}t$; $\mathrm{d}^2u = (f''_{11} + 4tf''_{12} + 4t^2f''_{22} + 6t^2f''_{13} + 12t^3f''_{23} + 9t^4f''_{33} + 2f'_2 + 6tf'_3)\,\mathrm{d}t^2$. **3300.** $\mathrm{d}u = af'_1\,\mathrm{d}x + bf'_2\,\mathrm{d}y + cf'_3\,\mathrm{d}z$; $\mathrm{d}^2u = a^2f''_{11}\,\mathrm{d}x^2 + b^2f''_{22}\,\mathrm{d}y^2 + c^2f''_{33}\,\mathrm{d}z^2 + 2abf''_{12}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 2acf''_{13}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + 2bcf''_{23}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. **3301.** $\mathrm{d}u = 2f'_1 \cdot (x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y) + 2f'_2 \cdot (x\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y) + 2f'_3 \cdot (y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)$; $\mathrm{d}^2u = 4f''_{11} \cdot (x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y)^2 + 4f''_{22} \cdot (x\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y)^2 + 4f''_{33} \cdot (y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)^2 + 8f''_{12} \cdot (x^2\,\mathrm{d}x^2 - y^2\,\mathrm{d}y^2)^2 + 8f''_{13} \cdot (x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y)(y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y) + 8f''_{23} \cdot (x\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y)(y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y) + 2f'_1 \cdot (\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2) + 2f'_2 \cdot (\mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2) + 4f'_3 \cdot \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. **3302.** $\mathrm{d}^nu = f^{(n)}(ax + by + cz)(a\,\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}y + c\,\mathrm{d}z)^n$. **3303.** $\mathrm{d}^nu = \left(a\,\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial \xi} + b\,\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial \eta} + c\,\mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^n f(\xi, \eta, \zeta)$, 其中 $\xi = ax, \eta = by, \zeta = cz$. **3304.** $\mathrm{d}^nu = \left[\mathrm{d}x\left(a_1\frac{\partial}{\partial \xi} + a_2\frac{\partial}{\partial \eta} + a_3\frac{\partial}{\partial \zeta}\right) + \mathrm{d}y\left(b_1\frac{\partial}{\partial \xi} + b_2\frac{\partial}{\partial \eta} + b_3\frac{\partial}{\partial \zeta}\right) + \mathrm{d}z\left(c_1\frac{\partial}{\partial \xi} + c_2\frac{\partial}{\partial \eta} + c_3\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)\right]^n f(\xi, \eta, \zeta)$. **3305.** $F(r) = f''(r) + \frac{2}{r}f'(r)$. **3316.** 1. **3319.** xyz. **3331.** $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = x$. **3332.** $2x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$. **3333.** $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. **3334.** $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$. **3335.** $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$. **3336.** $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0$. **3337.** $z\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$. **3338.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. **3339.** $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$. **3340.** $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. **3341.** $1 - \sqrt{3}$. **3342.** $\frac{\partial z}{\partial l} = \cos\alpha + \sin\alpha$; (a) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; (b) $\alpha = \frac{5\pi}{4}$; (c) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ 及 $\alpha = \frac{7\pi}{4}$. **3343.** $\frac{2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$. **3344.** $\frac{1}{ab}\sqrt{2(a^2+b^2)}$. **3345.** $\frac{\partial u}{\partial l} = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma; |\mathrm{grad}\,u| = \sqrt{3}$. **3346.** $|\mathrm{grad}\,u| = \frac{1}{r_0^2}; \cos(\widehat{\mathrm{grad}\,u, \boldsymbol{x}}) = -\frac{x_0}{r_0}; \cos(\widehat{\mathrm{grad}\,u, \boldsymbol{y}}) = -\frac{y_0}{r_0}, \cos(\widehat{\mathrm{grad}\,u, \boldsymbol{z}}) = -\frac{z_0}{r_0}$, 其中 $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$. **3347.** $\frac{\pi}{2}$. **3348.** $\approx 3\ 142$. **3350.** $\frac{\partial^2 u}{\partial l^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\beta + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cos^2\gamma + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\cos\alpha\cos\beta + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\cos\alpha\cos\gamma + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\cos\beta\cos\gamma$. **3352.** $\frac{\partial u}{\partial y} = -0.5$. **3353.** $u''_{xx}(x, 2x) = u''_{yy}(x, 2x) = -\frac{4x}{3}, u''_{xy}(x, 2x) = \frac{5x}{3}$. **3354.** $z = x\varphi(y) + \psi(y)$. **3355.** $z = \varphi(x) + \psi(y)$. **3356.** $z = \varphi_0(x) + y\varphi_1(x) + \cdots + y^{n-1}\varphi_{n-1}(x)$. **3357.** $u = \varphi(x, y) + \psi(x, z) + \chi(y, z)$. **3358.** $u = 1 + x^2y + y^2 - 2x^4$. **3359.** $z = 1 + xy + y^2$. **3360.** $z = x + y^2 + 0.5xy(x + y)$. **3362.** 函数 $f(x)$ 的零点集合在区间 (a, b) 内应为处处不稠密, 即函数 $f(x)$ 的零点不能完全填满任何的区间 $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$. **3363.** 函数 $f(x)$ 的零点集合在区间 (a, b) 内应为处处不稠密, 且函数 $f(x)$ 的零点 ξ 同时为函数 $g(x)$ 的零点, 此外存在有限极限 $\lim\limits_{x \to \xi}[g(x)/f(x)]$. **3364.** (i) 无限集; (ii) 两个; (iii) (a) 一个; (b) 两个. **3365.** (i) 无限集; (ii) 四个: $y = x; y =$

$-x; y=|x|$ 和 $y=-|x|$; (iii) 两个; (iv) (a) 两个, (b) 四个; (v) 一个. **3366.** (1) 没有; (2) $0<|x|<1, |x|=\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2}$; (3) $x=0, |x|=1$; (4) $1<|x|<\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$; 单值分支 $y=\varepsilon\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}}$ $\left(|x|\leqslant\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right)$; $y=\varepsilon\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}}$ $\left(1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right)$, 其中 $\varepsilon=-1,1$. **3367.** 分支点: $(-1,0),(0,0),(1,0)$; $y=\varepsilon(x)\frac{\sqrt{\sqrt{8x^2+1}-(2x^2+1)}}{2}$ $(|x|\leqslant 1)$, 其中 $\varepsilon(x)=-1,1,\operatorname{sgn}x$ 和 $-\operatorname{sgn}x$. **3368.** 函数 $\varphi(y)$ 的值集与函数 $f(x)$ 的值集应有公共点. **3371.** $y'=-\frac{x+y}{x-y}; y''=\frac{2a^2}{(x-y)^3}$. **3372.** $y'=\frac{x+y}{x-y}; y''=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$. **3373.** $y'=\frac{1}{1-\varepsilon\cos y}; y''=\frac{-\varepsilon\sin y}{(1-\varepsilon\cos y)^3}$. **3374.** $y'=\frac{y^2(1-\ln x)}{x^2(1-\ln y)}; y''=\frac{y^2[y(1-\ln x)^2-2(x-y)(1-\ln x)(1-\ln y)-x(1-\ln y)^2]}{x^4(1-\ln y)^3}$. **3375.** $y'=\frac{y}{x}; y''=0$. **3378.** $y_1'(0)=-1; y_2'(0)=1$. **3379.** $y_1'(0)=0; y_2'(0)=-\sqrt{3}; y_3'(0)=\sqrt{3}$. **3380.** $y'=-\frac{2x+y}{x+2y}; y''=-\frac{18}{(x+2y)^3}; y'''=-\frac{162x}{(x+2y)^5}$. **3381.** $y'=0; y''=-\frac{2}{3}; y'''=-\frac{2}{3}$. **3383.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z}; \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{x^2+z^2}{z^3}; \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{xy}{z^3}; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{y^2+z^2}{z^3}$. **3384.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{z^2-xy}; \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{z^2-xy}; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2xy^3z}{(z^2-xy)^3}; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2x^3yz}{(z^2-xy)^3}; \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}$. **3385.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x+y+z-1}; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x+y+z}{(x+y+z-1)^3}$. **3386.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{xz}{x^2-y^2}; \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{yz}{x^2-y^2}; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{y^2z}{(x^2-y^2)^2}; \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{xyz}{(x^2-y^2)^2}; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x^2z}{(x^2-y^2)^2}$. **3387.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=-1, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$. **3388.** (a) -2; (b) -1. **3389.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2}{5}; \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{5}; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{394}{125}$. **3390.** $\mathrm{d}z=-\frac{c^2}{z}\left(\frac{x\,\mathrm{d}x}{a^2}+\frac{y\,\mathrm{d}y}{b^2}\right)$; $\mathrm{d}^2z=-\frac{c^4}{z^3}\left[\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{\mathrm{d}x^2}{a^2}+\frac{2xy}{a^2b^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{\mathrm{d}y^2}{b^2}\right]$. **3391.** $\mathrm{d}z=-\frac{(1-yz)\,\mathrm{d}x+(1-xz)\,\mathrm{d}y}{1-xy}$; $\mathrm{d}^2z=-\frac{2\left\{y(1-yz)\,\mathrm{d}x^2+[x+y-z(1+xy)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+x(1-xz)\,\mathrm{d}y^2\right\}}{(1-xy)^2}$. **3392.** $\mathrm{d}z=\frac{z(y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y)}{y(x+z)}$; $\mathrm{d}^2z=-\frac{z^2(y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y)^2}{y^2(x+z)^3}$. **3393.** $\mathrm{d}z=\mathrm{d}x-\frac{(x-z)\,\mathrm{d}y}{(x-z)^2+y(y+1)}$; $\mathrm{d}^2z=\frac{2(x-z)(y+1)[(x-z)^2+y^2]}{[(x-z)^2+y(y+1)]^3}\mathrm{d}y^2$. **3394.** $\mathrm{d}u=-\frac{u^2(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)-z^2\,\mathrm{d}z}{u[2(x+y)-u]}$. **3395.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{4(x-z)(y-z)}{(F_1'+2zF_2')^3}[F_2'^2F_{11}''-2F_1'F_2'F_{12}''+F_1'^2F_{22}'']-\frac{2(F_1'+2xF_2')(F_1'+2yF_2')F_2'}{(F_1'+2zF_2')^3}$. **3396.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_1'-F_3'}{F_2'-F_3'}; \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F_2'-F_1'}{F_2'-F_3'}$. **3397.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\left(1+\frac{F_1'+F_2'}{F_3'}\right); \frac{\partial z}{\partial y}=-\left(1+\frac{F_2'}{F_3'}\right); \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-F_3'^{-3}[F_3'^2(F_{11}''+2F_{12}''+F_{22}'')-2(F_1'+F_2')F_3'(F_{13}''+F_{23}'')+(F_1'+F_2')^2F_{33}'']$. **3398.** (1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-(xF_1'+yF_2')^{-3}\cdot[y^2z^2(F_2'^2F_{11}''-2F_1'F_2'F_{12}''+F_1'^2F_{22}'')-2z(xF_1'+yF_2')F_1'^2]$; (2) (a) $\mathrm{d}^2z=-\frac{F_2'^2F_{11}''-2F_1'F_2'F_{12}''+F_1'^2F_{22}''}{(F_1'+F_2')^3}(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)^2$; (b) $\mathrm{d}^2z=\frac{F_2'^2F_{11}''-2F_1'F_2'F_{12}''+F_1'^2F_{22}''}{(xF_1'+yF_2')^3}(y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y)^2$. **3399.** $\mathrm{d}z=\frac{1}{9}(2\,\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)$; $\mathrm{d}^2z=-\frac{2}{243}(2\,\mathrm{d}x^2-5\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+2\,\mathrm{d}y^2)$. **3401.** $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=\frac{y-z}{x-y}; \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=\frac{z-x}{x-y}$. **3402.** (a) $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=0, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=-1, \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}z^2}=-\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}=-\frac{1}{4}$; (b) $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2}; \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{yu-xv}{x^2+y^2}; \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xv-yu}{x^2+y^2}; \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2}$ $(x^2+y^2>0)$. **3403.** $\mathrm{d}u=-\frac{1}{3}\mathrm{d}y, \mathrm{d}v=-\mathrm{d}x+\frac{1}{3}\mathrm{d}y$. **3404.** $\mathrm{d}u=\frac{(\sin v+x\cos v)\,\mathrm{d}x-(\sin u-x\cos v)\,\mathrm{d}y}{x\cos v+y\cos u}$; $\mathrm{d}v=\frac{-(\sin v-y\cos u)\,\mathrm{d}x+(\sin u+y\cos u)\,\mathrm{d}y}{x\cos v+y\cos u}$; $\mathrm{d}^2u=-\mathrm{d}^2v=\frac{(2\,\mathrm{d}x\cos v-x\,\mathrm{d}v\sin v)\,\mathrm{d}v}{x\cos v+y\cos u}-\frac{(2\,\mathrm{d}y\cos u-y\,\mathrm{d}u\sin u)\,\mathrm{d}u}{x\cos v+y\cos u}$. **3405.** $\mathrm{d}u=\frac{1}{2}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$; $\mathrm{d}v=\frac{\pi}{4}\mathrm{d}y-\frac{1}{2}(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)$; $\mathrm{d}^2u=\mathrm{d}x^2$; $\mathrm{d}^2v=\frac{1}{2}(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)^2$. **3406.** $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\left(t+\frac{1}{t}\right); \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=3\left(t^2+\frac{1}{t^2}+1\right); \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=2; \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}=6\left(t+\frac{1}{t}\right)$. **3407.** $y\geqslant\frac{x^2}{2}; \frac{\partial z}{\partial x}=-3uv; \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3}{2}(u+v)$ $(u\neq v)$. **3408.** (a) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3}{2}; \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{2}$; (b) $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{26}{121}$; (c) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\cos^2\psi}{\sin^3\varphi}$. **3409.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\sin 2v}{u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{\cos 2v}{u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{\sin 2v}{u^2}$. **3410.** $\mathrm{d}z=0$; $\mathrm{d}^2z=\frac{1}{2}(\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}y^2)$. **3411.** $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{2(x^2-y^2)}{x-2y}; \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}=\frac{4x-2y}{x-2y}+\frac{6x}{(x-2y)^3}$. **3412.** $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y+z}+\frac{(x+1)(y-x)}{(z+1)(y+z)}\mathrm{e}^{x-z}; \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x+z}{(y+z)^2}+\frac{(y+1)(y-x)}{(z+1)(y+z)^2}\mathrm{e}^{y-z}$. **3413.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{I}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\chi}{\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\chi}{\partial u}\right), \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{I}\left(\frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{\partial\chi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)$, 其中 $I=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}$. **3414.** $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{I}\frac{\partial\psi}{\partial v}; \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{I}\frac{\partial\varphi}{\partial v}; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{I^3}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2-2\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}\right)\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2\right\}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{I^3}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}-\right.\right.$

$\left.\left.\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right\}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{I^3}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2-2\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2\right\}$, 其中 $I=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}$. **3415.** (a) $\frac{\partial u}{\partial x}=\cos\frac{v}{u}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\sin\frac{v}{u}$; $\frac{\partial v}{\partial x}=-\left(\sin\frac{v}{u}-\frac{v}{u}\cos\frac{v}{u}\right)$; $\frac{\partial v}{\partial y}=\cos\frac{v}{u}+\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u}$; (b) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sin v}{e^u(\sin v-\cos v)+1}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\cos v}{e^u(\sin v-\cos v)+1}$; $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-(e^u-\cos v)}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}$; $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{e^u+\sin v}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}$. **3416.** $\frac{du}{dx}=\frac{I}{I_1}$; $\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{1}{I_1^3}\left\{\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)}\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f+\frac{\partial(h,f)}{\partial(y,z)}\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g+\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h\right\}$, 其中 $I_1=\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)}$, $I_2=\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,x)}$, $I_3=\frac{\partial(g,h)}{\partial(x,y)}$ 和 $I=\frac{D(f,g,h)}{D(x,y,z)}$. **3417.** $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{I_2}{I_1}\frac{\partial g}{\partial y}$, 其中 $I_1=\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}$, $I_2=\frac{\partial(h,f)}{\partial(x,t)}$. **3418.** $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{I_1}{I}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{I_2}{I}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{I_3}{I}$, 其中 $I_1=\frac{\partial(g,h)}{\partial(v,w)}$, $I_2=\frac{\partial(h,f)}{\partial(v,w)}$, $I_3=\frac{\partial(f,g)}{\partial(v,w)}$, $I=\frac{D(f,g,h)}{D(u,v,w)}$. **3419.** $dz=-\frac{I_1\,dx+I_2\,dy}{I_3}$, 其中 $I_1=\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,t)}$, $I_2=\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,t)}$, $I_3=\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,t)}$. **3431.** $x'''+xx'^5=0$. **3432.** $x^{(4)}=0$. **3433.** $\frac{d^2x}{dt^2}-t\left(\frac{dx}{dt}\right)^3=0$. **3434.** $\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$. **3435.** $\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}-6y=0$. **3436.** $\frac{d^2y}{dt^2}+n^2y=0$. **3437.** $\frac{d^2y}{dt^2}+m^2y=0$. **3438.** $u''+[q(x)-\frac{1}{4}p^2(x)-\frac{1}{2}p'(x)]u=0$. **3439.** $\frac{d^2u}{dt^2}+(u+3)\frac{du}{dt}+2u=0$. **3440.** $\frac{d^2u}{dt^2}=0$. **3441.** $\frac{d^2u}{dt^2}=0$. **3442.** $\frac{d^2u}{dt^2}+8u\left(\frac{du}{dt}\right)^3=0$. **3443.** $t^5\frac{d^3u}{dt^3}+(3t^4+1)\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{du}{dt}=0$. **3444.** $u''-u'=\frac{A}{(a-b)^2}u$. **3446.** $\Phi(1,u,u'+u^2)=0$. **3447.** $F(xu'+u^2-u,u,1)=0$. **3450.** $\frac{dr}{d\varphi}=r$. **3451.** $r'^2=\frac{1-\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi}r^2$. **3452.** $r(r^2+2r'^2-rr'')=r'^3$. **3453.** $\frac{r'}{r}$. **3454.** $K=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}$. **3455.** $\frac{dr}{dt}=kr^3$; $\frac{d\varphi}{df}=-1$. **3456.** $w=\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)$. **3457.** $Y'=x$; $Y''=\frac{1}{y''}$; $Y'''=-\frac{y'''}{y''^3}$. **3458.** $z=\varphi(x+y)$, 其中 φ 为任意可微函数. **3459.** $z=\varphi(x^2+y^2)$. **3460.** $z=\frac{x}{a}+\varphi(y-bz)$. **3461.** $z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. **3462.** $\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=e^u\sinh v$. **3463.** $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial v}$. **3464.** $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{1}{2}$. **3465.** $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{z}{v}\cdot\frac{z^2+u}{z^2-u}$. **3466.** $(2u+v-z)\frac{\partial z}{\partial u}+(u+2v-z)\frac{\partial z}{\partial v}=u+v-z$. **3467.** $\frac{e^{x+y}-z^2}{1-e^{-x}\frac{\partial z}{\partial\xi}-e^{-y}\frac{\partial z}{\partial\eta}}$. **3468.** $\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}{u^2+v^2}$. **3469.** $\frac{\partial u}{\partial\xi}=0$. **3470.** $\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{x-z}{y}$. **3471.** $\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{u}{v}$. **3472.** $A=\frac{u^2\left\{x^2-2xu\frac{\partial x}{\partial u}+u^2\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right]\right\}}{x^4\left(u\frac{\partial x}{\partial u}+v\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}$. **3473.** $\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}+\frac{\partial u}{\partial\zeta}+3u+(e^\xi+e^\eta+e^\zeta)=0$. **3474.** $\frac{\partial w}{\partial v}=0$. **3475.** $\frac{\partial w}{\partial u}=0$. **3476.** $\frac{\partial w}{\partial v}=0$. **3477.** $u^2\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+v^2\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2=w^2\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}$. **3478.** $\frac{e^{2u}\left(1-\frac{\partial w}{\partial v}\cos^2 v\right)}{\frac{\partial w}{\partial u}}$. **3479.** $A=\frac{\partial w}{\partial u}:\frac{\partial w}{\partial v}$. **3480.** $\frac{\partial w}{\partial\zeta}=\frac{\xi\eta}{\zeta}$. **3481.** $w=\frac{\partial u}{\partial\varphi}$. **3482.** $w=r\frac{\partial u}{\partial r}$. **3483.** $w=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2$. **3484.** $w=\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}$. **3485.** $w=r^2\frac{\partial^2u}{\partial r^2}$. **3486.** $w=\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}$. **3487.** $I=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial v}{\partial r}\right)$. **3488.** $u=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$, 其中 φ 和 ψ 为任意函数. **3489.** $3\frac{\partial^2z}{\partial v\partial u}+\frac{\partial z}{\partial u}=0$. **3490.** $\frac{\partial^2z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2z}{\partial v^2}=0$. **3491.** $a\left(\frac{\partial^2z}{\partial u^2}-\frac{\partial z}{\partial u}\right)+2b\frac{\partial^2z}{\partial u\partial v}+c\left(\frac{\partial^2z}{\partial v^2}-\frac{\partial z}{\partial v}\right)=0$. **3492.** $\frac{\partial^2z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2z}{\partial v^2}=0$. **3493.** $\frac{\partial^2z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2z}{\partial v^2}+m^2e^{2u}z=0$. **3494.** $\frac{\partial^2z}{\partial u\partial v}=0$. **3495.** $\frac{\partial^2z}{\partial u\partial v}=\frac{1}{2u}\frac{\partial z}{\partial v}$. **3496.** $\frac{\partial^2z}{\partial v\partial u}=\frac{2}{u(4-uv)}\frac{\partial z}{\partial v}$. **3497.** $(u^2-v^2)\frac{\partial^2z}{\partial u\partial v}=v\frac{\partial z}{\partial u}$. **3498.** $\frac{\partial^2z}{\partial v^2}=\frac{2u}{u^2+v^2}\frac{\partial z}{\partial u}$. **3499.** $\frac{\partial^2z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{u^2-v^2}\left(v\frac{\partial z}{\partial u}-u\frac{\partial z}{\partial v}\right)=0$. **3500.** $\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial^2z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2z}{\partial v^2}=1$. **3501.** $u=\varphi(x+\lambda_1y)+\psi(x+\lambda_2y)$, 其中 λ_1 和 λ_2 为方程 $A+2B\lambda+C\lambda^2=0$ 的根. **3503.** (a) $\Delta u=\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}$; (b) $\Delta(\Delta u)=\frac{d^4u}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3u}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{du}{dr}$. **3504.** $u\frac{d^2w}{du^2}+\frac{dw}{du}+cw=0$. **3505.** $A=X\frac{\partial^2u}{\partial X^2}-Y\frac{\partial^2u}{\partial X\partial Y}+\frac{\partial u}{\partial X}$. **3508.** $\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)+\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)+\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\zeta\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right)=2\left(\xi\eta\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}+\xi\zeta\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\zeta}+\eta\zeta\frac{\partial^2u}{\partial\eta\partial\zeta}\right)$. **3509.** $\frac{\partial^2z}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2z}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2z}{\partial y_3^2}=0$. **3510.** $\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}=0$. **3511.** $\Delta_1u=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2$; $\Delta_2u=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}\right]$. **3512.** $w\left(\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2w}{\partial y^2}\right)=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$. **3513.** $\frac{\partial^2w}{\partial u^2}=0$ **3514.** $\frac{\partial^2w}{\partial v^2}=0$. **3515.**

$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\frac{1}{2}$. **3516.** $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=2w$. **3517.** $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\left(\frac{v}{u}-1\right)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$. **3518.** $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2=0$. **3519.** $\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=\frac{w}{4\sin^2(u-v)}$. **3520.** $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$. **3523.** $\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=0$. **3524.** $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2}=\frac{\partial w}{\partial \xi}+\frac{\partial w}{\partial \eta}+\frac{\partial w}{\partial \zeta}+(\mathrm{e}^w-1)\left[\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)^2\right]$. **3526.** $x=y\varphi(z)+\psi(z)$. **3527.** $A(X,Y)\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}-2B(X,Y)\frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y}+C(X,Y)\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}=0$. **3528.** $\frac{x-x_0}{-\cos\alpha\sin t_0}=\frac{y-y_0}{-\sin\alpha\cos t_0}=\frac{z-z_0}{\cos t_0}$; $z-z_0=(x-x_0)\cos\alpha\tan t_0+(y-y_0)\sin\alpha\tan t_0$, 其中 $x_0=a\cos\alpha\cos t_0, y_0=a\sin\alpha\cos t_0, z_0=a\sin t_0$. **3529.** $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1, y=\frac{b}{2}; ax-cz=\frac{1}{2}(a^2-c^2)$. **3530.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}; x+y+2z=4$. **3531.** $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{-1}; 3x+3y-z=3$. **3532.** $x+z=2, y+2=0; x-z=0$. **3533.** $M_1(-1,1,-1); M_2\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27}\right)$. **3537.** $\tan\varphi=f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0)\sin\alpha$. **3538.** $\frac{\partial u}{\partial l}=-\frac{16}{243}$. **3539.** $2x+4y-z-5=0; \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-5}{-1}$. **3540.** $3x+4y+12z=169; \frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{12}$. **3541.** $z=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}(x-y); \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-\frac{\pi}{4}}{2}$. **3542.** $ax_0x+by_0y+cz_0z=1; \frac{x-x_0}{ax_0}=\frac{y-y_0}{by_0}=\frac{z-z_0}{cz_0}$. **3543.** $x+y-2z=0; \frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$. **3544.** $x+y-4z=0; \frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-4}$. **3545.** $\frac{x}{a}\cos\psi_0\cos\varphi_0+\frac{y}{b}\cos\psi_0\sin\varphi_0+\frac{z}{c}\sin\psi_0=1; \frac{x\sec\psi_0\sec\varphi_0-a}{bc}=\frac{y\sec\psi_0\csc\varphi_0-b}{ac}=\frac{z\csc\psi_0-c}{ab}$. **3546.** $x\cos\varphi_0+y\sin\varphi_0-z\tan\alpha=0; \frac{x-r_0\cos\varphi_0}{\cos\varphi_0}=\frac{y-r_0\sin\varphi_0}{\sin\varphi_0}=\frac{z-r_0\cot\alpha}{-\tan\alpha}$. **3547.** $ax\sin v_0-ay\cos v_0+u_0z=au_0v_0; \frac{x-u_0\cos v_0}{a\sin v_0}=\frac{y-u_0\sin v_0}{-a\cos v_0}=\frac{z-av_0}{u_0}$. **3548.** $\frac{3x}{u_0}-\frac{3y}{u_0^2}+\frac{z}{u_0^3}=2$. **3549.** $A(0,\pm2\sqrt{2},\mp2\sqrt{2}); B(\pm2,\mp4,\pm2); C(\pm4,\mp2,0)$. **3550.** $x=\pm\frac{a^2}{d}, y=\pm\frac{b^2}{d}, z=\pm\frac{c^2}{d}$, 其中 $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **3551.** $x+4y+6z=\pm21$. **3556.** $x^2+y^2-xy=1, z=0; 3y^2+4x^2=4, x=0; 3x^2+4z^2=4, y=0$. **3557.** $\delta<0.003$. **3559.** $\cos\varphi=\frac{2bz_0}{a\sqrt{a^2+b^2}}$. **3563.** $\frac{\partial u}{\partial n}=x_0+y_0+z_0$; (a) $x_0=y_0=z_0=\frac{1}{\sqrt{3}}$; (b) $x_0=y_0=z_0=-\frac{1}{\sqrt{3}}$; (c) 在圆周 $x+y+z=0, x^2+y^2+z^2=1$ 上. **3564.** $\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{2}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}}$. **3566.** $x^2+y^2=p^2$. **3567.** $y=\pm x$. **3568.** $y^2=4ax$. **3569.** 无包络线. **3570.** $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}}$. **3571.** $|xy|=\frac{S}{2\pi}$. **3572.** $y=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{gx^2}{2v_0^2}$. **3574.** (a) $y=0$ 是包络线 (拐点的几何轨迹); (b) $y=0$ 是包络线; (c) $y=0$ 是奇点的几何轨迹 (尖点); (d) $x=0$ 为二重点的几何轨迹, $x=a$ 为包络线. **3575.** 圆环 $(\sqrt{x^2+y^2}-R)^2+z^2=r^2$. **3576.** $x^2\sin^2\alpha+y^2\sin^2\beta+z^2\sin^2\gamma-2xy\cos\alpha\cos\beta-2xz\cos\alpha\cos\gamma-2yz\cos\beta\cos\gamma=1$. **3577.** $|xyz|=\frac{V}{4\pi\sqrt{3}}$. **3578.** $\left|z\pm\sqrt{x^2+y^2}\right|=\rho\sqrt{2}$. **3579.** $\begin{vmatrix}x & y\\ x_0 & y_0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}y & z\\ y_0 & z_0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z & x\\ z_0 & x_0\end{vmatrix}^2\leqslant R^2(x^2+y^2+z^2)$. **3580.** $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=(z-z_0)^2$. **3581.** $f(x,y)=5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2$. **3582.** $f(x,y,z)=3[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-(x-1)(y-1)-(x-1)(z-1)-(y-1)(z-1)]+(x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3-3(x-1)(y-1)(z-1)$. **3583.** $\Delta f(1,-1)=h-3k+(-h^2-2hk+k^2)+(h^2k+hk^2)$.

quad**3584.** $f(x+h,y+k,z+l)=f(x,y,z)+2[h(Ax+Dy+Ez)+k(Dx+By+Fz)+l(Ex+Fy+Cz)]+f(h,k,l)$. **3585.** $x^y=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+R_2(1+\theta(x-1),1+\theta(y-1))(0<\theta<1)$, 其中 $R_2(x,y)=\frac{1}{6}x^y\left[\left(\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x-\ln x\cdot\mathrm{d}y\right)^3+3\left(\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x+\ln x\cdot\mathrm{d}y\right)\left(-\frac{y}{x^2}\,\mathrm{d}x^2+\frac{2}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)+\left(\frac{2y}{x^3}\,\mathrm{d}x^3-\frac{3}{x^2}\,\mathrm{d}^2x\,\mathrm{d}y\right)\right]$, $\mathrm{d}x=x-1$, $\mathrm{d}y=y-1$. **3586.** $1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)-\frac{1}{8}(x^2+y^2)^2$. **3587.** (a) $1-\frac{1}{2}(x^2-y^2)$; (b) $\frac{\pi}{4}+x-xy$. **3588.** $-(xy+xz+yz)$. **3589.** $F(x,y)=\frac{h^2}{4}(f''_{xx}+f''_{yy})+\frac{h^4}{48}(f^{(4)}_{xxxx}+f^{(4)}_{yyyy})+\cdots$. **3590.** $F(\rho)=f(x,y)+\frac{\rho^2}{4}[f''_{xx}(x,y)+f''_{yy}(x,y)]$. **3591.**

$\Delta_{xy} = f(x,y) = hk\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sum_{n=3}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{h^{m-1}k^{n-m-1}}{m!(n-m)!}\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^m \partial y^{n-m}}\right]$. **3592.** $F(\rho) = f(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2n}\Delta^n f(x,y)$, 其中 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. **3593.** $1+mx+ny+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+mnxy+\frac{n(n-1)}{2!}y^2+\cdots$ $(|x|<1, |y|<1)$. **3594.** $\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n-1}(m+n-1)!}{m!n!}x^m y^n (|x|+|y|<1)$. **3595.** $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^m y^{2n+1}}{m!(2n+1)!}$ $(|x|<+\infty, |y|<+\infty)$. **3596.** $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^m y^{2n}}{m!(2n)!}$ $(|x|<+\infty, |y|<+\infty)$. **3597.** $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m+1}y^{2n+1}}{(2m+1)!(2n+1)!}$ $(|x|<+\infty, |y|<+\infty)$. **3598.** $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m}y^{2n}}{(2m)!(2n)!}$ $(|x|<+\infty, |y|<+\infty)$. **3599.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x^2+y^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(x^2+y^2<+\infty)$. **3600.** $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{m+n}\frac{x^m y^n}{mn}$ $(|x|<1, |y|<1)$. **3601.** $f(x,y) = 1+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)y$. **3602.** $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^m(y+1)^n}{m!n!}$ $(|x|<+\infty, |y|<+\infty)$. **3603.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n[1+(x-1)](y-1)^n$ $(-\infty<x<+\infty, 0<y<2)$. **3604.** $z = 1+[2(x-1)-(y-1)]-[8(x-1)^2-10(x-1)(y-1)+3(y-1)^2]+\cdots$. **3605.** 若 $a<0$, (0,0) 是孤立点; 若 $a=0$, (0,0) 是尖点; 若 $a>0$, (0,0) 为二重点. **3606.** (0,0) 为二重点. **3607.** (0,0) 为孤立点. **3608.** (0,0) 为孤立点. **3609.** (0,0) 为二重点. **3610.** (0,0) 为 (第二类) 尖点. **3611.** (0,0) 为二重点. **3612.** 若 $a<b<c$, 则曲线由长圆形和无穷的一支所组成; 若 $a=b<c$, 则 $A(a,0)$ 为孤立点; 若 $a<b=c$, 则 $B(b,0)$ 为二重点; 若 $a=b=c$, 则 $A(a,0)$ 是尖点. **3613.** (0,0) 为二重点. **3614.** (0,0) 为尖点. **3615.** (0,0) 为静止点. **3616.** (0,0) 为角点. **3617.** $x=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为第一类间断点. **3618.** $x=0$ 为第二类间断点. **3619.** $x=0$ 为二重点. **3620.** $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为尖点. **3621.** 在 $x=0$ 和 $y=1$ 时 $z_{\min}=0$. **3622.** 无极值点. **3623.** 在直线 $x-y+1=0$ 上的点有准极小值 $z=0$. **3624.** 在 $x=1$ 和 $y=0$ 时 $z_{min}=-1$. **3625.** 在 $x=2, y=3$ 时 $z_{\max}=108$; 在 $x=0, 0<y<6$ 时有准极小值 $z=0$; 在 $x=0, -\infty<y<0$ 和 $6<y<+\infty$ 时有准极大值 $z=0$. **3626.** 在 $x=1$ 和 $y=1$ 时 $z_{\min}=-1$. **3627.** (a) 在 $x_1=-1, y_1=-1$ 和 $x_2=1, y_2=1$ 时 $z_{\min}=-2$; 在 $x=0, y=0$ 时无极值; (b) 在 $x=0, y=0$ 时极大值 $z=0$; 在 $x=\pm\frac{1}{2}, y=\pm1$ 时极小值 $z=-1\frac{1}{8}$; 在 $x=0, y=\pm1$ 时鞍点 $z=-1$, 以及在 $x=\pm\frac{1}{2}, y=0$ 时鞍点 $z=-\frac{1}{8}$. **3628.** 在 $x=5, y=2$ 时极小值 $z=30$. **3629.** 在 $\frac{x}{a}=-\frac{y}{b}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时 $z_{\min}=-\frac{ab}{3\sqrt{3}}$; 在 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时 $z_{\max}=\frac{ab}{3\sqrt{3}}$. **3630.** 在 $x=\frac{a}{c}, y=\frac{b}{c}, c>0$ 时 $z_{\max}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; 在 $x=\frac{a}{c}, y=\frac{b}{c}, c<0$ 时 $z_{\min}=-\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; 在 $c=0, a^2+b^2\neq0$ 时无极值. **3631.** 在 $x=0, y=0$ 时 $z_{\max}=1$. **3632.** 在 $x=0, y=0$ 时极小值 $z=0$; 在 $x=-\frac{1}{4}, y=-\frac{1}{2}$ 时鞍点 $z=\frac{1}{2}e^{-2}$. **3633.** 在 $x=1, y=-2$ 时鞍点 $z=e^3$. **3634.** 在 $x=1, y=3$ 时极大值 $z=e^{-13}\approx 2.26\cdot10^{-6}$; 在 $x=-\frac{1}{26}, y=-\frac{3}{26}$ 时极小值 $z=-26e^{-\frac{1}{52}}\approx-25.51$. **3635.** 在 $x=1, y=2$ 时极小值 $z=7-10\ln2\approx0.0685$. **3636.** 在 $x=\frac{\pi}{3}, y=\frac{\pi}{6}$ 时 $z_{\max}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$. **3637.** 在 $x=y=\frac{2\pi}{3}$ 时 $z_{\min}=-\frac{3\sqrt{3}}{8}$; 在 $x=y=\frac{\pi}{3}$ 时 $z_{\max}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$. **3638.** 在 $x=1, y=1$ 时鞍点 $z=-1+\frac{1}{2}\ln2+\frac{3}{4}\pi\approx1.70$. **3639.** 当 $x=y=\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}\approx\pm0.43$ 时极小值 $z=-\frac{1}{2e}\approx-0.184$; 当 $x=-y=\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}$ 时极大值 $z=\frac{1}{2e}$; 在静止点 $x=0, y=\pm1$ 和 $x=\pm1, y=0$ 上无极值. **3640.** 静止点 $x=\frac{\pi}{12}(-1)^{m+1}+(m+n)\frac{\pi}{2}, y=\frac{\pi}{12}(-1)^{m+1}+(m-n)\frac{\pi}{2}$ $(m,n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 极值为 $z=m\pi+\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)(-1)^{m+1}+2\cdot(-1)^n$, 若 m 和 n 有不同的奇偶性 (m 奇 n 偶时为极大值, m 偶 n 奇时为极小值); 若 m 和 n 有相同奇偶性, 无极值. **3641.** 当 $x=0, y=0$ 时 $z_{\min}=0$; 当 $x^2+y^2=1$ 时准极大值 $z=e^{-1}$. **3642.** 当 $x=-1, y=-2, z=3$ 时 $u_{\min}=-14$. **3643.** 当 $x=24, y=-144, z=-1$ 时极小值 $u=-6913$. **3644.** 当$x=\frac{1}{2}, y=1, z=1$ 时极小值 $u=4$. **3645.** 当 $x=y=z=\frac{a}{7}$ 时 $u_{\max}=\frac{a^7}{7^7}$; 当 $y=0, x\neq0, z\neq0, x+2y+3z\neq a$ 时准

极值 $u=0$. **3646.** 当 $x=\frac{1}{2}\sqrt[15]{16a^4b}, y=\frac{1}{4}\sqrt[5]{16a^4b}, z=\frac{1}{2}\sqrt[15]{\frac{a^8b^7}{4}}$ 时极小值 $u=\frac{15a}{4}\sqrt[15]{\frac{a}{16b}}$. **3647.** 当 $x=y=z=\frac{\pi}{2}$ 时极大值 $u=4$; 当 $x=y=z=0$ 和 $x=y=z=\pi$ 时边界极小值 $u=0$. **3648.** 当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{2}{n^2+n+2}$ 时, $u_{\max}=\left(\frac{2}{n^2+n+2}\right)^{\frac{n^2+n+2}{2}}$. **3649.** 当 $x_1=2^{\frac{1}{n+1}}, x_2=x_1^2, \cdots, x_n=x_1^n$ 时极小值 $u=(n+1)2^{\frac{1}{n+1}}$. **3650.** 数 $a, x_1, x_2, \cdots, x_n, b$ 构成以公比为 $q=\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$ 的等比数列. **3651.** 当$x=1, y=-1$ 时极小值 $z_1=-2$, 极大值 $z_2=6$. **3652.** 当 $x=y=-(3+\sqrt{6})$ 时 $z_{\min}=-(4+2\sqrt{6})$; 当 $x=y=-(3-\sqrt{6})$ 时 $z_{\max}=2\sqrt{6}-4$. **3653.** 当 $x^2+y^2=\frac{3a^2}{8}, z<0$ 时准极小值 $z=-\frac{a}{2\sqrt{2}}$; 当 $x^2+y^2=\frac{3a^2}{8}, z>0$ 时准极大值 $z=\frac{a}{2\sqrt{2}}$. **3654.** 当 $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}$ 时 $z_{\max}=\frac{1}{4}$. **3655.** 当 $x=-\frac{b\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}, y=-\frac{a\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 时 $z_{\min}=-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}$; 当 $x=\frac{b\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}, y=\frac{a\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 时 $z_{\max}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}$, 其中 $\varepsilon=\operatorname{sgn}ab\neq 0$. **3656.** 当 $x=\frac{ab^2}{a^2+b^2}, y=\frac{a^2b}{a^2+b^2}$ 时 $z_{\min}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$. **3657.** (a) $z_{\min}=\lambda_1, z_{\max}=\lambda_2$, 其中 λ_1 和 λ_2 为方程 $(A-\lambda)(C-\lambda)-B^2=0$ 的根, 且 $\lambda_1<\lambda_2$; (b) 在 $x=\pm1\frac{1}{2}, y=\pm4$ 时极大值 $z=106\frac{1}{4}$; 当 $x=\pm2, y=\mp3$ 时极小值 $z=-50$. **3658.** 当 $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}, y=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时极值 $z=1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{2}}$ (k 为偶数时为极大值, k 为奇数时为极小值). **3659.** 当 $x=-\frac{1}{3}, y=\frac{2}{3}, z=-\frac{2}{3}$ 时 $u_{\min}=-3$; 当 $x=\frac{1}{3}, y=-\frac{2}{3}, z=\frac{2}{3}$ 时 $u_{\max}=3$. **3660.** 当 $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}=\frac{a}{m+n+p}$ 时 $u_{\max}=\frac{a^{m+n+p}m^mn^np^p}{(m+n+p)^{m+n+p}}$. **3661.** 当 $x=0, y=0, z=\pm c$ 时 $u_{\min}=c^2$; 当 $x=\pm a, y=0, z=0$ 时 $u_{\max}=a^2$. **3662.** 当 $x=y=z=\frac{a}{6}$ 时 $u_{\max}=\left(\frac{a}{6}\right)^6$. **3663.** (a) 当 $x=y=\frac{1}{\sqrt{6}}$ 和 $z=-\frac{2}{\sqrt{6}}, x=z=\frac{1}{\sqrt{6}}$ 和 $y=-\frac{2}{\sqrt{6}}, y=z=\frac{1}{\sqrt{6}}$ 和 $x=-\frac{2}{\sqrt{6}}$ 时 $u_{\min}=-\frac{1}{3\sqrt{6}}$; 当 $x=y=-\frac{1}{\sqrt{6}}$ 和 $z=\frac{2}{\sqrt{6}}, x=z=-\frac{1}{\sqrt{6}}$ 和 $y=\frac{2}{\sqrt{6}}, y=z=-\frac{1}{\sqrt{6}}$ 和 $x=\frac{2}{\sqrt{6}}$ 时 $u_{\max}=\frac{1}{3\sqrt{6}}$; (b) 当 $x=1, y=1, z=1$ 时有条件极大值 $u=2$. **3664.** 当 $x=y=z=\frac{\pi}{6}$ 时 $u_{\max}=\frac{1}{8}$. **3665.** $u_{\min}=\lambda_1$ 和 $u_{\max}=\lambda_2$, 其中 λ_1 和 λ_2 是方程 $\lambda^2-\left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\beta}{b^2}+\frac{\sin^2\gamma}{c^2}\right)\lambda+\left(\frac{\cos^2\alpha}{b^2c^2}+\frac{\cos^2\beta}{a^2c^2}+\frac{\cos^2\gamma}{a^2b^2}\right)=0$ $(\lambda_1<\lambda_2)$ 的根. **3666.** 设$\rho=\frac{\xi}{\cos\alpha}, u_{\min}=R^2+\rho^2-2\rho R\sqrt{1-\frac{(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2}{A^2+B^2+C^2}}$; $u_{\max}=R^2+\rho^2+2\rho R\times\sqrt{1-\frac{(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2}{A^2+B^2+C^2}}$. **3667.** 当 $x_i=\frac{1}{a_i}\left(\sum_{j=1}^n\frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 时 $u_{\min}=\left(\sum_{j=1}^n\frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}$. **3668.** 当 $x_i=\frac{a}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 时 $u_{\min}=\frac{a^p}{n^{p-1}}$. **3669.** 当 $x_i=\sqrt{\frac{\alpha_i}{\beta_i}}\left(\sum_{j=1}^n\sqrt{\alpha_j\beta_j}\right)^{-1}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 时 $u_{\min}=\left(\sum_{j=1}^n\sqrt{\alpha_j\beta_j}\right)^2$. **3670.** 当 $\frac{x_1}{\alpha_1}=\frac{x_2}{\alpha_2}=\cdots=\frac{x_n}{\alpha_n}=\frac{a}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}$ 时 $u_{\max}=\left(\frac{a}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\alpha_1^{\alpha_1}\alpha_2^{\alpha_2}\cdots\alpha_n^{\alpha_n}$. **3671.** 由方程 $|a_{ij}-\lambda\delta_{ij}|=0$ 确定的极值 $u=\lambda$, 其中当 $i\neq j$ 时 $\delta_{ij}=0$, 而 $\delta_{ii}=1$. **3675.** $\inf z=-5, \sup z=-2$. **3676.** $\inf z=-75; \sup z=125$. **3677.** $\inf z=0; \sup z=1$. **3678.** $\inf u=0; \sup u=300$. **3679.** $\inf u=-\frac{1}{2}; \sup u=1+\sqrt{2}$. **3680.** $\operatorname{Inf} u=0; \sup u=\mathrm{e}^{-1}\approx 0.37$. **3682.** 不是. **3683.** 极小值为 $\frac{n}{\sqrt[n]{a}}$. **3684.** 加项相等. **3685.** 因子等于 $x_i=\frac{\left(a\alpha_1^{\frac{1}{\alpha_1}}\alpha_2^{\frac{1}{\alpha_2}}\cdots\alpha_n^{\frac{1}{\alpha_n}}\right)^{\frac{\frac{1}{\alpha_i}}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n}}}}{(\alpha_i)^{\frac{1}{\alpha_i}}}$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 其中 α_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 为相应的幂指数; 和的最小值为 $\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n}\right)\left(a\alpha_1^{\frac{1}{\alpha_1}}\alpha_2^{\frac{1}{\alpha_2}}\cdots\alpha_n^{\frac{1}{\alpha_n}}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n}}}$. **3686.**

$x = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i, y = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i$, 其中 $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$. **3687.** 浴缸的尺寸为 $\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$. **3688.** $H = 2R = 2\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$, 其中 R 为圆柱面的半径, H 为它的母线. **3689.** $x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i, y = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} y_i, z = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} z_i$, 其中 $N = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)^2}$. 距离的平方和最小值为 $n - 2N + \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$. **3690.** 圆锥的母线与其底之间的夹角为 $\arcsin\frac{2}{3}$. **3691.** 角锥侧面与其底面之间的夹角为 $\arcsin\frac{2}{3}$. **3692.** 矩形的边长为 $\frac{2p}{3}$ 和 $\frac{p}{3}$. **3693.** 三角形的边长为 $\frac{p}{2}, \frac{3p}{4}, \frac{3p}{4}$. **3694.** 长方体的尺寸为 $\frac{2R}{\sqrt{3}}, \frac{2R}{\sqrt{3}}$ 和 $\frac{R}{\sqrt{3}}$. **3695.** 长方体的高为圆锥高的$\frac{1}{3}$. **3696.** 长方体的尺寸为 $\frac{2a}{\sqrt{3}}, \frac{2b}{\sqrt{2}}$ 和 $\frac{2c}{\sqrt{2}}$. **3697.** 当 $\alpha \geqslant \arctan\sqrt{2}$ 时, 长方体的高 $h = l\sin\alpha \cdot \frac{\tan\alpha - \sqrt{2}}{2\tan\alpha - \sqrt{2}}$, 而当 $0 < \alpha < \arctan\sqrt{2}$ 时 $h = 0$. **3698.** 长方体的尺寸为 a, b 和 $\frac{c}{2}$. **3699.** $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

3700. $d = \frac{1}{\pm\Delta}\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}$, 其中 $\Delta = \sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p_1 & m_1 \\ p_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}$.

3701. $\frac{7}{4\sqrt{2}}$. **3702.** 半轴的平方 $a^2 = \lambda_1$ 和 $b^2 = \lambda_2$ 是方程 $(1 - \lambda A)(1 - \lambda C) - \lambda^2 B^2 = 0$ 的根. **3703.** 半轴的平方 $a^2 = \lambda_1, b^2 = \lambda_2$ 和 $c^2 = \lambda_3$ 是方程 $\begin{vmatrix} A\lambda - 1 & D\lambda & F\lambda \\ D\lambda & B\lambda - 1 & E\lambda \\ F\lambda & E\lambda & C\lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$ 的根. **3704.** $\frac{\pi ab}{|C|}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. **3705.** $\frac{\pi abc}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma}}$. **3707.** 入射角等于 $\arcsin\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right)$; 偏向角等于 $2\arcsin\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right) - \alpha$. **3708.** 未知系数 a 和 b 由方程组 $a[xx] + b[x1] = [xy], a[x1] + bn = [y1]$ 确定, 其中 $[xy] = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, [x1] = \sum_{i=1}^{n} x_i, [y1] = \sum_{i=1}^{n} y_i$. 当 $\sum_{i \neq j}(x_i - x_j)^2 \neq 0$ 时, 问题有确定的解. **3709.** $\tan 2\alpha = \frac{2(\overline{x}\cdot\overline{y} - \overline{xy})}{\left[\overline{x^2} - (\overline{x})^2\right] - \left[\overline{y^2} - (\overline{y})^2\right]}, p = \overline{x}\cos\alpha + \overline{y}\sin\alpha$, 其中 $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$等为平均值. **3710.** $4x - \frac{7}{2}; \Delta_{\min} = \frac{1}{2}$.

第七章

3711. 当 $-\infty < y < 0$ 时 $F(y) = 1$; 当 $0 \leqslant y \leqslant 1$ 时 $F(y) = 1 - 2y$; 当 $1 < y < +\infty$ 时 $F(y) = -1$. **3712.** 当 $y = 0$ 时 $F(y)$ 不连续. **3713.** (a) $\frac{\pi}{4}$; (b) 1; (c) $\frac{8}{3}$; (d) $\ln\frac{2e}{1+e}$; (e) 0. **3715.** 不能. **3716.** 不能. **3717.** $F'(x) = 2xe^{-x^5} - e^{-x^3} - \int_x^{x^2} y^2 e^{-xy^2}\,dy$. **3718.** (a) $-(e^{\alpha|\sin\alpha|}\sin\alpha + e^{\alpha|\cos\alpha|}\cos\alpha) + \int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1 - x^2}e^{\alpha\sqrt{1 - x^2}}\,dx$; (b) $\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{b+\alpha}\right)\sin\alpha \cdot (b + \alpha) - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{a+\alpha}\right)\sin\alpha(a + \alpha)$; (c) $\frac{2}{\alpha}\ln(1 + \alpha^2)$; (d) $f(\alpha, -\alpha) + 2\int_0^\alpha f'_u(u, v)\,dx$, 其中 $u = x + \alpha$ 和 $v = x - \alpha$; (e) $2\alpha\int_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha}\sin(y^2 + \alpha^4 - \alpha^2)\,dy + 2\int_0^{\alpha^2}\sin 2x^2\cos 2\alpha x\,dx - 2\alpha\int_0^{\alpha^2}dx\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}\cos(x^2 + y^2 - \alpha^2)\,dy$. **3719.** $F''(x) = 3f(x) + 2xf'(x)$. **3720.** 当 $x \in (a, b)$ 时 $F''(x) = 2f(x)$, 当 $x \notin (a, b)$ 时 $F''(x) = 0$. **3721.1.** $F''(x) = \frac{\Delta^2 f(x)}{h^2}$, 其中 $\Delta^2 f(x) = f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x)$. **3721.2.** $F^{(n)}(x) = (n - 1)!f(x)$. **3723.** $4x - \frac{11}{3}$. **3724.** $0.934 + 0.428x$(近似!). **3725.** $\frac{dE}{dk} = \frac{E - F}{k}; \frac{dF}{dk} = \frac{E}{k(1 - k^2)} - \frac{F}{k}$. **3729.** $F''_{xy}(x, y) = x(2 - 3y^2)f(xy) + \frac{x}{y^2}f\left(\frac{x}{y}\right) + x^2y(1 - y^2)f'(xy)$. **3732.** $\pi\ln\frac{|a| + |b|}{2}$. **3733.** 当 $|a| \leqslant 1$ 时 0; 当 $|a| > 1$ 时 $\pi\ln a^2$. **3734.** $\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} a\ln(1 + |a|)$. **3735.** $\pi\arcsin a$. **3736.** $\frac{\pi}{2}\ln(1 + \sqrt{2})$. **3737.** $\ln\frac{b+1}{a+1}$. **3738.** (a) $\arctan\frac{b - a}{1 + (a + 1)(b + 1)}$; (b) $\frac{1}{2}\ln\frac{b^2 + 2b + 2}{a^2 + 2a + 2}$. **3741.** $a \geqslant 0$. **3742.** $\max(p, q) > 1$. **3743.** $\left|\frac{p - 1}{q}\right| < 1$. **3744.** $p < 1$. **3745.** $n < 0$ 和 $n > \frac{1}{2}$. **3746.** $p > \frac{1}{2}$. **3747.**

当 $a > 0$ 和 $a = \frac{2n-1}{2}\pi$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 时收敛. **3748.** 当 $n > 4$ 时收敛. **3749.** 当 $p > 1$ 时收敛. **3750.** 当 $-1 < n < 2$ 时收敛. **3755.2.** (a) 一致收敛; (b) 非一致收敛. **3756.** (a) 非一致收敛; (b) 一致收敛. **3757.** 一致收敛. **3758.** 一致收敛. **3759.** 非一致收敛. **3760.** (a) 一致收敛; (b) 一致收敛. **3761.** 一致收敛. **3762.** 非一致收敛. **3763.** (a) 一致收敛; (b) 非一致收敛. **3764.** (a) 非一致收敛; (b) 一致收敛. **3765.** $b \geqslant 10^{70}$. **3766.** (a) 一致收敛; (b) 非一致收敛. **3767.** 一致收敛. **3768.** 非一致收敛. **3769.** 一致收敛. **3770.** 一致收敛. **3772.** 不能. **3776.1.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. **3777.1.** 1. **3778.2.** $a = \pm 1$. **3779.** 连续. **3780.** 连续. **3781.** 连续. **3782.** 连续. **3783.** 在 $\alpha = 0$ 处不连续. **3784.** $\frac{(-1)^m m!}{n^{m+1}}$. **3785.** $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} a^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}$. **3788.** $\ln \frac{b}{a}$. **3790.** $\ln \frac{b}{a}$. **3791.** 0. **3792.** $\frac{\pi}{2} \ln \frac{a}{b}$. **3793.** $\frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{\alpha}$. **3794.** $\ln \frac{(2\alpha)^{2\alpha}(2\beta)^{2\beta}}{(\alpha+\beta)^{2\alpha+2\beta}}$. **3795.** $\arctan \frac{\beta}{m} - \arctan \frac{\alpha}{m} (m \neq 0)$. **3796.** $\frac{1}{2} \ln \frac{\beta^2+m^2}{\alpha^2+m^2}$. **3797.** $-\pi(1 - \sqrt{1-a^2})$. **3798.** $\pi \ln \frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}$. **3799.** $\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha \cdot (1 + |\alpha| - \sqrt{1+\alpha^2})$. **3800.** $\frac{\pi}{|\beta|} \ln(|\alpha| + |\beta|)$ $(\beta \neq 0)$. **3801.** $\frac{\pi}{2} \ln \frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^\alpha \beta^\beta}$ $(\alpha > 0, \beta > 0)$. **3802.** $\frac{2\pi}{3}[\alpha\beta(\alpha+\beta) + \alpha^3 \ln \alpha + \beta^3 \ln \beta - (\alpha^3+\beta^3)\ln(\alpha+\beta)]$ $(\alpha > 0, \beta > 0)$. **3803.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. **3804.** $\sqrt{\frac{\pi}{a}} \mathrm{e}^{-\frac{ac-h^2}{a}}$. **3805.** $\frac{(a+2b^2)a_1 - 4abb_1 + 2a^2c_1}{2a^2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \mathrm{e}^{-\frac{ac-b^2}{a}}$. **3806.** $\sqrt{\frac{\pi}{a}} \mathrm{e}^{\frac{b^2}{4a}}$. **3807.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathrm{e}^{-2a}$. **3808.** $\sqrt{\pi}(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})$. **3809.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a}}$. **3810.** (a) $\frac{b\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} \mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a}}$; (b) $(-1)^n \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}} \frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}b^{2n}}(\mathrm{e}^{-b^2})$. **3812.1.** $\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \beta$. **3812.2.** 奇函数. 当 $x > 0$ 时在点 $2k\pi$ 处有极小值, 在点 $(2k-1)\pi$ 处有极大值, 其中 $k = 1, 2, 3, \cdots$. 当 $x \to +\infty$ 时有渐近线 $y = \frac{\pi}{2}$, 当 $x \to -\infty$ 时有渐近线 $y = -\frac{\pi}{2}$. **3813.** $\pi\frac{|\beta|}{2} - \sqrt{\pi\alpha}$. **3814.** $\frac{1}{2} \ln \left|\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right|$. **3815.** 当 $|\alpha| < |\beta|$ 时 0; 当 $|\alpha| = |\beta|$ 时 $\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \alpha$; 当 $|\alpha| > |\beta|$ 时 $\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha$. **3816.** $\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \alpha$. **3817.** $\frac{\pi}{2}|\alpha|$. **3818.** $\frac{3\pi}{8}\alpha|\alpha|$. **3819.** $\frac{\pi}{4}$. **3820.** $\frac{3}{8} \ln \left|\frac{\alpha}{\beta}\right|$. **3821.** $\frac{\pi}{4}$. **3822.** $\frac{\alpha+\beta}{2} \arctan \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2} \arctan \frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{k}{4} \ln \frac{k^2+(\alpha-\beta)^2}{k^2+(\alpha+\beta)^2}$. **3823.** 当 $|x| < 1$ 时 $D(x) = 1$; 当 $x = \pm 1$ 时 $D(x) = \frac{1}{2}$; 当 $|x| > 1$ 时 $D(x) = 0$. **3824.** (a) $\pi \operatorname{sgn} a \cos ab$; (b) $\pi \operatorname{sgn} a \sin ab$. **3825.** $\frac{\pi}{2} \mathrm{e}^{-|\alpha|}$. **3826.** $\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha \mathrm{e}^{-|\alpha|}$. **3827.** $\frac{\pi}{4}(1 - \mathrm{e}^{-2})$. **3828.** $\frac{\pi(1+|\alpha|)}{4} \mathrm{e}^{-|\alpha|}$. **3829.** $\frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}} \cos \frac{b\alpha}{a} \mathrm{e}^{\frac{-|\alpha|}{a}\sqrt{ac-b^2}}$. **3830.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. **3831.** $\sqrt{\frac{\pi}{|a|}} \sin\left(\frac{ac-b^2}{a} + \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \alpha\right)$. **3832.** $\sqrt{\pi} \cos\left(a^2 + \frac{\pi}{4}\right)$. **3833.** $\sqrt{\pi} \sin\left(a^2 + \frac{\pi}{4}\right)$. **3835.** (a) $\frac{n!}{p^{n+1}}$; (b) $\frac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}$; (c) 当 $p > \alpha$ 时 $\frac{1}{p-\alpha}$; (d) $\frac{1}{(p+\alpha)^2}$; (e) $\frac{p}{p^2+1}$; (f) $\ln\left(1 + \frac{1}{p}\right)$; (g) $\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}} \mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{4p}}$. **3837.** (a) 1; (b) $x^2 + \frac{1}{2}$; (c) e^{2ax+a^2}; (d) $\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{4}} \cos ax$. **3839.** $\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, 其中 $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$. **3843.** $\frac{\pi}{8}$. **3844.** $\frac{\pi a^4}{16}$. **3845.** $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. **3846.** $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. **3847.** $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. **3848.** $\frac{3\pi}{512}$. **3849.** $\frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}$. **3850.** $\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}$. **3851.** $\frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}$ $(0 < m < n)$. **3852.** $\mathrm{B}(n-m, m)$ $(0 < m < n)$. **3853.** $\frac{a^{-p}}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}} \cdot \mathrm{B}\left(\frac{m+1}{n}, p - \frac{m+1}{n}\right)$ $\left(0 < \frac{m+1}{n} < p\right)$. **3854.** $\frac{(b-a)^{m+n+1}}{(a+c)^{n+1}(b+c)^{m+1}} \mathrm{B}(m+1, n+1)$ $(m > -1, n > -1)$. **3855.** $\frac{1}{m}\mathrm{B}\left(\frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{n}\right)$ $(n < 0$ 或者 $n > 1)$. **3856.** $\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$ $(m > -1, n > -1)$. **3857.** $\frac{\pi}{2\cos\frac{n\pi}{2}}$ $(|n| < 1)$. **3858.** $\frac{2^{n-1}}{(1-k^2)^{\frac{n}{2}}} \mathrm{B}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$ $(n > 0)$. **3859.** $\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n > 0)$. **3860.** $\frac{1}{|n|}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$ $\left(\frac{m+1}{n} > 0\right)$. **3861.** $\Gamma(p+1)$ $(p > -1)$. **3862.** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[\frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}}\right]$ $(p > -1)$. **3863.** $-\frac{\pi^2 \cos p\pi}{\sin^2 p\pi}$ $(0 < p < 1)$. **3864.** (a) $\pi^3 \frac{1+\cos^2 p\pi}{\sin^3 p\pi}$ $(0 < p < 1)$; (b) $\frac{2}{27}\pi^2$; (c) $\frac{3\pi^3}{32\sqrt{2}}$. **3865.** $\ln\left|\frac{\tan\frac{p\pi}{2}}{\tan\frac{q\pi}{2}}\right|$ $(0 < p < 1, 0 < q < 1)$. **3866.** $\pi \cot \pi p$. **3867.** $\frac{\pi}{2\beta} \tan \frac{\alpha\pi}{2\beta}$. **3868.** $\ln\sqrt{2\pi}$. **3869.** $\ln\sqrt{2\pi} + a(\ln a - 1)$. **3870.** $\frac{1}{\pi}\left(1 + \ln\frac{\pi}{2}\right)$. **3871.** $\frac{1}{4n}$. **3876.** $\frac{\pi a^{m-1}}{2\Gamma(m)\cos\frac{m\pi}{2}}$ $(a > 0)$.

3877. $\frac{\pi a^{m-1}}{2\Gamma(m)\sin\frac{m\pi}{2}}$ $(a>0)$. **3879.** $a\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2n}\right)$. **3880.** $\frac{\frac{2a^2}{n}\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}$. **3881.** $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda x\,\mathrm{d}\lambda$. **3882.** $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\lambda}{\lambda}\sin\lambda x\,\mathrm{d}\lambda$. **3883.** $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda(x-a)-\sin\lambda(x-b)}{\lambda}\,\mathrm{d}\lambda$. **3884.** $f(x)=\frac{2h}{\pi a}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos a\lambda}{\lambda^2}\cos\lambda x\,\mathrm{d}\lambda$. **3885.** $\frac{1}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-a\lambda}\cos\lambda x\,\mathrm{d}\lambda$. **3886.** $\frac{x^2}{a^2+x^2}=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-a\lambda}\sin\lambda x\,\mathrm{d}\lambda$. **3887.** $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda\pi}{1-\lambda^2}\sin\lambda x\,\mathrm{d}\lambda$. **3888.** $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\frac{\lambda\pi}{2}}{1-\lambda^2}\cos\lambda x\,\mathrm{d}\lambda$. **3889.** $f(t)=\frac{2A\omega}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\frac{2\pi n\lambda}{\omega}}{\lambda^2-\omega^2}\sin\lambda t\,\mathrm{d}\lambda$. **3890.** $f(x)=\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{\lambda^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}\lambda$. **3891.** $f(x)=\frac{\alpha}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{(\lambda-\beta)^2+\alpha^2}+\frac{1}{(\lambda+\beta)^2+\alpha^2}\right]\cdot\cos\lambda x\,\mathrm{d}\lambda$. **3892.** $f(x)=\frac{4\alpha\beta}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda\sin\lambda x}{[(\lambda-\beta)^2+\alpha^2][(\lambda+\beta)^2+\alpha^2]}\,\mathrm{d}\lambda$. **3893.** $\mathrm{e}^{-x^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{4}}\cos\lambda x\,\mathrm{d}\lambda$. **3894.** $x\mathrm{e}^{-x^2}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\lambda\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{4}}\sin\lambda x\,\mathrm{d}\lambda$. **3895.** (a) $\mathrm{e}^{-x}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{1+\lambda^2}\,\mathrm{d}\lambda$ $(0\leqslant x<+\infty)$; (b) $\mathrm{e}^{-x}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda\sin\lambda x}{1+\lambda^2}\,\mathrm{d}\lambda$ $(0<x<+\infty)$. **3896.** $F(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}$. **3897.** $F(x)=-\mathrm{i}\sqrt{\frac{8}{\pi}}\frac{\alpha x}{(x^2+\alpha^2)^2}$. **3898.** $F(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. **3899.** $F(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2+\alpha^2}{2}}\cosh\alpha x$. **3900.** (a) $\varphi(y)=\mathrm{e}^{-y}$ $(y\geqslant 0)$; (b) $\psi(y)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{y}{1+y^2}$ $(y\geqslant 0)$.

第八章

3901. $\frac{1}{4}$. **3902.** $\underline{S}=\frac{40}{3}-\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2}$; $\overline{S}=\frac{40}{3}+\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2}$; $13\frac{1}{3}$. **3903.** 9.88. 精确值 $2\pi(7-\sqrt{24})\approx 13.20$. **3904.** 0.402. 精确值 0.4. **3905.** $\delta<0.000\,22$. **3906.** 1. **3907.** $\frac{1}{40}$. **3908.** $\frac{\pi a^3}{3}$. **3910.** $I=F(A,B)-F(A,b)-F(a,B)+F(a,b)$. **3912.** (a) 负的; (b) 负的; (c) 正的. **3913.** $\frac{1}{4}$. **3914.** $1.96<I<2$. **3915.** $a^2+b^2+\frac{R^2}{2}$. **3916.** $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x$. **3917.** $\int_{-2}^2\mathrm{d}x\int_{\frac{|x|}{2}}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-2y}^{2y}f(x,y)\,\mathrm{d}x$. **3918.** $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x+1}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}y\int_{y-1}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x$. **3919.** $\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_{-1}^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$. **3920.** $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$. **3921.** $\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$. **3922.** $\int_{-2}^{-1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_{-1}^1\mathrm{d}x\left\{\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y\right\}+\int_1^2\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y$. **3924.** $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{y}f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_2^4\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{2}f(x,y)\,\mathrm{d}x$. **3925.** $\int_{-1}^0\mathrm{d}y\int_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}}f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_0^8\mathrm{d}y\int_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y}f(x,y)\,\mathrm{d}x$. **3926.** $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$. **3927.** $\int_{-1}^0\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$. **3928.** $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$. **3929.** $\int_0^a\mathrm{d}y\left\{\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a}f(x,y)\,\mathrm{d}x\right\}+\int_a^{2a}\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a}f(x,y)\,\mathrm{d}x$. **3930.** $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\mathrm{e}^y}^{\mathrm{e}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$. **3931.** $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)\,\mathrm{d}x-\int_{-1}^0\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y}f(x,y)\,\mathrm{d}x$. **3932.** $\frac{p^5}{21}$. **3933.** $\left(2\sqrt{2}-\frac{8}{3}\right)a\sqrt{a}$. **3934.** $\frac{a^4}{2}$. **3935.** $14a^4$. **3936.** $\frac{35\pi a^4}{12}$. **3937.** $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a rf(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,\mathrm{d}r$. **3938.** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\cos\varphi}rf(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,\mathrm{d}r$. **3939.** $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{|a|}^{|b|}rf(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,\mathrm{d}r$. **3940.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}\csc(\varphi+\frac{\pi}{4})}rf(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,\mathrm{d}r$. **3941.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}rf(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{a}{\sin\varphi}}rf(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,\mathrm{d}r+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}rf(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,\mathrm{d}r$. **3942.** 若积分域是

由中心在原点的两同心圆和由原点引出的两条射线所围成，则将会出现题设的情况.

3943. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\mathrm{d}r + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\mathrm{d}r = \int_0^1 r\,\mathrm{d}r \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi + \int_1^{\sqrt{2}} r\,\mathrm{d}r \int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\arcsin\frac{1}{r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$. **3944.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}\csc(\varphi+\frac{\pi}{4})}^{1} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\mathrm{d}r = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} r\,\mathrm{d}r \int_{\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$. **3945.** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{2}{\cos\varphi}} rf(r)\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{12}\int_0^{2\sqrt{2}} rf(r)\,\mathrm{d}r + \int_{2\sqrt{2}}^{4} \left(\frac{\pi}{3} - \arccos\frac{2}{r}\right) rf(r)\,\mathrm{d}r$. **3946.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi \int_{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}^{\frac{1}{\cos\varphi}} \cdot rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\mathrm{d}r = \int_0^1 r\,\mathrm{d}r \int_0^{\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi + \int_1^{\sqrt{2}} r\,\mathrm{d}r \cdot \int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$. **3947.** $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\mathrm{d}r = \int_0^a r\,\mathrm{d}r \int_{-\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}}^{\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$. **3948.** $\int_0^a \mathrm{d}r \int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}} f(\varphi, r)\,\mathrm{d}\varphi$.

3949. $\int_0^a \mathrm{d}r \int_{\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}} f(\varphi, r)\,\mathrm{d}\varphi$. **3950.** $\int_0^a \mathrm{d}r \int_r^a f(\varphi, r)\,\mathrm{d}\varphi$. **3951.** $2\pi\int_0^1 rf(r)\,\mathrm{d}r$. **3952.** $\pi\int_0^1 rf(r)\,\mathrm{d}r + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\pi - 4\arccos\frac{1}{r}\right) rf(r)\,\mathrm{d}r$. **3953.** $\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\tan\varphi)\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi$. **3954.** $\frac{2\pi a^3}{3}$. **3955.** $-6\pi^2$. **3956.** $\frac{6}{5}\frac{b^2+b(b+h)+(b+h)^2+(2b+h)\sqrt{b(b+h)}}{\sqrt{a(a+h)}(\sqrt{a}+\sqrt{a+h})(\sqrt{b}+\sqrt{b+h})}$; $\frac{3}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$. **3957.** $\int_a^b u\,\mathrm{d}u \int_\alpha^\beta f(u, uv)\,\mathrm{d}v$. **3958.** $\frac{1}{2}\int_1^2 \mathrm{d}u \int_{-u}^{4-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)\mathrm{d}v$. **3959.** $4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 v\cos^3 v\,\mathrm{d}v \int_0^a uf(u\cos^4 v, u\sin^4 v)\,\mathrm{d}u$. **3961.** $u = xy, v = x - y$. **3962.** $\int_{-1}^1 f(u)\,\mathrm{d}u$. **3963.** $2\int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2}f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)\,\mathrm{d}u$. **3964.** $\ln 2\int_1^2 f(u)\,\mathrm{d}u$. **3965.** $\frac{\pi}{2}$. **3966.** $\frac{4}{3}$. **3967.** $\frac{2}{3}\pi ab$. **3968.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. **3969.** $543\frac{11}{15}$. **3970.** $1\frac{37}{128} - \ln 2$. **3971.** 2π. **3972.** $\frac{9}{16}\pi$. **3973.** $\frac{5}{3} + \frac{\pi}{2}$. **3974.** $\frac{4}{3}\pi + 8\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. **3975.** 6. **3976.** $\frac{4}{3}(4 - 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3})$. **3978.** $f(0,0)$. **3979.** $\frac{2}{t}F(t)$, 其中 $t > 0$. **3980.** $\iint\limits_{(x-t)^2+(y-t)^2\leqslant 1} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. **3981.** $F'(t) = \int_0^{2\pi} tf(t\cos\varphi, t\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$. **3984.** $\left(\frac{15}{8} - 2\ln 2\right)a^2$. **3985.** $\frac{2}{3}(p+q)\sqrt{pq}$. **3986.** πa^2. **3987.** $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}a^2$. **3988.** $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{2}}{3}\ln(1+\sqrt{2})$. **3989.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **3990.** $a^2\left(\frac{\sqrt{7}}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{14}}{8}\right)$. **3991.** $\frac{\pi ab}{4}\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right)$. **3992.** $\frac{ab}{3}\left[\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\left(\frac{a^4}{h^4} + \frac{b^4}{k^4}\right) + \frac{a^2b^2}{h^2k^2}\right]$. **3993.** $\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right)$. **3994.** (a) $\frac{a^4bk(ak+2bh)}{6h^2(ak+bh)^2}$; (b) $\frac{1}{1\,260}\frac{(ab)^5}{c^8}$. **3995.** $\frac{ab}{70}$. **3996.** $\frac{(\beta-\alpha)(b^2-a^2)}{2(\alpha+1)(\beta+1)}$. **3997.** $\frac{a^2}{2}\ln 2$. **3998.** (a) $\frac{4}{3}(q-p)(s-r)$; (b) $\frac{1}{15}(b^5-a^5)(c^{-3}-d^{-3})$; (c) $\frac{q-p}{(p+1)(q+1)}\left(b^{\frac{q+1}{q-p}} - a^{\frac{q+1}{q-p}}\right)\left(c^{-\frac{p+1}{q-1}} - d^{-\frac{p+1}{q-1}}\right)$. **3999.** (a) $\frac{65}{108}ab$; (b) $\frac{189}{16}\left(\arctan\frac{1}{3} + \frac{12}{25}\right)ab$. **4000.** $\frac{c^2}{6}(\sqrt{10}-2)\arcsin\frac{1}{3}$. **4001.** $\frac{\pi}{|\delta|}$. **4002.** $\frac{c^2}{4}[(v_2-v_1)(\sinh 2u_2 - \sinh 2u_1) - (u_2-u_1)(\sin 2v_2 - \sin 2v_1)]$. **4003.** $\frac{2}{3}\pi a^2$. **4004.** $\frac{6\pi}{7\sqrt{7}}$. **4007.** $\frac{5}{6}$. **4008.** $\frac{\pi R^2 a}{4} - \frac{2}{3}R^3$. **4009.** $\frac{88}{105}$. **4010.** π. **4011.** π. **4012.** $\frac{17}{12} - 2\ln 2$. **4013.** $\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)a^3$. **4014.** $\frac{\pi}{8}$. **4015.** $\frac{45}{32}\pi$. **4016.** $\frac{16}{9}a^3$. **4017.** $\frac{\pi a^3}{8}$. **4018.** $\pi(1 - \mathrm{e}^{-R^2})$. **4019.** $2a^2c\frac{(\beta-\alpha)(\pi-2)}{\pi^2}$. **4020.** $\frac{\pi}{8}$. **4021.** $\frac{1}{3}\pi abc\,(2 - \sqrt{2})$. **4022.** $\frac{4}{3}\pi abc(2\sqrt{2}-1)$. **4023.** $\frac{3\pi abc}{8}$. **4024.** $\frac{2}{3}\pi abc$. **4025.** $\frac{abc}{3}$. **4026.** $\frac{2}{9}abc(3\pi + 20 - 16\sqrt{2})$. **4027.** $\frac{\pi(b^3-a^3)}{12}$. **4028.** $\frac{9}{2}a^4$. **4029.** $\frac{3}{4}$. **4030.** $\frac{a^2c}{\pi}\ln\frac{\beta}{\alpha}$. **4031.** $\frac{8}{35}$. **4032.** $\frac{75}{256}\pi abc$. **4033.** (a) $\frac{\pi^4a^2c}{128}$; (b) $(n-m)(\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-2})a^2$. **4034.** $\frac{abc}{3n^2}\frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}$. **4035.** $\frac{abc}{2m+n}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{n}\right)}$. **4036.** $\frac{2}{3}\pi a^2(2\sqrt{2}-1)$. **4037.** $16a^2$. **4038.** $8a^2\arcsin\frac{b}{a}$. **4039.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. **4040.** $8a^2$. **4041.** $\pi\sqrt{2}$. **4042.** $\frac{\pi a^2}{2}$. **4043.** $-\frac{2\pi}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(1 + \frac{7}{4}\ln 3\right) + \frac{8}{3}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$. **4044.** $\frac{a^2}{9}(20-3\pi)$. **4045.** (a) $2a^2$; (b) $\frac{\pi}{6}[3\sqrt{10} + \ln(3+\sqrt{10})]$;

(c) $\frac{1}{3}abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^{-1}\left[\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{c^3}\right]$; (d) $\frac{4}{3}ab(2\sqrt{2}-1)\arctan\sqrt{\frac{a}{b}}$; (e) $\frac{\pi}{2}\ln(\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1})$. **4046.** $S=4\pi(3+2\sqrt{3})a^2; V=\frac{8\pi}{\sqrt{3}}a^3$. **4047.** $(\varphi_2-\varphi_1)\ (\sin\psi_2-\sin\psi_1)R^2$, 其中 φ_1,φ_2 为经线的经度, ψ_1,ψ_2 为纬线的纬度, R 为球的半径. **4048.** $\pi\left\{a\sqrt{a^2+h^2}+h^2\ln\frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{h}\right\}$. **4049.** $S=a(\varphi_2-\varphi_1)[b(\psi_2-\psi_1)+a(\sin\psi_2-\sin\psi_1)]; 4\pi^2ab$. **4050.** $\omega=\arcsin\frac{bc}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}$; $\omega\approx\frac{bc}{a^2}$. **4051.** $\frac{\rho_0a^2}{3}[2+\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})]$. **4052.** $x_0=-\frac{a}{2}; y_0=\frac{8}{5}a$. **4053.** $x_0=y_0=\frac{a}{5}$. **4054.** $x_0=y_0=\frac{256}{315\pi}a$. **4055.** $x_0=\frac{a^2b}{14c^2}; y_0=\frac{ab^2}{14c^2}$. **4056.** $x_0=y_0=\frac{\pi a}{8}$. **4057.** $x_0=\frac{5}{6}a; y_0=\frac{16}{9\pi}a$. **4058.** $x_0=\pi a; y_0=\frac{5}{6}a$. **4059.** $x_0=-\frac{a}{5}; y_0=0$. **4060.** 抛物线 $y_0=\frac{1}{8}\sqrt{30px_0}$. **4061.** $I_x=\frac{bh^3}{12}; I_y=\frac{h|b_1^3-b_2^3|}{12}\ (b=|b_1-b_2|)$. **4062.** $I_x=I_y=\frac{a^4}{16}(16-5\pi)$. **4063.** $I_x=\frac{21\pi a^4}{32}; I_y=\frac{49\pi a^4}{32}$. **4064.** $I_x=I_y=\frac{3\pi a^4}{4\sqrt{2}}$. **4065.** $I_x=I_y=\frac{9}{8}a^4$. **4066.1.** $I_0=\frac{\pi a^4}{8}$. **4066.2.** $\frac{a^4}{12}$. **4069.** $I_\alpha=\frac{a^4}{32\sqrt{3}}$. **4070.** $X=\rho gah^2$, $Y=0$, 其中 X, Y 为压力在 Ox 轴和 Oy 轴上的投影, ρ 为液体密度, g 为重力加速度. **4071.** $P_1=\pi a^2\delta g\left(h-\frac{2}{3}a\right); P_2=\pi a^2\delta g\left(h+\frac{2}{3}a\right)$ (g 为重力加速度). **4072.** 坐标轴位于过圆柱轴的垂直平面上, Ox 轴是水平的, 而 Oz 轴是垂直的, 压力在坐标 Oxz 的轴上的投影分别等于: $X_1=-\pi a^2\delta g\left(h-\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\sin\alpha, Z_1=-\pi a^2\delta g\left(h-\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\cos\alpha; X_2=\pi a^2\delta g\left(h+\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\sin\alpha$, $Z_2=\pi a^2\delta g\left(h+\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\cos\alpha$ (g 为重力加速度). **4073.** 引力在 Ox, Oy, Oz 轴上的投影分别等于: $X=0, Y=0, Z=-\frac{2km M}{a^2h}\times\left\{|b|-|b-h|+\sqrt{a^2+(b-h)^2}-\sqrt{a^2+b^2}\right\}$, 其中 k 为引力常数. **4074.** $p_{\text{cp}}=\frac{1}{2}p_0$. **4075.** $A=\frac{k\rho}{12}\left\{2ab\sqrt{a^2+b^2}+a^3\ln\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a}+b^3\ln\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}\right\}$. **4076.** $\frac{1}{364}$. **4077.** $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}$. **4078.** $\frac{1}{48}$. **4079.** $\frac{4}{5}\pi abc$. **4080.** $\frac{\pi}{6}$. **4081.** $\int_0^1\mathrm{d}x\left\{\int_0^x\mathrm{d}z\int_0^{1-x}f(x,y,z)\,\mathrm{d}y+\int_x^1\mathrm{d}z\int_{z-x}^{1-x}f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\right\}=\int_0^1\mathrm{d}z\left\{\int_0^z\mathrm{d}y\int_{z-y}^{1-y}f(x,y,z)\,\mathrm{d}x+\int_x^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y}f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\right\}$. **4082.** $\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{|x|}^1\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}}f(x,y,z)\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}z\int_{-z}^z\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}}f(x,y,z)\,\mathrm{d}x$. **4083.** $\int_0^1\mathrm{d}x\left\{\int_0^{x^2}\mathrm{d}z\int_0^1f(x,y,z)\,\mathrm{d}y+\int_{x^2}^{x^2+1}\mathrm{d}z\int_{\sqrt{z-x^2}}^1f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\right\}=\int_0^1\mathrm{d}z\left\{\int_0^{\sqrt{z}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{z-y^2}}^1f(x,y,z)\,\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{z}}^1\mathrm{d}y\int_0^1f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\right\}+\int_1^2\mathrm{d}z\int_{\sqrt{z-1}}^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{z-y^2}}^1f(x,y,z)\,\mathrm{d}x$. **4084.** $\frac{1}{2}\int_0^x(x-\zeta)^2f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$. **4085.** $\frac{1}{2}\int_0^1(2-z^2)f(x)\,\mathrm{d}z+\frac{1}{2}\int_1^2(2-z^2)f(x)\,\mathrm{d}z$. **4086.** $F(A,B,C)-F(A,B,c)-F(A,b,C)-F(a,B,C)+F(A,b,c)+F(a,B,c)+F(a,b,C)-F(a,b,c)$. **4087.** $\frac{\pi}{10}$. **4088.** $\frac{\pi}{15}(2\sqrt{2}-1)$. **4089.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\arctan\frac{1}{\cos\varphi}}\cos\psi\,\mathrm{d}\psi\int_{\frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}}^{\frac{1}{\cos\varphi\cos\psi}}r^2f(r)\,\mathrm{d}r$. **4090.** $\frac{\pi^2abc}{4}$. **4091.** $\frac{16\pi}{3}$. **4092.** $\frac{2}{27}\left(\frac{1}{\alpha^3}-\frac{1}{\beta^3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)h^4\sqrt{h}$. **4093.** $\frac{1}{32}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)(b^8-a^8)\left[(\beta^2-\alpha^2)\left(1+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\right)+4\ln\frac{\beta}{\alpha}\right]$. **4094.** $\frac{6}{5}$. **4095.** $3(\mathrm{e}-2)$. **4096.** $u=\frac{4\pi}{3}\frac{R^3}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+\theta R}}$, 其中 $|\theta|<1$. **4098.** (a) $F'(t)=4\pi t^2f(t^2)$; (b) $F'(t)=\frac{3}{t}\left[F(t)+\iiint\limits_V xyzf'(xyz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right]$, 其中 $t>0, V=\{0\leqslant x\leqslant t, 0\leqslant y\leqslant t, 0\leqslant z\leqslant t\}$. **4099.** 若数 m,n,p 中有一个非偶数时, 0; 当数 m,n,p 中都是偶数时, $\frac{4\pi}{m+n+p+3}\frac{(m-1)!!(n-1)!!(p-1)!!}{(m+n+p+1)!!}$. **4100.** $\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}$. **4101.** $\frac{3}{35}$. **4102.** $\frac{7}{24}$. **4103.** $\frac{2}{3}a^3(3\pi-4)$. **4104.** $\frac{\pi a^3}{6}$. **4105.** $\frac{a^3}{24}(3\pi-4)$. **4106.** $\frac{32}{3}\pi$. **4107.** πa^3. **4108.** $\frac{\pi^2a^3}{4\sqrt{2}}$. **4109.** $\frac{1}{2}$. **4110.** $\frac{\pi}{3}(2-\sqrt{2})(b^3-a^3)$. **4111.** $\frac{\pi}{3}\frac{a^2bc}{h}$. **4112.** (a) $\frac{\pi^2}{4}abc$; (b) $\frac{\pi^2abc}{4\sqrt{2}}$. **4113.**

$\frac{5\pi abc}{12}(3-\sqrt{5})$. **4114.** $\frac{8\pi}{5}abc$. **4115.** $\frac{abc}{3}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)$. **4116.** (a) $\frac{abc}{60}\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right)\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$; (b) $\frac{abc}{3}\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^4}{\frac{a}{h}+\frac{b}{k}}$. **4117.** (a) $\frac{abc}{554\,400}$; (b) $\frac{abc}{3}$. **4118.** (a) $\frac{abc}{90}$; (b) $\frac{abc}{1\,680}$; (c) $\frac{4\pi}{35}abc$. **4119.** $\frac{9}{4}a^2$. **4120.** $\frac{1}{3}(b^3-a^3)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)$. **4121.** $\frac{4\pi}{3}a^3$. **4122.** $\frac{\pi abc^2}{3h}(1-\mathrm{e}^{-1})$. **4123.** $\frac{3}{2}abc$. **4124.** $5abc\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-\frac{1}{3}\right)$. **4125.** 37 : 27. **4126.** $V=\frac{5\pi a^3}{6}; S=\frac{\pi a^2}{6}(6\sqrt{2}+5\sqrt{5}-1)$. **4127.** $\frac{8h_1h_2h_3}{|\Delta|}$. **4128.** $\frac{4\pi h^3}{3|\Delta|}$. **4129.** $\frac{\pi^2}{3n\sin\frac{\pi}{n}}\frac{abc^2}{h}$. **4130.** $\frac{abc}{mn+mp+np}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)}$. **4131.** $\frac{3}{2}$. **4132.** $4\pi\rho_0\left(\frac{1}{k}+\frac{2}{k^2}+\frac{2}{k^3}\right)\mathrm{e}^{-k}$. **4133.** $\left(0,0,\frac{3}{4}c\right)$. **4134.** $x_0=y_0=\frac{2}{5}a; z_0=\frac{7}{30}a^2$. **4135.** $x_0=\frac{7}{18}p; y_0=0; z_0=\frac{7}{176}p$. **4136.** $x_0=\frac{3}{8}a; y_0=\frac{3}{8}b; z_0=\frac{3}{8}c$. **4137.** $x_0=y_0=0; z_0=\frac{3a}{8}$. **4138.** $x_0=y_0=1; z_0=\frac{5}{3}$. **4139.** $x_0=\frac{9\pi}{448}a; y_0=\frac{9\pi}{448}b; z_0=\frac{9\pi}{448}c$. **4140.** $x_0=y_0=0; z_0=\frac{7}{20}$. **4141.** $\frac{x_0}{a}=\frac{y_0}{b}=\frac{z_0}{c}=\frac{3}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}$. **4142.** $x_0=\alpha; y_0=\beta; z_0=\gamma$. **4143.** $I_{xy}=\frac{abc^3}{60}; I_{yz}=\frac{a^3bc}{60}; I_{zx}=\frac{ab^3c}{60}$. **4144.** $I_{xy}=\frac{4}{15}\pi abc^3; I_{yz}=\frac{4}{15}\pi a^3bc; I_{zx}=\frac{4}{15}\pi ab^3c$. **4145.** $I_{xy}=\frac{\pi abc^3}{5}; I_{yz}=\frac{\pi a^3bc}{20}; I_{xz}=\frac{\pi ab^3c}{20}$. **4146.** (a) $I_{xy}=\frac{2abc^3}{225}(15\pi-16); I_{xz}=\frac{2ab^3c}{1575}(105\pi-272); I_{yz}=\frac{2a^3bc}{1575}(105\pi-92)$; (b) $I_{xy}=\frac{7}{2}\pi abc^3; I_{xz}=\frac{4}{3}\pi ab^3c; I_{yz}=\frac{4}{3}\pi a^3bc$. **4147.** (a) $I_{yz}=\frac{15\pi^2}{256\sqrt{2}}a^3bc; I_{zx}=\frac{15\pi^2}{256\sqrt{2}}ab^3c; I_{xy}=\frac{\pi^2}{128\sqrt{2}}abc^3$; (b) $I_{yz}=\frac{1}{5n^2}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{n}\right)}a^3bc$; $I_{zx}=\frac{1}{5n^2}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{n}\right)}ab^3c; I_{xy}=\frac{1}{5n^2}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{n}\right)}\cdot abc^3$. **4148.** $I_z=\frac{14}{45}$. **4149.** (a) $I_z=\frac{4\pi}{15}(4\sqrt{2}-5)$; (b) $\frac{\pi}{5}a^5$. **4150.** $\frac{4}{9}MR^2$. **4153.** $I=\frac{M}{3}\left(a^2+\frac{2}{3}h^2\right)$, 其中 $M=2\pi\rho_0a^2h$ 为圆柱体的质量. **4154.** $I_0=\frac{\pi^2a^5\rho_0}{8}$. **4155.** $u=2\pi\rho_0\left(R^2-\frac{r^2}{3}\right)$, 其中 $r\leqslant R$; $u=\frac{4\pi R^3\rho_0}{3r}$, 其中 $r>R$, 而 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. **4156.** $u=4\pi\int_{R_1}^{R_2}f(\rho)\min\left(\frac{\rho^2}{r},\rho\right)\mathrm{d}\rho$, 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. **4157.** $u=\pi\rho_0\Big\{(h-z)\sqrt{a^2+(h-z^2)}+z\sqrt{a^2+z^2}-[(h-z)|h-z|+z|z|]+a^2\ln\left|\frac{h-z+\sqrt{a^2+(h-z)^2}}{\sqrt{a^2+z^2-z}}\right|\Big\}$. **4158.** $X=0; Y=0$; 当 $|a|\geqslant R$ 时 $Z=-\frac{GMm}{a|a|}$, 当 $|a|<R$ 时 $Z=-\frac{GMm}{R^3}a$. **4159.** $X=0; Y=0; Z=-2\pi\rho_0G\left\{\sqrt{a^2+z^2}-\sqrt{a^2+(h-z)^2}-(|z|-|h-z|)\right\}$. **4160.** $X=0; Y=0; Z=-k\pi\rho_0R\sin^2\alpha$. **4161.** 当 $p>1$ 时收敛. **4162.** 当 $p>1$ 且 $q>1$ 时收敛. **4163.** 当 $p>\frac{1}{2}$ 时收敛. **4164.** 当 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<1$ 时收敛. **4165.** 发散. **4169.** $\frac{1}{(p-q)(q-1)}$ $(p>q>1)$. **4170.** $\frac{1}{p-1}(p>1)$. **4171.** 2π. **4172.** $\frac{\pi}{p-1}(p>1)$. **4173.** $\pi\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$. **4174.** $\frac{1}{2}$. **4175.** π. **4176.** $\frac{\pi}{2}$. **4177.** $\frac{\pi}{2}$. **4178.** $\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}\mathrm{e}^{\frac{\Delta}{\delta}}$, 其中 $\delta=\begin{vmatrix}a & b\\ b & c\end{vmatrix}, \Delta=\begin{vmatrix}a & b & d\\ b & c & e\\ d & e & f\end{vmatrix}$. **4179.** $\frac{\pi}{\mathrm{e}}ab$. **4180.** $-\frac{\pi\varepsilon a^2b^2}{2(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$. **4181.** 收敛. **4182.** 当 $p<1$ 时收敛. **4183.** 当 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>1$ 时收敛. **4184.** 当 $p<1$ 时收敛. **4185.** 当 $p<1$ 时收敛. **4187.** $\frac{\pi}{2}$. **4188.** πa. **4189.** $-\frac{\pi^2}{2}\ln 2$. **4190.** 2. **4191.** 当 $p>\frac{3}{2}$ 时收敛. **4192.** 当 $p<\frac{3}{2}$ 时收敛. **4193.** 当 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1$ 时收敛. **4194.** 当 $p<1$ 时收敛. **4195.** 当 $p<1$ 时收敛. **4196.** $(1-p)^{-1}(1-q)^{-1}(1-r)^{-1}$ $(p<1, q<1, r<1)$. **4197.** $\frac{4\pi}{3}$. **4198.** $2\pi\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},1-p\right)$ $(p<1)$. **4199.** $\pi^{\frac{3}{2}}$. **4200.** $\sqrt{\frac{\pi^3}{\Delta}}$, 其中 $\Delta=|a_{ij}|$. **4204.** (a) $\frac{n}{3}$; (b) $\frac{n(3n+1)}{12}$. **4205.** $\frac{a^n}{n!}$. **4206.** $\frac{1}{2^nn!}$. **4207.** $\frac{2}{(n-1)!(2n+1)}$. **4208.** $\frac{2^nh_1h_2\cdots h_n}{|\Delta|}$. **4209.** $\frac{a_1a_2\cdots a_n}{n!}$. **4210.** $\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}a_1a_2\cdots a_n$. **4211.** $\frac{\pi^{\frac{n}{2}}a^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$. **4212.** $\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}a^{n-1}h^3}{12\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$. **4213.** $\frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$.

4218. $R^n \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^1 f(R\sqrt{u}) u^{\frac{n}{2}-1} \mathrm{d}u$. **4219.** $u = \frac{16}{15}\pi^2\rho_0^2 R^5$. **4220.** $\sqrt{\frac{\pi^n}{\delta}} \mathrm{e}^{-\frac{\Delta}{\delta}}$, 其中 $\delta = |a_{ij}|$, 而 $\Delta = \begin{vmatrix} a_{ij} & b_i \\ b_j & c \end{vmatrix}$ 为加边行列式. **4221.** $1 + \sqrt{2}$. **4222.** $\frac{256}{15}a^3$. **4223.** $2\pi^2 a^3(1 + 2\pi^2)$. **4224.** $\frac{a^3}{6}(\cosh^{\frac{3}{2}} 2t_0 - 1)$. **4225.** $4a^{\frac{7}{3}}$. **4226.** $2(\mathrm{e}^a - 1) + \frac{\pi}{4}a\mathrm{e}^a$. **4227.** $2a^2(2 - \sqrt{2})$. **4228.** $\frac{2ka^2\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}$. **4229.** $2a^2$. **4230.** $\frac{\pi}{a}$. **4231.** 5. **4232.** $\sqrt{3}$. **4233.** $|x_0| + |z_0|$, 其中 $|x_0| < a$. **4234.** $\frac{3}{4\sqrt{2}}\left(\sqrt[3]{\frac{3z_0^4}{a}} + 2\sqrt[3]{\frac{az_0^2}{3}}\right)$. **4235.** $\left(1 + \frac{2z_0}{3c}\right)\sqrt{cz_0}$. **4236.** $a\sqrt{2}\arctan\frac{|z|}{\sqrt{a^2 - z^2}}$. **4237.** $\frac{2\pi}{3}(3a^2 + 4\pi^2 b^2)\sqrt{a^2 + b^2}$. **4238.** $\frac{2}{3}\pi a^3$. **4239.** $\frac{1}{3}\left[(2 + t_0^2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right]$. **4240.** $\frac{a^2}{256\sqrt{2}}\left[100\sqrt{38} - 72 - 17\ln\frac{25+4\sqrt{38}}{17}\right]$. **4241.1.** $2b\left(b + a\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}\right)$, 其中 $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ 为椭圆的离心率. **4241.2.** $\frac{2}{3}p^2(2\sqrt{2} - 1)$. **4241.3.** $\frac{a}{8}\left[(3\sqrt{3} - 1) + \frac{3}{2}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right]$. **4242.** $x_0 = b - a\sqrt{\frac{h-a}{h+a}}; y_0 = \frac{h}{2} + \frac{ab}{2\sqrt{h^2-a^2}}$. **4243.** $x_0 = y_0 = \frac{4}{3}a$. **4244.1.** $S_x = S_y = \frac{3}{5}a^2$. **4244.2.** πa^3. **4244.3.** (a) $\frac{32}{3}a^3$; (b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^3$. **4244.4.** $r_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}$. **4245.** $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{4a}{3\pi}$. **4246.** $x_0 = \frac{2}{5}; y_0 = -\frac{1}{5}; z_0 = \frac{1}{2}$. **4247.** $I_x = I_y = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3}\right)\sqrt{4\pi^2a^2 + h^2}; I_z = a^2\sqrt{4\pi^2a^2 + h^2}$. **4248.** (a) 0; (b) $\frac{2}{3}$; (c) 2. **4249.** (a) 2; (b) 2; (c) 2. **4250.** $-\frac{14}{15}$. **4251.** $\frac{4}{3}$. **4252.** 0. **4253.** $-2\pi a^2$. **4254.** -2π. **4255.** 0. **4256.** 0. **4257.** $\frac{\pi}{4} - 1$. **4258.** 8. **4259.** 12. **4260.** 4. **4261.** -2. **4262.** $\int_0^{a+b} f(u)\,\mathrm{d}u$. **4263.** $-\frac{3}{2}$. **4264.** 9. **4265.** $\int_{x_1}^{x_2}\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{y_1}^{y_2}\psi(y)\,\mathrm{d}y$. **4266.** 62. **4267.** 1. **4268.** $\pi + 1$. **4269.** $\mathrm{e}^a\cos b - 1$. **4271.** $z = \frac{x^3}{3} + x^2y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + C$. **4272.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{3x-y}{2y\sqrt{2}} + C$. **4273.** $z = -\frac{2y^2}{(x+y)^2} + \ln|x + y| + C$. **4274.** $z = \mathrm{e}^{x+y}(x - y + 1) + y\mathrm{e}^x + C$. **4275.** $z = \frac{\partial^{n+m}u}{\partial x^n \partial y^m} + C$. **4276.** $z = \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m}(\arctan\frac{x}{y}) + C$. **4278.** $|I_R| \leqslant \frac{8\pi}{R^2}$. **4279.** $\frac{1}{35}$. **4280.** $-\pi a^2$. **4281.** $2\pi\sqrt{2}a^2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$. **4282.** $-\frac{\pi a^3}{4}$. **4283.** -4. **4284.** $-53\frac{7}{12}$. **4285.** 0. **4286.** $b - a$. **4287.** $\int_{x_1}^{x_2}\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{y_1}^{y_2}\psi(y)\,\mathrm{d}y + \int_{z_1}^{z_2}\chi(z)\,\mathrm{d}z$. **4288.** $\int_{x_1+y_1+z_1}^{x_2+y_2+z_2} f(u)\,\mathrm{d}u$. **4289.** $\int_{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}^{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} uf(u)\,\mathrm{d}u$. **4290.** $u = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - 2xyz + C$. **4291.** $u = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} + C$. **4292.** $u = \ln\sqrt{(x + y)^2 + z^2} + \arctan\frac{z}{x+y} + C$. **4293.** $A = -mg(z_2 - z_1)$. **4294.** $A = \frac{k}{2}(a^2 - b^2)$, k 为弹性系数. **4295.** $A = G\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$, 其中 $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$ $(i = 1, 2)$. **4296.** $I = \iint\limits_S y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. **4297.** $-46\frac{2}{3}$. **4298.** $\frac{\pi a^4}{2}$. **4299.** $-2\pi ab$. **4300.** $-\frac{1}{5}(\mathrm{e}^\pi - 1)$. **4301.** 0. **4302.** $I_1 - I_2 = 2$. **4303.** $\frac{\pi ma^2}{8}$. **4304.** $mS + \mathrm{e}^{x_2}\varphi(y_2) - \mathrm{e}^{x_1}\varphi(y_1) - m(y_2 - y_1) - \frac{m}{2}(x_2 - x_1)(y_2 + y_1)$. **4305.** $P = \frac{\partial u}{\partial x}, Q = kx + \frac{\partial u}{\partial y}$, 其中 u 为二阶可微函数, k 为常数. **4306.** $\frac{\partial}{\partial x}[xF(x, y)] = \frac{\partial}{\partial y}[yF(x, y)]$. **4307.** (1) $I = 0$; (2) $I = 2\pi$. **4308.** πab. **4309.** $\frac{3}{8}\pi ab$. **4310.** $\frac{a^2}{6}$. **4311.** $\frac{3}{2}a^2$. **4312.** a^2. **4313.** $\frac{1}{3} + \frac{4\pi}{9\sqrt{3}}$. **4314.** $\frac{a^2}{2}\mathrm{B}(2m + 1, 2n + 1)$. **4315.** $\frac{ab}{2n}\frac{\Gamma^2(\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{2}{n})}$. **4316.** $\frac{ab}{n}\left[1 + \frac{(1-\frac{1}{n})\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}\right]$. **4317.** $\frac{abc^2}{2(2n+1)}$. **4318.** $\pi(n + 1)(n + 2)r^2; 6\pi r^2$. **4319.** $\pi(n - 1)(n - 2)r^2; 6\pi r^2$. **4320.1.** $4a^2$. **4321.** $\mathrm{sgn}(ad - bc)$. **4322.** $I = \sum\mathrm{sgn}\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)}$, 其中求和遍历曲线 $\varphi(x, y) = 0$ 和 $\psi(x, y) = 0$ 在闭曲线 C 内的所有交点. **4324.** $I = 2S$, 其中 S 为闭曲线 C 所围的面积. **4325.** $X'_x(x_0, y_0) + Y'_y(x_0, y_0)$. **4326.** 力在坐标轴上的投影等于: $X = 0; Y = \frac{2GmM}{\pi a^2}$, 其中 G 为引力常数. **4327.** 当 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant R$ 时,$u = 2\pi\kappa R\ln\frac{1}{R}$; 当 $\rho > R$ 时 $u = 2\pi\kappa R\ln\frac{1}{\rho}$. **4328.** $I_1 = \frac{\pi}{m}\rho^m\cos m\varphi, I_2 = \frac{\pi}{m}\rho^m\sin m\varphi$,

其中 $0 \leqslant \rho \leqslant 1$; $I_1 = \frac{\pi}{m}\rho^{-m}\cos m\varphi, I_2 = \frac{\pi}{m}\rho^{-m}\sin m\varphi$, 其中 $\rho > 1$. **4329.** 若点 $A(x,y)$ 位于闭曲线 C 内, $u = 2\pi$; 若点 $A(x,y)$ 位于闭曲线 C 上, $u = \pi$; 若点 $A(x,y)$ 位于闭曲线 C 外, $u = 0$. **4330.** 当$0 \leqslant \rho < 1$ 时, $K_1 = \pi\rho^m\cos m\varphi, K_2 = \pi\rho^m \sin m\varphi$; 当 $\rho = 1$ 时, $K_1 = 0, K_2 = 0$; 当 $\rho > 1$ 时, $K_1 = -\frac{\pi}{\rho^m}\cos m\varphi, K_2 = -\frac{\pi}{\rho^m}\sin m\varphi$. **4339.** $Q = \iint\limits_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y; \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$. **4340.** $H_x = ki\oint_C \frac{1}{r^3}[(\eta - y)\,\mathrm{d}z - (\zeta - z)\,\mathrm{d}y]; H_y = ki\oint_C \frac{1}{r^3}[(\zeta - z)\,\mathrm{d}x - (\zeta - x)\,\mathrm{d}z]; H_z = ki\oint_C \frac{1}{r^3}[(\xi - x)\,\mathrm{d}y - (\eta - y)\,\mathrm{d}x]$. **4341.** $I_1 - I_2 = (4\pi - 2\sqrt{3})a^4$. **4342.** $\frac{7}{2}\pi\sqrt{2}a^3$. **4343.** πa^3. **4344.** $\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})$. **4345.** $\frac{3-\sqrt{3}}{2} + (\sqrt{3}-1)\ln 2$. **4346.** $\frac{125\sqrt{5}-1}{420}$. **4347.** $\frac{4\pi}{3}abc\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$. **4348.** $\pi^2[a\sqrt{1+a^2} + \ln(a+\sqrt{1+a^2})]$. **4349.** $\frac{\pi a^4}{2}\sin\alpha\cos^2\alpha \left(0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$. **4350.** $\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4$. **4352.1.** $\frac{2\pi(1+6\sqrt{3})}{15}$. **4352.2.** πa^2. **4352.3.** $\frac{a^3}{2\sqrt{3}}$. **4353.** $\frac{4}{3}\pi\rho_0 a^4$. **4354.** $\frac{\pi\rho_0 a(3a^2+2b^2)\sqrt{a^2+b^2}}{12}$. **4355.** (a) $x_0 = \frac{a}{2}; y_0 = 0; z_0 = \frac{16}{9\pi}a$; (b) $x_0 = y_0 = \frac{a}{2\sqrt{2}}; z_0 = \frac{a}{\pi}(\sqrt{2}+1)$. **4356.1.** (a) $40a^4$; (b) $\pi R[R(R+H)^2 + \frac{2}{3}H^3]$. **4356.2.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$. **4357.** 引力在坐标轴上的投影 $X = 0; Y = 0; Z = \pi k m \rho_0 \ln\frac{a}{b}$. **4358.** $u = 4\pi\rho_0 \min\left(a, \frac{a^2}{r_0}\right)$, 其中 $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$. **4359.** 当 $|t| \leqslant \sqrt{3}$ 时 $F(t) = \frac{\pi}{18}(3-t^2)^2$; 当 $|t| > \sqrt{3}$ 时 $F(t) = 0$. **4360.** $F(t) = \frac{\pi(8-5\sqrt{2})}{6}t^4$. **4361.** 当 $t \leqslant r-a$ 时 $F = 0$; 当 $r-a < t < r+a$ 时 $F = \frac{\pi t}{r}[a^2 - (r-t)^2]$; 当 $t \geqslant r+a$ 时 $F = 0\ (t \geqslant 0)$. **4362.** $4\pi a^3$. **4363.** $\left[\frac{f(a)-f(0)}{a} + \frac{g(b)-g(0)}{b} + \frac{h(c)-h(0)}{c}\right]abc$. **4364.** 0. **4365.** $\frac{4\pi}{abc}(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$. **4366.** $\frac{8\pi}{3}(a+b+c)R^3$. **4367.** $-\pi a^2\sqrt{3}$. **4368.** $\frac{h^3}{3}$. **4369.** $2S$. **4370.** 0. **4371.** $-2\pi a(a+h)$. **4372.** $2\pi Rr^2$. **4373.** $-\frac{9}{2}a^3$. **4374.** 0. **4376.** $3\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. **4377.** 0. **4378.** $2\iiint\limits_V \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **4379.** $\iiint\limits_V \Delta u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. **4380.** 0. **4384.** $\frac{4\pi}{3}\left(a^2 + \frac{b^2}{2}\right)|c|$. **4385.1.** $\frac{2}{9}a^3$. **4385.2.** $2\pi^2a^2b$. **4387.** $3a^4$. **4388.** $\frac{12}{5}\pi a^5$. **4389.** 1. **4390.** $-\frac{\pi h^4}{2}$. **4392.** (a) $I = 0$; (b) $I = 4\pi$. **4401.1.** (a) $\operatorname{grad} u(0) = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k}; |\operatorname{grad} u(0)| = 7, \cos\alpha = \frac{3}{7}, \cos\beta = -\frac{2}{7}, \cos\gamma = -\frac{6}{7}$. (b) $\operatorname{grad} u(A) = 6\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}, |\operatorname{grad} u(A)| = 3\sqrt{5}, \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos\gamma = 0$. (c) $\operatorname{grad} u(B) = 7\boldsymbol{i}, |\operatorname{grad} u(B)| = 7, \cos\alpha = 1, \cos\beta = 0, \cos\gamma = 0$; 在点 $M(-2,1,1)$ 上 $\operatorname{grad} u = \mathbf{0}$. **4401.2.** $\operatorname{grad} u(M) = 12\boldsymbol{i} - 9\boldsymbol{j} - 20\boldsymbol{k}, |\operatorname{grad} u(M)| = 25, \cos\alpha = \frac{12}{25}, \cos\beta = -\frac{9}{25}, \cos\gamma = -\frac{4}{5}; \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{3}{\sqrt{2}}$. **4402.** (a) $xy = z^2$; (b) $x = y = 0$ 和 $x = y = z$; (c) $x = y = z$. **4403.** $r = 1$. **4404.** $\frac{4(x^2+y^2)}{u^2-256} + \frac{4z^2}{u^2} = 1\ (u \geqslant 16); \frac{x^2+y^2}{960} + \frac{z^2}{1024} = 1; \max u = 20$. **4405.** $\cos\varphi = -\frac{8}{9}$. **4406.** 等值面——圆锥孔; 梯度的等模面——圆环; $\inf u = 0, \sup u = 1; \inf|\operatorname{grad} u| = 0, \sup|\operatorname{grad} u| = \frac{1}{2}$. **4407.** $\frac{|\Delta c|}{|\operatorname{grad} u(x_0,y_0,z_0)|}$. **4409.** (a) $\frac{\boldsymbol{r}}{r}$; (b) $2\boldsymbol{r}$; (c) $-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$. **4410.** $f'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}$. **4411.** $\boldsymbol{c}$. **4412.** $2\boldsymbol{r}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}) - 2\boldsymbol{c}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})$. **4415.** (a) $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$, 其中 $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{i}\cos\varphi + \boldsymbol{j}\sin\varphi, \boldsymbol{e}_\varphi = -\boldsymbol{i}\sin\varphi + \boldsymbol{j}\cos\varphi, \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{k}$ 为相应坐标线的单位切向量. (b) $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$, 其中 $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{i}\cos\varphi\sin\theta + \boldsymbol{j}\sin\varphi\sin\theta + \boldsymbol{k}\cos\theta, \boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{i}\cos\varphi\cos\theta + \boldsymbol{j}\sin\varphi\cos\theta - \boldsymbol{k}\sin\theta, \boldsymbol{e}_\varphi = -\boldsymbol{i}\sin\varphi + \boldsymbol{j}\cos\varphi$ 为相应坐标线的单位切向量. **4416.** $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{2u}{r}$, 其中 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}; \frac{\partial u}{\partial r} = |\operatorname{grad} u|$, 其中 $a = b = c$. **4417.** $\frac{\partial u}{\partial l} = -\frac{\cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{r})}{r^2}; \frac{\partial u}{\partial l} = 0$, 其中 $\boldsymbol{l} \perp \boldsymbol{r}$. **4418.** $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\operatorname{grad} u\cdot\operatorname{grad} v}{|\operatorname{grad} v|}; \frac{\partial u}{\partial l} = 0$, 其中 $\operatorname{grad} u \perp \operatorname{grad} v$. **4419.** $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{i}(x^2+y^2+yz) - \boldsymbol{j}(x^2+y^2+xz) + \boldsymbol{k}(x-y)z}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}$. **4420.** $y = c_1x, z = c_2x^2$. **4423.1.** $\operatorname{div}\boldsymbol{a}(M) =$

$\frac{18}{125}; \Pi = \frac{24}{125}\pi\varepsilon^3$. **4423.2.** 0. **4425.** $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \Delta u$, 其中 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. **4426.** $f''(r) + \frac{2}{r}f'(r); f(r) = c + \frac{c_1}{r}$, 其中 c 和 c_1 为常数. **4427.** (a) 3; (b) $\frac{2}{r}$. **4428.** $\frac{f'(r)}{r}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})$. **4429.** $3f(r)+rf'(r); f(r) = \frac{c}{r^3}$, c 为常数. **4430.** (a) $u\Delta u+(\operatorname{grad} u)^2$; (b) $u\Delta v+\operatorname{grad} u\cdot\operatorname{grad} v$, 其中 Δu 为拉普拉斯算子. **4431.** $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0; \operatorname{div}\boldsymbol{w} = -2\omega^2$. **4432.** 0, 在引力中心之外. **4433.** $\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_r) + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}\right]$, 其中 a_r, a_φ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在坐标线 $\varphi =$ 常数和 $r =$ 常数上的投影. **4434.** $\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{1}{LMN}\left[\frac{\partial}{\partial u}(MNa_u) + \frac{\partial}{\partial v}(NLa_v) + \frac{\partial}{\partial w}(LMa_w)\right]$, 其中 a_u, a_v, a_w 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在对应坐标线上的投影, 而 $L = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2}, M = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2}, N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)^2}$. 若 r, φ, z 为圆柱坐标, 则 $\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_r) + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + r\frac{\partial a_z}{\partial z}\right]$; 若 r, θ 和 φ 为球坐标, 则 $\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 a_r\sin\theta) + r\frac{\partial}{\partial\theta}(a_\theta\sin\theta) + r\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right]$. **4436.1.** (a) 0; (b) 0. **4436.2.** $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}(M) = -\frac{5}{4}\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \frac{5}{2}\boldsymbol{k}, |\operatorname{rot}\boldsymbol{a}(M)| = \frac{1}{4}\sqrt{141}, \cos\alpha = \frac{-5}{\sqrt{141}}, \cos\beta = \frac{-4}{\sqrt{141}}, \cos\gamma = \frac{10}{\sqrt{141}}$. **4437.** (a) $\frac{f'(r)}{r}[\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{c}]$; (b) $2f(r)\boldsymbol{c} + \frac{f'(r)}{r}[\boldsymbol{c}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})]$. **4439.** (a) $\boldsymbol{0}$; (b) 0. **4440.** $\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{\omega}$. **4441.1.** $\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_\varphi) - \frac{\partial a_r}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{k}$, 其中 a_φ 和 a_r 为向量 $\boldsymbol{a}$ 分别在坐标线 $\varphi =$ 常数和 $r =$ 常数上的投影. **4441.2.** (a) $\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_\varphi) - \frac{\partial a_r}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{e}_z$, 其中 $a_r = a_x\cos\varphi + a_y\sin\varphi$, $a_\varphi = -a_x\sin\varphi + a_y\cos\varphi, a_z = a_z$; (b) $\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(a_\varphi\sin\theta) - \frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(ra_\varphi)\right]\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_\theta) - \frac{\partial a_r}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{e}_\varphi$, 其中 $a_r = a_x\cos\varphi\sin\theta + a_y\sin\varphi\sin\theta + a_z\cos\theta, a_\theta = a_x\cos\varphi\cos\theta + a_y\sin\varphi\cos\theta - a_z\sin\theta, a_\varphi = -a_x\sin\varphi + a_y\cos\varphi$. **4442.1.** (a) 0; (b) πh^3. **4442.2.** (a) 0; (b) 0. **4443.** π. **4444.** $\frac{3\pi}{8}$. **4445.1.** 0. **4445.2.** $\frac{\pi}{5}$. **4447.** $4\pi m$. **4448.** $\sum_{i=1}^n e_i$. **4450.** $c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k\operatorname{grad} u)$, 其中 c 为质量热容, ρ 为物体密度. **4452.1.** $2\pi^2 b^2$. **4452.2.** $8\frac{20}{21}\cdot\ln 2$. **4452.3.** $\frac{3}{4}(3 + \mathrm{e}^4 - 12\mathrm{e}^2)$. **4452.4.** -12. **4453.** $\int_{r_A}^{r_B} f(r)r\,\mathrm{d}r$. **4454.1.** (a) 2π; (b) 2π. **4454.2.** (a) $\Gamma = 0$; (b) $\Gamma = 2\pi n$, 其中 n 为闭曲线 C 绕 Oz 轴的周数. **4455.** $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}(M) = -\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}, \Gamma = -\pi(\cos\beta + 2\cos\gamma)\varepsilon^2$. **4456.** $Q = \iint\limits_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y; \Gamma = \iint\limits_S \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$. **4457.1.** $u = xyz(x+y+z) + C$. **4457.2.** $\frac{1}{3}$. **4458.** $u = \frac{m}{r}$. **4459.** $u(x,y,z) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i}$, 其中 r_i 为点 $M(x,y,z)$ 与点 $M_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 之间的距离. **4460.** $u(x,y,z) = \int_{r_0}^r tf(t)\,\mathrm{d}t$, 其中 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

人名译名对照表

A

阿贝尔，N. H. Abel
阿达马，J. Hadamard
阿基米德，Archimedes
埃尔米特，C. Hermite
奥斯特罗格拉茨基，M. B. Остроградский

B

贝塞尔，F. W. Bessel
毕奥，J. B. Biot
波尔查诺，B. Bolzano
玻意耳，R. Boyle
伯恩斯坦，C. H. Бернштейн
伯努利，J. Bernoulli
布尼亚科夫斯基，B. Я. Буняковский

D

达朗贝尔，J. L. R. d'Alembert
狄利克雷，P. G. L. Dirichlet
笛卡儿，R. Descartes
棣莫弗，A. de Moivre

F

范德瓦耳斯，J. D. van der Waals
菲涅尔，A. J. Fresnel
斐波那契，Fibonacci
费马，P. de Fermat
费耶，L. Fejér
傅里叶，J. B. J. Fourier
傅茹兰，Frullani

G

高斯，C. F. Gauss
格林，G. Green
古尔丹，P. Guldin

H

亥姆霍兹，H. L. F. Helmholtz
赫尔德，O. L. Hölder
胡克，R. Hooke
惠更斯，C. Huygens

J

吉米多维奇，Б. П. Демидович
B. Б. Демидович
П. П. Демидович

K

卡塔兰，E. C. Catalan
开普勒，J. Kepler
柯西，A. L. Cauchy

L

拉比，J. L. Raabe

拉盖尔, E. N. Laguerre
拉格朗日, J. L. Lagrange
拉普拉斯, P. S. Laplace
莱布尼茨, G. W. Leibniz
兰伯特, J. H. Lambert
勒让德, A. M. Legendre
黎曼, G. F. B. Riemann
李雅普诺夫, A. M. Ляпунов
利普希茨, R. O. S. Lipschitz
刘维尔, J. Liouville
罗巴切夫斯基, H. И. Лобачевский
罗尔, M. Rolle
洛必达, G. F. A. de L'Hospital
洛朗, P. A. Laurent

M

马略特, E. Mariotte
麦克劳林, C. Maclaurin

N

尼尔, W. Neile
涅梅茨基, B. B. Немыцкий
牛顿, I. Newton

O

欧拉, L. Euler

P

帕斯卡, B. Pascal
普林斯海姆, A. Pringsheim
泊松, S. D. Poisson

Q

切比雪夫, П. Л. Чебышев

S

萨瓦尔, F. Savart
施托尔茨, O. Stolz
斯捷克洛夫, B. A. Стеклов
斯捷潘诺夫, B. B. Степанов
斯特林, J. Stirling
斯托克斯, G. G. Stokes

T

泰勒, B. Taylor
托里拆利, E. Torricelli

W

维维亚尼, V. Viviani
魏尔斯特拉斯, K. T. W. Weierstrass
沃利斯, J. Wallis

X

辛普森, T. Simpson

Y

雅可比, C. G. J. Jacobi
雅姆, Jame
杨, T. Young
叶尔马科夫, V. P. Ermakov

Z

卓里奇, B. A. Зорич

译后记

Б. П. 吉米多维奇的《数学分析习题集》是一部久负盛名的著作, 在中国尤其具有非同寻常的地位. 我曾经听不止一位老教授讲, 当年教数学分析习题课的时候, 不提前把吉米多维奇习题集做完一遍是不敢上讲台的. 直到今天, 以全部做完此习题集为荣者仍不在少数. 各种版本的吉米多维奇习题集解答在市面上一直热销, 这是此习题集长盛不衰的最好证据. 在北京大学图书馆开架阅览室内, 与吉米多维奇习题集解答有关的书占据了整整一组书架, 而且几乎每本书都"体无完肤"; 然而, 我却发现,《习题集》本身竟然不在架上——必须专门填写借书单才能从书库中借出. 究其原因,大概是原书中译本版本较早之故. 与此形成鲜明对比的是, 俄文版的《习题集》不断再版, 至今已有 2010 年版. 由此可见, 修订出版新的中译本早就大有必要.

由李荣涑先生翻译的《数学分析习题集》出版于 20 世纪 50 年代. 第一版是根据 1952 年的原书第一版译出的, 由商务印书馆于 1953 年出版. 译者在几年之后又根据原书第三版进行了修订, 修订版由高等教育出版社于 1958 年出版, 包含 4462 道习题 (按大题号计算). 1958 年版中译本曾经多次重印, 其影响持续至今, 很多相关题解都是基于这个版本.

本书根据 ACT: Астрель 出版社的 2010 年俄文版译出, 是对 1958 年版中译本的全面修订和增补. 由于原译者李荣涑先生已经辞世, 高等教育出版社委托我负责这项工作. 说来也巧, 我在莫斯科大学力学数学系上大学期间, 数学分析习题课所用教材就是这本习题集. 对我而言, 成为本书的继任译者既是荣誉更是义务——我理应在力所能及的翻译工作中贡献自己的力量.

由于时间跨度很大, 2010 年俄文版在内容上与 1958 年中译本有一些不同, 这主要表现在后来的版本包含一些新题. 新题或者以子题的形式出现, 如习题 101 (b), 或者具有带点的题号, 如习题 235.2, 但习题 235.1 是原习题 235. 绝大多数老题的题号保持不变, 习题集最后一题的题号仍是 4462, 但习题总数已经达到大约 5000 道. 此外, 个别旧题被替换为新题, 少量文字有变化.

在这次修订增补过程中, 我完成了以下工作:

(1) 对照原文检查并修订旧版译文, 补译新版增加和变更的内容. 整体而言, 原中译本的翻译水平是相当高的, 尤其在纯数学的部分, 错漏之处极少. 原中译本对力学和物理学方面的内容处理得不够理想, 这大概与当时还没有形成统一规范的术语体系有关.

(2) 根据《数学名词 1993》、《物理学名词 1996》、《力学名词 1993》和相关国家标准把过去曾经使用的不规范术语改为规范术语, 按照现在的标准或通用译法重新翻译人名, 并在书末添加了外国人名译名对照表.

(3) 按照更加符合当前语言习惯的方式对全部译文进行适当改写, 同时尽量保持原中译本简洁凝练的语言风格.

(4) 在个别地方添加了译注, 并改正了原书的少量印刷错误以及个别习题的答案.

在本书的出版过程中, 我得到了多方面的帮助. 首先要感谢苏州大学的谢惠民、卫瑞霞和吴茂庆三位老师, 他们在编写与本习题集配套的学习指引的过程中, 发现了原书中的一些错误和纰漏, 为进一步提高本书的质量作出了贡献. 特别要提的是, 谢惠民教授在翻译过程中耐心解答了我就一些疑难习题提出的问题, 并帮助撰写了 3 条译注.

高等教育出版社的资深数学编审郭思旭先生帮助我校订了第一章全部内容和第二章部分内容, 在此表示衷心感谢.

我还要感谢华东师范大学数学系的倪明康老师, 他协助高等教育出版社联系了本书的著作权所有者、Б. П. 吉米多维奇之子——莫斯科大学的 В. Б. 吉米多维奇教授, 并亲自将新版俄文书从俄罗斯带回国内.

本书的出版得到高等教育出版社的大力支持, 特别要感谢张小萍女士、赵天夫先生和李鹏先生, 他们对本书的出版提供了很多实际的帮助.

此外, 杨延涛博士和曾利博士阅读了部分译稿并提出了许多有价值的修改建议, 在此一并致谢.

最后, 感谢倪明先生为本书出版所做作的贡献.

由于整个修订和翻译工作是在较短时间内完成的, 虽竭尽全力, 疏漏之处仍在所难免, 恳请各位专家和广大读者批评指正, 以便有机会再版时加以改正.

李　植

2010 年 6 月于北京大学

zhili@pku.edu.cn

相关图书清单

注：书号前缀为 978-7-04-0xxxxx-x

书号	书名	著译者
18303-0	微积分学教程（第一卷）(第 8 版)	[俄] Г. М. 菲赫金哥尔茨
18304-7	微积分学教程（第二卷）(第 8 版)	[俄] Г. М. 菲赫金哥尔茨
18305-4	微积分学教程（第三卷）(第 8 版)	[俄] Г. М. 菲赫金哥尔茨
18302-3	数学分析（第一卷）(第 4 版)	[俄] В. А. 卓里奇
20257-1	数学分析（第二卷）(第 4 版)	[俄] В. А. 卓里奇
18306-1	数学分析讲义（第 3 版）	[俄] Г. И. 阿黑波夫、В. А. 萨多夫尼齐、В. Н. 丘巴里阔夫
★25439-6	数学分析习题集 (根据 2010 年俄文版翻译)	[俄] Б. П. 吉米多维奇
★	工科数学分析习题集 (根据 2006 年俄文版翻译)	[俄] Б. П. 吉米多维奇
★29531-3	吉米多维奇数学分析习题集学习指引（第一册）	沐定夷、谢惠民 编著， 卫瑞霞、吴茂庆 审校
★30578-4	复分析导论（第一卷）(第 4 版)	[俄] Б. В. 沙巴特
22360-6	复分析导论（第二卷）(第 4 版)	[俄] Б. В. 沙巴特
18407-5	函数论与泛函分析初步（第 7 版）	[俄] А. Н. 柯尔莫戈洛夫、С. В. 佛明
★29221-3	实变函数论（第 5 版）	[俄] И. П. 那汤松
18398-6	复变函数论方法（第 6 版）	[俄] М. А. 拉夫连季耶夫、Б. В. 沙巴特
18399-3	常微分方程（第 6 版）	[俄] Л. С. 庞特里亚金
22521-1	偏微分方程讲义（第 2 版）	[俄] О. А. 奥列尼克
25766-3	偏微分方程习题集（第 2 版）	[俄] А. С. 沙玛耶夫
23063-5	奇异摄动方程解的渐近展开	[俄] А. Б. 瓦西里亚娃、В. Ф. 布图索夫
★27249-9	数值方法（第 5 版）	[俄] Н. С. 巴赫瓦洛夫，Н. П. 热依德科夫，Г. М. 柯别里科夫
20525-1	代数学引论（第一卷）基础代数（第 2 版）	[俄] А. И. 柯斯特利金
21491-8	代数学引论（第二卷）线性代数（第 3 版）	[俄] А. И. 柯斯特利金
22506-8	代数学引论（第三卷）基本结构（第 2 版）	[俄] А. И. 柯斯特利金
18946-9	现代几何学：方法与应用（第一卷）曲面几何、变换群与场（第 5 版）	[俄] Б. А. 杜布洛文、С. П. 诺维可夫、А. Т. 福明柯

书号	书名	著译者
21492-5	现代几何学：方法与应用（第二卷）流形上的几何与拓扑（第5版）	[俄] Б. А. 杜布洛文、С. П. 诺维可夫、А. Т. 福明柯
21434-5	现代几何学：方法与应用（第三卷）同调论引论（第2版）	[俄] Б. А. 杜布洛文、С. П. 诺维可夫、А. Т. 福明柯
18405-1	微分几何与拓扑学简明教程	[俄] А. С. 米先柯、А. Т. 福明柯
★28888-9	微分几何与拓扑学习题集（第2版）	[俄] А. С. 米先柯、Ю. П. 索洛维约夫、А. Т. 福明柯
22059-9	概率（第一卷）(第3版)	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
22555-6	概率（第二卷）(第3版)	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
22554-9	概率论习题集	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
22359-0	随机过程论	[俄] А. В. 布林斯基、А. Н. 施利亚耶夫
22634-8	随机金融基础（第一卷）事实．模型	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
23983-6	随机金融基础（第二卷）理论	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
18403-7	经典力学的数学方法（第4版）	[俄] В. И. 阿诺尔德
18530-0	理论力学（第3版）	[俄] А. П. 马尔契夫
22155-8	连续介质力学（第一卷）(第6版)	[俄] Л. И. 谢多夫
22633-1	连续介质力学（第二卷）(第6版)	[俄] Л. И. 谢多夫
★29223-7	非线性动力学定性理论方法（第一卷）	[俄] L. P. Shilnikov 等
★29464-4	非线性动力学定性理论方法（第二卷）	[俄] L. P. Shilnikov 等

说明：加★者为最新出版．